МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2000

УДК 531.55:521.2

© 2000 г. Е.Ю. КУЗНЕЦОВА, В.В. САЗОНОВ, С.Ю. ЧЕБУКОВ

ЭВОЛЮЦИЯ БЫСТРОГО ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО И АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МОМЕНТОВ

В рамках схемы метода усреднения, предложенной Ф.Л. Черноусько, исследована эволюция вращательного движения искусственного спутника Земли, близкого движению Эйлера – Пуансо, под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Внешняя оболочка спутника имеет форму эллипсоида с близкими длинами полуосей. Действующий на такой спутник аэродинамический момент допускает аналитическое усреднение по движениям Эйлера – Пуансо и орбитальному кеплерову. В результате усреднения получена эволюционная система дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно двух интегралов движения Эйлера – Пуансо и двух углов, задающих ориентацию вектора собственного кинетического момента спутника в абсолютной системе координат. В случае, когда внешняя оболочка спутника – сфера и аэродинамический момент существенно больше гравитационного, вектор кинетического момента спутника имеет неизменный модуль и совершает периодическую прецессию. Поэтому для спутника с формой, близкой к сфере, производится аналитическое усреднение эволюционной системы по прецессии вектора кинетического момента. Усредненная система имеет третий порядок и первый интеграл, позволяющий снизить ее порядок до второго. Проведено исследование фазового портрета полученной системы второго порядка при различных значениях входящих в нее параметров.

1. Уравнения движения и постановка задачи. Рассмотрим искусственный спутник Земли, представляющий собой твердое тело, центр масс которого движется по кеплеровой эллиптической орбите с большой полуосью a и эксцентриситетом e. Положение спутника на орбите будем задавать истинной аномалией ν. Пусть внешняя оболочка спутника имеет форму эллипсоида, близкого к сфере. Длины полуосей эллипсоида обозначим b_1, b_2, b_3 и положим $b_2 = b_1(1-\varepsilon_1)$, $b_3 = b_1(1-\varepsilon_2)$, где ε_1 и ε_2 – малые параметры.

Для записи уравнений движения спутника относительно центра масс введем четыре правые декартовы системы координат.

$O's_1s_2s_3$ – система координат, связанная с внешней оболочкой спутника. Внешняя оболочка в этой системе задается уравнением

$$s_1^2/b_1^2 + s_2^2/b_2^2 + s_3^2/b_3^2 = 1$$

$Ox_1x_2x_3$ – система координат, образованная главными центральными осями инерции спутника, точка O – центр масс спутника.

$Oy_1y_2y_3$ – перигейная система координат, ось Oy_3 направлена параллельно геоцентрическому радиусу-вектору перигея орбиты, ось Oy_1 параллельна геоцентрической скорости спутника в перигее. Направления осей этой системы считаем неизменными в абсолютном пространстве.

$Oz_1z_2z_3$ – система координат, связанная с вектором $\mathbf{L}$ кинетического момента спутника, вычисленного для его движения относительно точки O. Ось Oz_3 направлена по

$\mathbf{L}$, ось Oz_2 лежит в плоскости Oy_1y_3. Ниже, если не оговорено особо, компоненты векторов указываются в системе $Oz_1z_2z_3$.

Положение системы координат $Oz_1z_2z_3$ относительно системы $Oy_1y_2y_3$ будем задавать двумя способами [1]. Первый способ состоит в использовании углов ρ и σ, которые вводятся следующим образом: угол ρ образован осями Oy_2 и Oz_3, угол σ – осями Oy_1 и Oz_2. Направление отсчета этих углов согласовано с направлениями осей Oz_2 и Oy_2 соответственно. Во втором способе используются углы θ и λ, первый из них – это угол между осями Oy_1 и Oz_3, второй отсчитывается от оси Oy_2 до проекции оси Oz_3 на плоскость Oy_2y_3. Элементы матрицы перехода $\left\|\beta_{ij}\right\|_{i,j=1}^{3}$ от системы $Oz_1z_2z_3$ к системе $Oy_1y_2y_3$ (β_{ij} – косинус угла между осями Oy_i и Oz_j) выражаются через углы ρ и σ следующим образом

$$\begin{aligned}
&\beta_{11} = \sin\sigma\cos\rho, \quad &&\beta_{12} = \cos\sigma, \quad &&\beta_{13} = \sin\sigma\sin\rho \\
&\beta_{21} = -\sin\rho, &&\beta_{22} = 0, &&\beta_{23} = \cos\rho \\
&\beta_{31} = \cos\sigma\cos\rho, &&\beta_{32} = -\sin\sigma, &&\beta_{33} = \cos\sigma\sin\rho
\end{aligned}$$

Направляющие косинусы оси Oz_3 в системе $Oy_1y_2y_3$ выражаются через углы θ и λ по формулам

$$\beta_{13} = \cos\theta, \quad \beta_{23} = \sin\theta\cos\lambda, \quad \beta_{33} = \sin\theta\sin\lambda \tag{1.1}$$

Ориентацию системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $Oz_1z_2z_3$ зададим углами Эйлера: углом прецессии ψ, углом нутации ϑ и углом собственного вращения φ. Матрицу перехода от системы $Ox_1x_2x_3$ к системе $Oz_1z_2z_3$ обозначим $\left\|\alpha_{ij}\right\|_{i,j=1}^{3}$. Элементы этой матрицы $\alpha_{ij} = \cos(Oz_i, Ox_j)$ выражаются через углы Эйлера с помощью известных формул (см. например, [1]).

Ориентацию осей системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $O's_1s_2s_3$ зададим матрицей $\left\|a_{ij}\right\|_{i,j=1}^{3}$, где $a_{ij} = \cos(O's_i, Ox_j)$. Элементы этой матрицы считаем неизменными.

Из внешних моментов, приложенных к спутнику, будем учитывать аэродинамический и гравитационный. Гравитационный момент $\mathbf{M}_g$ задается простыми аналитическими выражениями [1].

