

УДК 531.383:539.3

© 2000 г. О.Г. БАРКИН, В.В. ПОДАЛКОВ

О ВЫБОРЕ ФОРМЫ РОТОРА НЕКОНТАКТНОГО ПОДВЕСА В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ГИРОСКОПЕ

При создании бескарданных систем ориентации на электростатических гироскопах предъявляются повышенные требования к точности изготовления внешней поверхности ротора, так как отклонение формы ротора от сферической под действием центробежных сил вращения приводит к изменению его положения относительно электродов подвеса, и в результате снижается точность всей системы. Наибольшие по значению смещающие моменты возникают из-за наличия в форме ротора второй и особенно четвертой гармоник Лежандра [1]. Поэтому представляется важной разработка методов изготовления ротора, внешняя поверхность которого в режиме вращения имеет минимальные отклонения от сферической формы. Одним из способов решения этой проблемы является предварительная асферизация ротора в камере с повышенным давлением. Этот метод заключается в следующем. Внутри ротора имеется вытянутая вдоль оси вращения полость (такая форма необходима для придания ротору устойчивых инерционных свойств), поэтому его жесткость вдоль оси симметрии минимальна, и под действием внешнего гидростатического давления в камере ротор деформируется в сплюснутый сфероид. Сохраняя давление, специальной обработкой его внешнюю поверхность вновь делают сферической. После этого при нормальном давлении ротор будет представлять собой вытянутый сфероид, а в режиме вращения при некотором значении угловой скорости уже под действием центробежных сил поверхность вновь вернется к форме, мало отличающейся от сферической.

Цель данной работы состоит в определении параметров внутренней полости и значения давления требуемых для асферизации ротора. Эти параметры выбираются такими, чтобы деформации внешней поверхности ротора под действием давления и при вращении с заданной угловой скоростью были одинаковы. При этом основное внимание уделяется исключению из поверхности ротора второй и четвертой гармоник Лежандра.

В [2] на основе уравнений безмоментной теории оболочек показано, что при проведении асферизации по изложенной выше схеме можно избавиться от второй гармоники Лежандра, но при этом возникает четвертая гармоника, амплитудные значения которой малы по сравнению со второй. Обработка поверхности ротора осуществляется на уровне десятых и даже сотых долей микрометров [3, 4], что предъявляет повышенные требования к точности результатов. Пределы применимости уравнений теории оболочек не позволяют получить достоверные значения амплитуд четвертой гармоники, поэтому в данной работе задача решается при помощи уравнений пространственной теории упругости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим ротор, внешняя поверхность которого представляет собой сферу радиуса R_2 , а внутренняя – поверхность вращения, симметричную относительно экваториальной плоскости (фиг. 1). Материал ротора сплошной однородный изотропный и линейно-упругий.

Введем сферическую систему координат: r , α ($0 < \alpha < \pi$), β ($0 < \beta < 2\pi$). Уравнение

внутренней поверхности ротора представим в виде

$$r(\alpha) = R_1[1 + \varepsilon f(\alpha)] \quad (1.1)$$

где ε – малый параметр, R_1 – "средний" радиус полости.

В общем случае, когда ротор вращается с угловой скоростью ω и на его внешнюю поверхность действует равномерно распределенное давление p , уравнения пространственной теории упругости и соответствующие им граничные условия имеют вид

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{G} \mathbf{grad} \Pi,$$

$$\Pi = -\frac{\rho \omega^2}{3} r^2 [1 - P_2(\cos \alpha)]$$

$$(\sigma_{rr} n_r + \sigma_{r\alpha} n_\alpha) |_{S_1} = (\sigma_{r\alpha} n_r + \sigma_{\alpha\alpha} n_\alpha) |_{S_1} = 0$$

(1.2)

$$\sigma_{rr} |_{r=R_2} = -p, \quad \sigma_{r\alpha} |_{r=R_2} = 0$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_r, u_\alpha)$ – вектор перемещений точек тела при деформировании; σ_{rr} , $\sigma_{r\alpha}$, $\sigma_{\alpha\alpha}$ – компоненты тензора напряжений; Δ – оператор Лапласа; Π – потенциал центробежных сил; $P_n(\cos \alpha)$ – функция Лежандра степени n ; ρ , ν , G – плотность, коэффициент Пуассона и модуль упругости второго рода материала ротора; S_1 – внутренняя поверхность ротора; $\mathbf{n} = (n_r, n_\alpha)$ – вектор нормали к поверхности S_1 .