При вычислении аэродинамического момента будем считать, что атмосфера неподвижна в абсолютном пространстве и молекулы воздуха при столкновении с поверхностью спутника испытывают абсолютно неупругий удар. В этом случае аэродинамический момент относительно точки O определяется формулой

$$\mathbf{M}_a = \rho_a v^2 S(\mathbf{d}\times\mathbf{e}_v)$$

где ρ_a – плотность набегающего на спутник аэродинамического потока, v и $\mathbf{e}_v$ – модуль и орт геоцентрической скорости центра масс спутника, S – площадь ортогональной проекции внешней оболочки спутника на плоскость, перпендикулярную $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{d}$ – вектор, направленный из точки O' в центр масс спутника O. Пусть в системе $O's_1s_2s_3$ $\mathbf{e}_v = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\mathbf{d} = (D_1, D_2, D_3)$. Тогда D_i – неизменные величины

$$S = \pi b_1 b_2 b_3\sqrt{\alpha_1^2/b_1^2 + \alpha_2^2/b_2^2 + \alpha_3^2/b_3^2}$$

Подставим в последнюю формулу указанные выше формулы для b_2 и b_3 и разложим полученное выражение в ряд по ε_1, ε_2. Сохраняя в этом разложении линейные по ε_1 и ε_2 члены, будем иметь

$$S = \pi b_1^2\left(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_1\alpha_2^2 + \varepsilon_2\alpha_3^2\right)$$

Представим площадь S в виде суммы слагаемого $\pi b_1^2(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2)$, не зависящего от ориентации спутника, и слагаемого $\pi b_1^2\left(\varepsilon_1\alpha_2^2+\varepsilon_2\alpha_3^2\right)$, которое от ориентации зависит. Тогда аэродинамический момент можно представить в виде суммы

$$\mathbf{M}_a=\mathbf{M}_{a1}+\mathbf{M}_{a2},\quad \mathbf{M}_{a1}=q(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\mathbf{d}\times\mathbf{e}_v)$$

$$\mathbf{M}_{a2}=q\left(\varepsilon_1\alpha_2^2+\varepsilon_2\alpha_3^2\right)(\mathbf{d}\times\mathbf{e}_v),\quad q=\pi b_1^2\rho_a v^2$$

Уравнения движения спутника относительно центра масс запишем в виде [1, 2]:

$$\dot L=M_3,\quad L\dot\rho=M_1,\quad L\dot\sigma\sin\rho=M_2$$

$$\dot\psi=L\left(\frac{\sin^2\varphi}{A}+\frac{\cos^2\varphi}{B}\right)-\frac{M_1\cos\psi+M_2\sin\psi}{L\operatorname{tg}\vartheta}-\frac{M_2}{L\operatorname{tg}\rho}\tag{1.2}$$

$$\dot\varphi=L\cos\vartheta\left(\frac{1}{C}-\frac{\sin^2\varphi}{A}-\frac{\cos^2\varphi}{B}\right)+\frac{M_1\cos\psi+M_2\sin\psi}{L\sin\vartheta}$$

$$\dot\vartheta=L\sin\vartheta\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)-\frac{M_1\sin\psi-M_2\cos\psi}{L}$$

Здесь $L=|\mathbf{L}|$; точкой обозначено дифференцирование по времени t; A, B и C – моменты инерции спутника относительно осей Ox_1, Ox_2 и Ox_3; M_1, M_2 и M_3 – компоненты момента $\mathbf{M}_g+\mathbf{M}_a$.

В качестве одной из переменных, описывающих движение спутника, будем использовать величину z, определяемую соотношением

$$z=\sin^2\vartheta\sin^2\varphi+\mu\cos^2\vartheta,\quad \mu=\frac{A(B-C)}{C(B-A)}\tag{1.3}$$

Дифференциальное уравнение для z имеет вид

$$\dot z=\frac{2\sin\vartheta}{L}\Big[\sin\varphi\cos\varphi(M_1\cos\psi+M_2\sin\psi)+$$
$$+(\mu-\sin^2\varphi)\cos\vartheta(M_1\sin\psi-M_2\cos\psi)\Big]\tag{1.4}$$

Правую часть этого уравнения обозначим через F и представим в виде суммы $F=F_g+F_{a1}+F_{a2}$. Здесь F_g, F_{a1} и F_{a2} – вклады в F моментов $\mathbf{M}_g$, $\mathbf{M}_{a1}$ и $\mathbf{M}_{a2}$.

Влияние внешних моментов на собственное вращение спутника будем считать малым. Это предположение позволяет применить для приближенного интегрирования уравнений (1.2) схему метода усреднения, предложенную в [2]. Согласно этой схеме движение спутника рассматривается как медленная эволюция его движения Эйлера – Пуансо, характеризуемого переменными L, ρ, σ и z. Переменные L, ρ и σ задают вектор $\mathbf{L}$ в абсолютном пространстве; переменная z характеризует движение спутника относительно этого вектора. Дифференциальные уравнения, описывающие в нерезонансном случае эволюцию указанных переменных, получаются усреднением правых частей первых трех уравнений (1.2) и уравнения (1.4) по невозмущенному движению Эйлера – Пуансо. В случае исследования движения на интервалах времени, существенно превышающих орбитальный период спутника, эволюционные уравнения целесообразно усреднить и по орбитальному кеплерову движению.

2. Вывод эволюционных уравнений. Невозмущенное движение спутника описывается системой (1.2) при $M_1=M_2=M_3=0$. Первые три уравнения этой системы имеют вид $\dot L=0$, $\dot\rho=0$, $\dot\sigma=0$ и означают, что собственный кинетический момент спутника сохраняет свой модуль и направление в абсолютном пространстве. Остальные уравнения системы невозмущенного движения

$$\dot{\psi} = L\left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right) \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= L\cos\vartheta\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2\varphi}{A} - \frac{\cos^2\varphi}{B}\right) \\ \dot{\vartheta} &= L\sin\vartheta\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

в которых L – параметр, описывают движение твердого тела в случае Эйлера – Пуансо. Уравнения (2.2) не содержат ψ и образуют замкнутую систему. После того, как решение такой системы найдено, ψ определяется квадратурой из (2.1).

Интегрирование системы (2.2) проведем полагая $B > C > A$. Эти неравенства далее всюду считаются выполненными. В этом случае $\mu > 0$ и переменная z принимает только неотрицательные значения. Система (2.2) допускает первый интеграл $z = \text{const}$, позволяющий свести ее интегрирование к квадратуре. При

$$z < \mu \tag{2.3}$$

когда полодии охватывают ось Ox_2 (случай $z > \mu$ будет рассмотрен ниже) делается замена переменных $(\vartheta, \varphi) \to (z, \alpha)$:

$$\sin\vartheta\sin\varphi = -\sqrt{z}\cos\alpha, \quad \cos\vartheta = \sqrt{\frac{z}{\mu}}\sin\alpha$$

приводящая уравнения (2.2) к виду

$$\dot{z} = 0, \quad \dot{\alpha} = \Omega_1\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}$$

$$\Omega_1 = \frac{L}{B}\sqrt{\frac{(B-C)(B-A)(1-z)}{AC}}, \quad k^2 = \frac{z(1-\mu)}{\mu(1-z)}$$

Здесь вследствие (2.3) и неравенств для моментов инерции спутника $0 \leqslant k^2 < 1$. Решение уравнения относительно α сводится к обращению неполного эллиптического интеграла первого рода и дает соотношения

$$\sin\vartheta\sin\varphi = -\sqrt{z}\,\mathrm{cn}\,\tau, \quad \cos\vartheta = \sqrt{z/\mu}\,\mathrm{sn}\,\tau \tag{2.4}$$

где $\mathrm{sn}\,\tau$ и $\mathrm{cn}\,\tau$ – эллиптические функции Якоби с модулем k, $\tau = \Omega_1(t + t_0)$, t_0 – произвольная постоянная. Решение (2.4) – периодическое с периодом $T_1 = 4K(k)/\Omega_1$, $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Подставляя (2.4) в уравнение (2.1) и интегрируя его, получаем

$$\psi = \Omega_\psi(t + t_0) + \psi_1(t + t_0) + \text{const} \tag{2.5}$$

$$\Omega_\psi = \frac{L}{B}[1 + O(z)], \quad \psi_1\left(t + \frac{T_1}{2}\right) = \psi_1(t), \quad \psi_1(t) = O(z)$$

При $z = 0$ соотношения (2.4), (2.5) принимают вид $\sin\vartheta\sin\varphi = 0$, $\cos\vartheta = 0$, $\psi = Lt/B + \text{const}$ и описывают стационарное вращение спутника вокруг оси Ox_2.

Результат усреднения произвольной функции $f(\psi, \vartheta, \varphi)$ по движению Эйлера – Пуансо будем обозначать $\langle f\rangle_e$. В случае, когда частоты $2\pi/T_1$ и Ω_ψ рационально несоизмеримы, такое усреднение сводится к вычислению двойного интеграла [2]:

$$\langle f\rangle_e=\frac{1}{2\pi T_1}\int\limits_0^{2\pi}d\psi\int\limits_0^{T_1}f[\psi,\vartheta(t),\varphi(t)]dt$$

Далее будет рассматриваться только этот случай.

Усредняемая функция кроме углов ψ, ϑ и φ может зависеть также от других переменных, например, от ν, L и т.д. Если эти переменные изменяются со временем существенно медленнее углов ψ, ϑ и φ, то при усреднении по движению Эйлера – Пуансо они должны считаться неизменными.

Эволюционные уравнения для переменных L, ρ, σ, z имеют вид [2]:

$$\dot L=\left\langle M_3\right\rangle_e,\quad L\dot\rho=\left\langle M_1\right\rangle_e,\quad L\dot\sigma\sin\rho=\left\langle M_2\right\rangle_e,\quad \dot z=\langle F\rangle_e \tag{2.6}$$

Правые части этих уравнений линейно зависят от приложенных к спутнику внешних моментов, поэтому можно по отдельности вычислить слагаемые правых частей, отвечающие моментам $\mathbf{M}_g$, $\mathbf{M}_{a\,1}$ и $\mathbf{M}_{a\,2}$.

Усреднение слагаемых, отвечающих гравитационному моменту, было проведено в [2] и приводит к формулам

$$\left\langle\mathbf{M}_g\right\rangle_e=N_1\sin\rho\cos(\nu-\sigma)\ \ (-\sin(\nu-\sigma),\cos\rho\cos(\nu-\sigma),0)$$

$$\left\langle F_g\right\rangle_e=0,\quad N_1=\frac{3\mu_E N(1+e\cos\nu)^3}{2a^3(1-e^2)^3}$$

$$N=A+C-2B+\frac{3z(B-A)}{A}\left[A+(C-A)\frac{K(k)-E(k)}{k^2K(k)}\right]$$

где μ_E – гравитационный параметр Земли, $E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода.