Полагая в этой задаче $p = 0$, получим деформацию ротора под действием инерционных сил вращения, а при $\omega = 0$ эти уравнения описывают деформацию неподвижного ротора под действием гидростатического давления.

С точностью до величин порядка ε^2 можно представить $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r - \varepsilon(df/d\alpha)\mathbf{e}_\alpha$, где \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_α – единичные орты, соответствующие направлениям r и α . Тогда $n_r = 1$, $n_\alpha = -\varepsilon df/d\alpha$, и условия на поверхности S_1 принимают вид

$$\left(\sigma_{rr} - \varepsilon \frac{df}{d\alpha} \sigma_{r\alpha} \right) \Big|_{S_1} = \left(\sigma_{r\alpha} - \varepsilon \frac{df}{d\alpha} \sigma_{\alpha\alpha} \right) \Big|_{S_1} = 0 \quad (1.3)$$

Используя малость параметра ε , по методу, изложенному в [5], эти граничные условия можно снести на поверхность, $r = R_1$. Для этого в ее окрестности разложим напряжения в ряд Тейлора

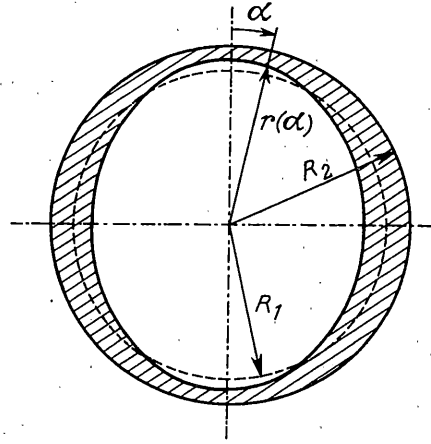
$$\sigma_{ij} |_{S_1} \cong \sigma_{ij} |_{r=R_1} + \varepsilon R_1 f(\alpha) \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r} \Big|_{r=R_1}$$

С точностью до ε^2 получим

$$\left[\sigma_{rr} + \varepsilon \left(r f(\alpha) \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{df}{d\alpha} \sigma_{r\alpha} \right) \right] \Big|_{r=R_1} = 0$$

(1.4)

$$\left[\sigma_{r\alpha} + \varepsilon \left(r f(\alpha) \frac{\partial \sigma_{r\alpha}}{\partial r} - \frac{df}{d\alpha} \sigma_{\alpha\alpha} \right) \right] \Big|_{r=R_1} = 0$$



Фиг. 1

Решение задачи будем искать в виде ряда по малому параметру ε :

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}, \quad \sigma_{ij} \equiv \sigma_{ij}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{ij}^{(1)} \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в граничные условия (1.4), уравнения (1.2) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , приходим к следующей последовательности краевых задач:

задача нулевого приближения

$$\Delta \mathbf{u}^{(0)} + \frac{1}{1-2\nu} \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} = \frac{1}{G} \mathbf{grad} \Pi \quad (1.6)$$

$$\sigma_{rr}^{(0)}|_{r=R_1} = \sigma_{r\alpha}^{(0)}|_{r=R_1} = 0, \quad \sigma_{rr}^{(0)}|_{r=R_2} = -p, \quad \sigma_{r\alpha}^{(0)}|_{r=R_2} = 0 \quad (1.7)$$

задача первого приближения

$$\Delta \mathbf{u}^{(1)} + \frac{1}{1-2\nu} \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}^{(1)} = 0 \quad (1.8)$$

$$\left[\sigma_{rr}^{(1)} + r f(\alpha) \frac{\partial \sigma_{rr}^{(0)}}{\partial r} - \frac{df}{d\alpha} \sigma_{r\alpha}^{(0)} \right] \Big|_{r=R_1} = 0 \quad (1.9)$$

$$\left[\sigma_{r\alpha}^{(1)} + r f(\alpha) \frac{\partial \sigma_{r\alpha}^{(0)}}{\partial r} - \frac{df}{d\alpha} \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} \right] \Big|_{r=R_1} = 0$$

$$\sigma_{rr}^{(1)}|_{r=R_2} = \sigma_{r\alpha}^{(1)}|_{r=R_2} = 0$$

2. Деформация ротора при вращении. Пусть $p = 0$ и ротор вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω . Используя результаты, полученные в [6], найдем решение задачи нулевого приближения (1.6), (1.7):