Пусть $\mathbf{e}_v=(\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3)$. Тогда результаты усреднения слагаемых $\mathbf{M}_{a\,1}$, $\mathbf{M}_{a\,2}$ аэродинамического момента и величин $F_{a\,1}$, $F_{a\,2}$ записываются в виде

$$\begin{gathered}\left\langle\mathbf{M}_{a1}\right\rangle_e=q(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2)D_2J_3(-\delta_2,\delta_1,0),\quad \left\langle F_{a1}\right\rangle_e=0\\
\left\langle\mathbf{M}_{a2}\right\rangle_e=(\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3),\quad \left\langle F_{a2}\right\rangle_e=2q\delta_3^3U_4/L\\
\Lambda_1=-q\left[\delta_3^2(\delta_1U_2-\delta_2U_1)+\delta_2\left(\delta_1^2+\delta_2^2\right)U_3\right]\\
\Lambda_2=-q\left[\delta_3^2(\delta_1U_1+\delta_2U_2)-\delta_1\left(\delta_1^2+\delta_2^2\right)U_3\right],\quad \Lambda_3=q\delta_3\left(\delta_1^2+\delta_2^2\right)U_2\\
U_1=2(2q_1+q_6-q_7)J_1+2(2q_4+q_8-q_7)J_2+(q_1+q_4-q_7)J_3\\
U_2=(q_2-q_3)F_1+(q_5-q_3)F_2\\
U_3=\tfrac12(2q_1+q_6-q_7)J_1+\tfrac12(2q_4+q_8-q_7)J_2+\tfrac12(q_6+q_8)J_3\\
U_4=(q_2-q_3)F_3+(q_5-q_3)F_4\\
q_1=D_1(\varepsilon_1a_{12}a_{22}+\varepsilon_2a_{13}a_{23}),\quad q_2=D_1(\varepsilon_1a_{22}a_{32}+\varepsilon_2a_{23}a_{33})\\
q_3=D_3(\varepsilon_1a_{12}a_{22}+\varepsilon_2a_{13}a_{23}),\quad q_4=D_3(\varepsilon_1a_{22}a_{32}+\varepsilon_2a_{23}a_{33})\\
q_5=D_2(\varepsilon_1a_{12}a_{32}+\varepsilon_2a_{13}a_{33}),\quad q_6=D_2\left(\varepsilon_1a_{12}^2+\varepsilon_2a_{13}^2\right)\\
q_7=D_2\left(\varepsilon_1a_{22}^2+\varepsilon_2a_{23}^2\right),\quad q_8=D_2\left(\varepsilon_1a_{32}^2+\varepsilon_2a_{33}^2\right)\end{gathered}\tag{2.7}$$

$$J_1 = -\frac{\pi z\sqrt{1-z}}{4K(k)}, \quad J_2 = -\frac{\pi z}{4\mu K(k)}, \quad J_3 = \frac{\pi\sqrt{1-z}}{2K(k)}$$

$$F_1 = \frac{z(1-I)}{k^2\mu} - (1-z)I, \quad F_2 = \frac{z(k^2+I-1)}{k^2} - \frac{z(1-I)}{\mu k^2}$$

$$F_3 = \frac{2(1-z)}{3(1-\mu)}[\mu - z + (2z - \mu - z\mu)I]$$

$$F_4 = \frac{2(1-z)}{3(1-\mu)}[2(z-\mu) + (2\mu - z - z\mu)I], \quad I = \frac{E(k)}{K(k)}$$

Здесь q_i – параметры, J_i, F_i – функции медленной переменной z.

При изучении эволюции вращательного движения спутника на интервалах времени, существенно превышающих орбитальный период, дополнительно к усреднению правых частей уравнений для $\dot{L}$, $\dot{\rho}$, $\dot{\sigma}$, $\dot{z}$ по движению Эйлера – Пуансо целесообразно усреднить эти правые части и по орбитальному движению. В исследуемом случае зависимость от орбитального движения представляется с помощью формул задачи двух тел в виде зависимости от истинной аномалии центра масс спутника. Для произвольной функции $f(\nu)$ ее среднее значение $\langle f\rangle_o$ по орбитальному движению выражается интегралом

$$\langle f\rangle_o = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\nu)}{(1+e\cos\nu)^2}d\nu$$

Двойное усреднение по движениям Эйлера – Пуансо и орбитальному кеплерову будем обозначать символом $\langle\cdot\rangle$.

Выражения для $\langle \mathbf{M}_g\rangle$ и $\langle F_g\rangle$ получены в [2]:

$$\left\langle \mathbf{M}_g\right\rangle = m_g(0, \sin\rho\cos\rho, 0), \quad \left\langle F_g\right\rangle = 0, \quad m_g = \frac{3\mu_E N}{4a^3(1-e^2)^{3/2}}$$

При усреднении по орбитальному движению членов уравнений (2.6), обусловленных аэродинамическим моментом, введем дополнительные упрощающие предположения. Орбиту спутника будем считать близкой к круговой и во всех соотношениях кроме соотношений, задающих изменение плотности атмосферы вдоль орбиты, положим $e = 0$. В частности, будем считать $v = \sqrt{\mu_E / a}$, $\delta_1 = \cos\rho\,\sin(\sigma-\nu)$, $\delta_2 = \cos(\sigma-\nu)$, $\delta_3 = \sin\rho\,\sin(\sigma-\nu)$. Зависимость плотности набегающего на спутник аэродинамического потока от истинной аномалии выразим формулой

$$\rho_a = \rho_\pi \exp[\eta(1-\cos\nu)], \quad \eta = \tfrac{1}{2}\ln\frac{\rho_\alpha}{\rho_\pi}$$

где ρ_α и ρ_π – значения плотности атмосферы в апогее и перигее соответственно. Для эксцентриситетов $e < 0{,}01$ такие упрощения вполне оправданны. Усреднение по орбитальному движению членов, содержащих ρ_a, приводит к появлению коэффициентов

$$I_n = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\exp[\eta(1-\cos\nu)]\cos n\nu\, d\nu \quad (n = 1, 3)$$

Имеем

$$\left\langle \mathbf{M}_{a1}\right\rangle = m_a(-\cos\sigma, \sin\sigma\cos\rho, 0), \quad \left\langle F_{a1}\right\rangle = 0$$

$$m_a = 4I_1\rho_\pi\frac{\mu_E}{a}\pi b_1^2(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2)D_2J_3$$

Явные формулы для $\langle \mathbf{M}_{a2} \rangle$ и $\langle F_{a2} \rangle$ выписывать не будем ввиду их громоздкости. Укажем только, что для вывода этих формул из (2.7) следует воспользоваться выражениями

$$\left\langle \rho_a \delta_1^3 \right\rangle_o = \rho_\pi (3I_1 \sin\sigma - I_3 \sin 3\sigma)\cos^3\rho$$

$$\left\langle \rho_a \delta_2^3 \right\rangle_o = \rho_\pi (3I_1 \cos\sigma + I_3 \cos 3\sigma)$$

$$\left\langle \rho_a \delta_3^3 \right\rangle_o = \rho_\pi (3I_1 \sin\sigma - I_3 \sin 3\sigma)\sin^3\rho$$

$$\left\langle \rho_a \delta_1 \delta_2^2 \right\rangle_o = \rho_\pi (I_1 \sin\sigma + I_3 \sin 3\sigma)\cos\rho$$

$$\left\langle \rho_a \delta_1^2 \delta_2 \right\rangle_o = \rho_\pi (I_1 \cos\sigma - I_3 \cos 3\sigma)\cos^2\rho$$

$$\left\langle \rho_a \delta_1 \delta_3^2 \right\rangle_o = \rho_\pi (3I_1 \sin\sigma - I_3 \sin 3\sigma)\sin^2\rho\cos\rho$$

$$\left\langle \rho_a \delta_1^2 \delta_3 \right\rangle_o = \rho_\pi (3I_1 \sin\sigma - I_3 \sin 3\sigma)\sin\rho\cos^2\rho$$

$$\left\langle \rho_a \delta_2 \delta_3^2 \right\rangle_o = \rho_\pi (I_1 \cos\sigma - I_3 \cos 3\sigma)\sin^2\rho$$

$$\left\langle \rho_a \delta_2^2 \delta_3 \right\rangle_o = \rho_\pi (I_1 \sin\sigma + I_3 \sin 3\sigma)\sin\rho$$

которые устанавливаются непосредственным вычислением.

3. Исследование эволюционных уравнений. Аэродинамический момент $\mathbf{M}_{a1}$ – это момент, который действует на спутник в форме сферы радиуса $b_1(1 - \varepsilon_1/2 - \varepsilon_2/2)$. Момент $\mathbf{M}_{a2}$ по отношению к $\mathbf{M}_{a1}$ имеет порядок $O(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|)$. Будем рассматривать $\mathbf{M}_{a2}$ как малое возмущение. Запишем эволюционные уравнения для L, ρ, σ, z, учитывая явный вид $\langle \mathbf{M}_g \rangle$ и $\langle \mathbf{M}_{a1} \rangle$:

$$\dot{L} = \left\langle \Lambda_3 \right\rangle_o, \quad \dot{z} = \left\langle F_{a2} \right\rangle, \quad L\dot{\rho} = -m_a \cos\sigma + \left\langle \Lambda_1 \right\rangle_o$$

$$L\dot{\sigma}\sin\rho = m_a \sin\sigma\cos\rho + m_g \sin\rho\cos\rho + \left\langle \Lambda_2 \right\rangle_o$$

Напомним, что m_a и m_g являются функциями z. Если пренебречь влиянием момента $\mathbf{M}_{a2}$, т.е. считать внешнюю оболочку спутника сферой, то эти уравнения перейдут в уравнения:

$$\dot{L} = 0, \quad \dot{z} = 0, \quad L\dot{\rho} = -m_a \cos\sigma \tag{3.1}$$

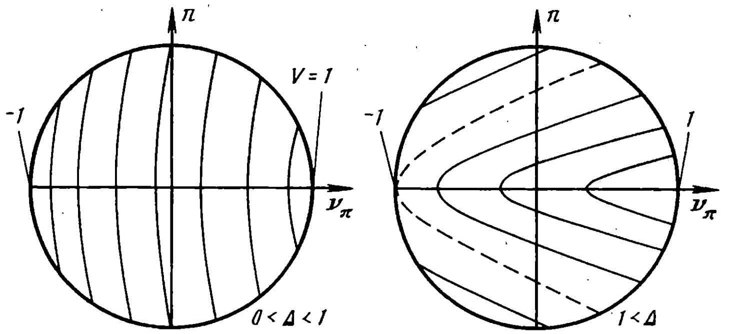
$$L\dot{\sigma}\sin\rho = m_a \sin\sigma\cos\rho + m_g \sin\rho\cos\rho$$

Здесь уже L, z, m_a и m_g можно считать постоянными параметрами. Аналогичные по виду уравнения для динамически симметричного спутника с осесимметричной внешней оболочкой получены и исследованы в [1]. В этой работе усреднение исходных уравнений движения проводилось по регулярной прецессии Эйлера, т.е. рассматривалась более простая задача. Но, как и в случае учета одного лишь гравитационного момента [2], переход к трехосному спутнику и усреднению по движению Эйлера – Пуансо не изменил вида эволюционных уравнений и привел только к изменению выражений, определяющих их коэффициенты.

Уравнения (3.1) играют в последующем анализе роль невозмущенной системы. Они имеют первый интеграл

$$V \equiv \sin\rho\sin\sigma - \frac{\Delta}{2}\cos^2\rho = \cos\theta - \frac{\Delta}{2}\cos^2\rho = \text{const} \tag{3.2}$$

где $\Delta = m_g/m_a$, $\Delta = \Delta(z)$ – параметр, характеризующий отношение гравитационного и



Фиг. 1

аэродинамического моментов. Линии уровня интеграла (3.2) удобно рассматривать на поверхности единичной сферы в системе координат $Oy_1y_2y_3$ и интерпретировать как след вектора $\mathbf{L}$ [1]. Эти линии замкнуты, их проекции на плоскость Oy_1y_2 представляют собой параболы $2V = 2y_1 - \Delta y_2^2$ (фиг. 1).

При $|\Delta| > 1$ существуют два семейства парабол, разделенных сепаратрисой $2y_1 = \Delta y_2^2 - 2$. Эти семейства отвечают вращениям вектора $\mathbf{L}$ вокруг разных прямых. В предельных случаях $\Delta = 0$ и $\Delta = \infty$ эти прямые совпадают с осями Oy_1 и Oy_2 соответственно, линии уровня первого интеграла (3.2) представляют собой окружности, вектор $\mathbf{L}$ совершает прецессию вокруг оси Oy_1 или Oy_2.

Невозмущенная система (3.1) имеет три первых интеграла: L = const, z = const и V = const. При учете возмущающего момента $\mathbf{M}_{a2}$ переменные L, z и V будут незначительно изменяться. В случае низколетящего спутника период обхода вектором $\mathbf{L}$ какой-либо траектории, определяемой уравнением (3.2), составляет обычно несколько суток [1, 3]. При изучении эволюции вращательного движения спутника на интервалах времени, существенно превышающих это значение, целесообразно усреднить вдоль этой траектории правые части уравнений для L, z и V, записанных с учетом момента $\langle \mathbf{M}_{a2} \rangle$.

Дифференциальные уравнения для L и z были выписаны выше, дифференциальное уравнение для V имеет вид

$$L\dot{V} = \langle \Lambda_1 \rangle_o (\sin\sigma + \Delta\sin\rho)\cos\rho + \langle \Lambda_2 \rangle_o \cos\sigma - \frac{L}{2}\frac{d\Delta}{dz}\langle F_{a2} \rangle \cos^2\rho \qquad (3.3)$$

Будем считать, что $|\Delta| < 1$. Тогда при обходе вектором $\mathbf{L}$ кривой (3.2) угол λ (см. п. 1) меняется от 0 до 2π, поэтому для усреднения по движению вдоль такой траектории удобно сделать замену переменных $(\rho, \sigma) \to (\theta, \lambda)$. С этой целью воспользуемся соотношениями (1.1). В результате сделанных преобразований третье и четвертое уравнения в системе (3.1) переходят в уравнения

$$L\dot{\theta} = -m_g \sin\lambda\cos\lambda\sin\theta, \quad L\dot{\lambda} = -m_a - m_g\cos^2\lambda\cos\theta \qquad (3.4)$$

Выписанные уравнения допускают первый интеграл

$$V \equiv \cos\theta - \tfrac{1}{2}\Delta\sin^2\theta\cos^2\lambda = \text{const} \qquad (3.5)$$

соответствующий (3.2). Используя этот интеграл, можно понизить порядок системы (3.4) и свести ее к уравнению

$$L\dot{\lambda} = -m_a\sqrt{1 + 2V\Delta\cos^2\lambda + \Delta^2\cos^4\lambda}$$

Решения этого уравнения удовлетворяют соотношению $\lambda(t+T) \equiv \lambda(t) - 2\pi$, где

$$T = \frac{L}{m_a}\int_0^{2\pi}\frac{d\lambda}{\sqrt{1+2V\Delta\cos^2\lambda+\Delta^2\cos^4\lambda}}$$

Среднее значение произвольной функции $f(\lambda, \theta)$ вдоль решений системы (3.4) выражается интегралом

$$\frac{L}{m_a T}\int_0^{2\pi}\frac{f[\lambda,\theta(\lambda)]d\lambda}{\sqrt{1+2V\Delta\cos^2\lambda+\Delta^2\cos^4\lambda}} \tag{3.6}$$

Здесь функция $\theta(\lambda)$ определена соотношением (3.5).

Для низколетящих спутников, как правило, $|\Delta|$ мало [1, 3]. При $|\Delta| < 1$ каждая из парабол $2V = 2y_1 - \Delta y_2^2$ на плоскости Oy_1y_2 заключена между двумя вертикальными прямыми, отстоящими друг от друга не более, чем на $|\Delta|/2$. Заменим параболу, соответствующую значению интеграла (3.2) $V = V_0$, вертикальным отрезком $y_1 = V_0$. Этот отрезок соответствует окружности на поверхности единичной сферы. Относительная ошибка в вычислении интеграла (3.5) при такой замене будет порядка Δ, а сама замена означает, что значение Δ принимается равным нулю. Поскольку $d\Delta/dz \sim \Delta$, в рассматриваемой ситуации в правой части (3.3) можно отбросить последнее слагаемое. В результате указанных упрощений уравнение (3.3) и система (3.4) примут вид:

$$L\dot{V} = \beta_{11}\langle\Lambda_1\rangle_o + \beta_{12}\langle\Lambda_2\rangle_o \tag{3.7}$$

$$\dot{\theta} = 0, \quad L\dot{\lambda} = -m_a \tag{3.8}$$

Усреднение вдоль решений системы (3.8) произвольной функции $f(\lambda, \theta)$ сводится к вычислению интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\lambda,\theta)d\lambda$$

при неизменном θ. Усреднение таким способом правых частей эволюционных уравнений для $\dot{V}$, $\dot{L}$ и $\dot{z}$ приводит к системе

$$\begin{gathered} L\dot{V} = -\Gamma U_2\left(p+V^2\right)\left(1-V^2\right) \\ \dot{L} = \Gamma U_2\left(1+2p-V^2\right)V, \quad L\dot{z} = 2\Gamma U_4\left(3p+V^2\right)V \\ \Gamma = \frac{\mu_E\rho_\pi\pi b_1^2}{2a}\left(3I_1+5I_3\right), \quad p = \frac{I_1-I_3}{3I_1+5I_3} \end{gathered} \tag{3.9}$$

Входящие в эти уравнения функции $U_2(z)$ и $U_4(z)$ линейно зависят от параметров $q_2 - q_3$ и $q_5 - q_3$, которые определяются формой внешней оболочки спутника и ее положением относительно главных центральных осей инерции. При $q_2 = q_3 = q_5$ справедливы тождества $U_2 \equiv U_4 \equiv 0$, и правые части уравнений (3.9) обращаются в нуль. В частности, это имеет место, если главные оси эллипсоида инерции и эллипсоида-оболочки параллельны. В случае $q_2 = q_3 = q_5$ несферичность оболочки не влияет на эволюцию переменных L, V и z, поэтому такой случай рассматриваться не будет. Ниже полагаем $q_2 \neq q_3$, $q_3 \neq q_5$.

Поделив второе уравнение системы (3.9) на первое уравнение, получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно V и L с разделяющимися переменными. Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$W \equiv L\sqrt{p+V^2}\left(\frac{p+V^2}{1-V^2}\right)^{\frac{p}{p+1}} = \text{const} \tag{3.10}$$

Из соотношения (3.10) следует, что модуль кинетического момента L монотонно убывает до нуля с увеличением $|V|$ от 0 до 1. С помощью (3.10) исключим L из первого и третьего уравнений (3.9). Получим

$$\dot{V} = -\Gamma_1 G_V(V,z,p,\mu,w), \quad \dot{z} = \Gamma_1 G_z(V,z,p,\mu,w) \tag{3.11}$$

$$G_V = (p+V^2)^{\frac{5p+3}{2(p+1)}}(1-V^2)^{\frac{1}{p+1}}(wF_1+F_2)$$

$$G_z = 2V(p+V^2)^{\frac{3p+1}{2(p+1)}}(1-V^2)^{-\frac{p}{p+1}}(3p+V^2)(wF_3+F_4)$$

$$\Gamma_1 = \frac{\Gamma(q_5-q_3)}{W}, \quad w = \frac{q_2-q_3}{q_5-q_3}$$

Здесь Γ_1, p, μ и w – параметры, причем Γ_1 имеет размерность c^{-1} и определяет только масштаб времени (Γ_1 можно исключить из (3.11) заменой $\tau = \Gamma_1 t$). Параметры p, μ и w - безразмерные: $p \in (0, {}^1/_3)$ характеризует распределение плотности атмосферы вдоль орбиты, $\mu \in [0, 1]$ зависит от моментов инерции спутника, $w \in (-\infty, +\infty)$ определяется формой внешней оболочки спутника и ее положением относительно главных центральных осей инерции. Система (3.11) сводится к уравнению первого порядка, допускающему разделение переменных, и является интегрируемой, но ее интеграл не выражается через элементарные функции.

Система (3.11) получена для $z < \mu$. Чтобы записать аналогичную систему в случае $z > \mu$, в правых частях уравнений (3.11) следует заменить Γ_1, w, μ и z на $\Gamma_1 w$, w^{-1}, $1-\mu$ и $1-z$ соответственно и изменить знак правой части первого уравнения. В результате указанных преобразований получается система

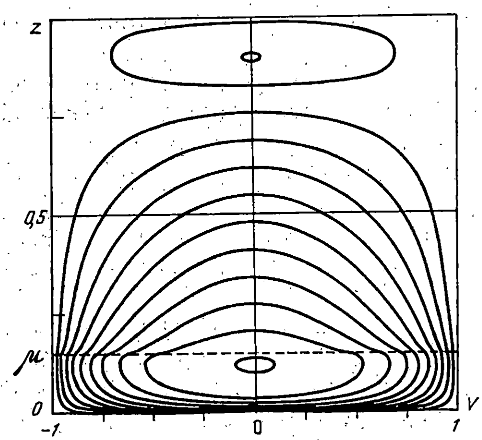
$$\dot{V} = \Gamma_1 w G_V(V,1-z,p,1-\mu,w^{-1}) \tag{3.12}$$

$$\dot{z} = \Gamma_1 w G_z(V,1-z,p,1-\mu,w^{-1})$$

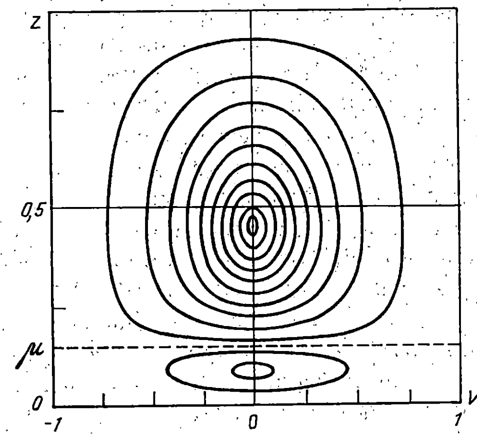
Вид интеграла (3.10) в результате преобразований сохраняется.

Опишем фазовые портреты систем (3.11) и (3.12) в плоскости (V, z). Существует всего четыре типа таких портретов. Фазовый портрет типа 1 имеет место при $w < 0$ (фиг. 2–4), фазовый портрет типа 2 – при $0 < w < 1$ (фиг. 5), фазовый портрет типа 3 – при $1 < w < w_*$ (фиг. 6) и фазовый портрет типа 4 – при $w > w_*$ (фиг. 7). Здесь величина w_* в случае $\mu < 1/2$ и $z > \mu$ является экстремальным значением функции $-F_1/F_2$, а в случае $\mu > 1/2$ и $z < \mu$ – экстремальным значением функции $-F_2/F_1$. Фиг. 2–7 построены при $\mu = 0{,}15$; $p = 0{,}25$ и $w = -100; -1; -0{,}2; 0{,}5; 2; 3$ соответственно. Все траектории, пересекающие прямую $z = \mu$, имеют в точке пересечения горизонтальную касательную, так как при $z = \mu$ производная $\dot{z}$ обращается в нуль. Такое поведение траекторий объясняется тем, что прямая $z = \mu$ соответствует сепаратрисе движения Эйлера – Пуансо.

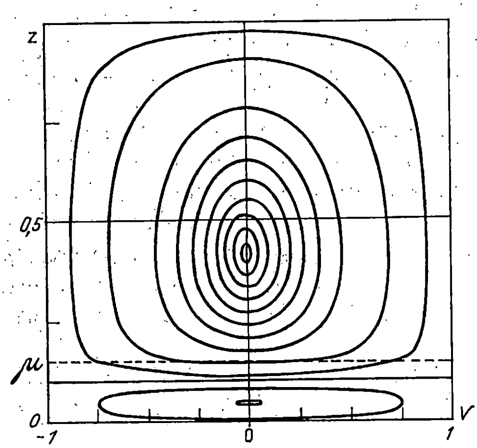
Опишем фазовые портреты при $\mu < 1/2$. Фазовый портрет типа 1 характеризуется двумя стационарными решениями типа центр, лежащими на оси z по разные стороны от точки $z = \mu$. Между замкнутыми фазовыми кривыми, охватывающими эти центры, проходит сепаратриса – прямая $z = z_*$, которая соединяет две особые точки $z = z_*$, $V = \pm 1$. В окрестности указанных точек $\sup |\dot{z}| = +\infty$. При $w < -1$ сепаратриса проходит выше прямой $z = \mu$, при $w = -1$ совпадает с этой прямой, при $w > -1$ проходит ниже нее.



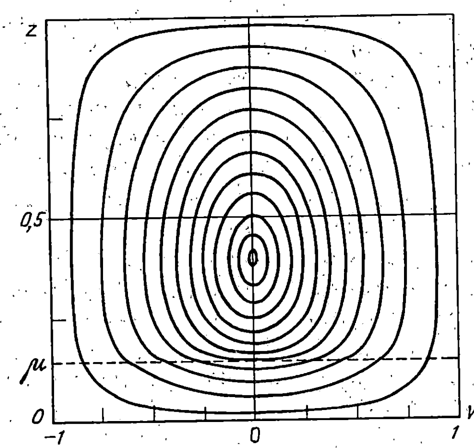
Фиг. 2



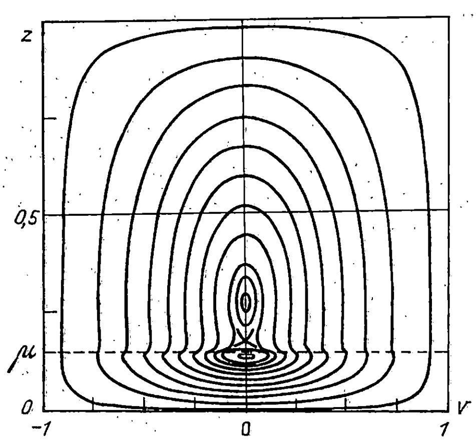
Фиг. 3



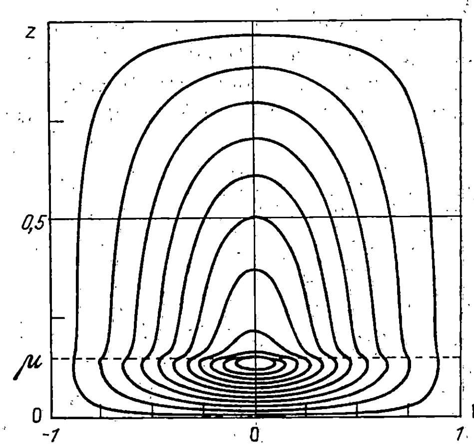
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Фазовый портрет типа 2 характеризуется единственной стационарной точкой типа центр, лежащей на оси z выше точки $z = \mu$.

Фазовый портрет типа 3 характеризуется двумя стационарными точками типа центр, лежащими на оси z по разные стороны от точки $z = \mu$ и одной стационарной точкой типа седло, лежащей на оси z между этими центрами выше точки $z = \mu$.

Фазовый портрет типа 4 характеризуется единственной стационарной точкой типа центр, лежащей на оси z ниже точки $z = \mu$.

При $\mu > 1/2$ фазовый портрет каждой системы получается зеркальным отображением относительно прямой $z = 1/2$ фазового портрета той же системы с параметрами $\mu_1 = 1 - \mu$ ($\mu_1 < 1/2$) и $w_1 = 1/w$.

Фазовые кривые, проходящие достаточно близко от каждой стационарной точки типа центр, не пересекают прямой $z = \mu$, соответствующей сепаратрисе задачи Эйлера – Пуансо. Такие кривые описывают вращения спутника, происходящие только вокруг одной из осей Ox_1 или Ox_2. Фазовые кривые, пересекающие прямую $z = \mu$, описывают движения, в которых спутник на некоторых интервалах времени вращается вокруг одной из этих осей, а на некоторых интервалах – вокруг другой.

Вдоль решений систем (3.11), (3.12) модуль L вектора кинетического момента максимален при $V = 0$, т.е. в случае, когда $\mathbf{L}$ лежит в плоскости Oy_2y_3, и уменьшается вместе с уменьшением угла между $\mathbf{L}$ и прямой $y_2 = y_3 = 0$ (при $V \to \pm 1$).

При учете эволюции орбиты добавочный член в уравнении (3.7), описывающий эту эволюцию, при усреднении по λ обращается в нуль. Для законности такого усреднения необходимо лишь, чтобы эволюция орбиты происходила существенно медленнее изменения λ. На виде уравнения для L и z эволюция орбиты вообще не сказывается. Таким образом, в системах (3.11) и (3.12) эта эволюция проявляется лишь в медленном изменении параметров Γ_1 и p. Параметр Γ_1 не влияет на форму фазовых траекторий – от него зависит только скорость движения по этим траекториям, влияние параметра p сказывается слабо, в частности, стационарные решения систем (3.11) и (3.12) от него не зависят. Таким образом, учет эволюции орбиты не изменит существенно вида траекторий этих систем.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 95-01-00259, 96-01-01125).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. *Черноусько Ф.Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 474–483.
3. *Белецкий В.В., Яншин А.М.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наук. думка, 1984. 187 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.06.1988