$$u_r^{(0)} = 2(2\nu-1)A_0^{(0)}r - \frac{D_0^{(0)}}{r^2} - \frac{\rho\omega^2(1-2\nu)}{30G(1-\nu)}r^3 + \left[12\nu A_2^{(0)}r^3 + 2B_2^{(0)}r + 2(5-4\nu)\frac{C_2^{(0)}}{r^2} - 3\frac{D_2^{(0)}}{r^4} + \frac{\rho\omega^2(1-2\nu)}{21G(1-\nu)}r^3 \right] P_2(\cos\alpha) \quad (2.1)$$

$$u_\alpha^{(0)} = \left[(7-4\nu)A_2^{(0)}r^3 + B_2^{(0)}r + 2(1-2\nu)\frac{C_2^{(0)}}{r^2} + \frac{D_2^{(0)}}{r^4} + \frac{\rho\omega^2(1-2\nu)}{84G(1-\nu)}r^3 \right] \frac{dP_2}{d\alpha}$$

Напряжения, которые возникают при наличии перемещений (2.1), представим так

$$\sigma_{rr}^{(0)} = g_{rr}^{(0)}(r) + g_{rr}^{(2)}(r)P_2(\cos\alpha) \quad (2.2)$$

$$\sigma_{r\alpha}^{(0)} = g_{r\alpha}^{(2)}(r)dP_2/d\alpha, \quad \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} = g_{\alpha\alpha}^{(0)}(r) + g_{\alpha\alpha}^{(2)}(r)P_2(\cos\alpha)$$

$$g_{rr}^{(0)}(r) = -\frac{\rho\omega^2(3-\nu)}{15(1-\nu)}r^2 - 4G \left[(1+\nu)A_0^{(0)} - \frac{D_0^{(0)}}{r^3} \right]$$

$$g_{rr}^{(2)}(r) = \frac{\rho\omega^2(6-5\nu)}{21(1-\nu)}r^2 - 4G \left[3\nu A_2^{(0)}r^2 - B_2^{(0)} + 2(5-\nu)\frac{C_2^{(0)}}{r^3} - 6\frac{D_2^{(0)}}{r^5} \right]$$

$$g_{r\alpha}^{(2)}(r) = \frac{\rho\omega^2(1-2\nu)}{14(1-\nu)}r^2 + 2G \left[(7+2\nu)A_2^{(0)}r^2 + B_2^{(0)} + 2(1+\nu)\frac{C_2^{(0)}}{r^3} - 4\frac{D_2^{(0)}}{r^5} \right]$$

$$g_{\alpha\alpha}^{(0)}(r) = -\frac{\rho\omega^2(9+52\nu)}{210(1-\nu)}r^2 - 2G\left[2(1+\nu)A_0^{(0)} + \frac{D_0^{(0)}}{r^3}\right] +$$

$$+ 2G\left[(7-4\nu)A_2^{(0)}r^2 + B_2^{(0)} + 2(1-2\nu)\frac{C_2^{(0)}}{r^3} + \frac{D_2^{(0)}}{r^5}\right]$$

$$g_{\alpha\alpha}^{(2)}(r) = \frac{\rho\omega^2\nu}{3(1-\nu)}r^2 - 2G\left[14(2+\nu)A_2^{(0)}r^2 + 2B_2^{(0)} - 2(1-2\nu)\frac{C_2^{(0)}}{r^3} + 7\frac{D_2^{(0)}}{r^5}\right]$$

Граничные условия дают следующие системы для определения констант $A_0^{(0)}, B_0^{(0)}, A_2^{(0)}, B_2^{(0)}, C_2^{(0)}, D_2^{(0)}$:

$$(1+\nu)A_0^{(0)} - \frac{D_0^{(0)}}{R_i^3} = -\frac{\rho\omega^2(3-\nu)}{15G(1-\nu)}R_i^2 \quad (2.3)$$

$$-3\nu R_i^2 A_2^{(0)} + B_2^{(0)} - \frac{2(5-\nu)}{R_i^3}C_2^{(0)} + \frac{6}{R_i^5}D_2^{(0)} = -\frac{\rho\omega^2(6-5\nu)}{84G(1-\nu)}R_i^2$$

$$(7+2\nu)R_i^2 A_2^{(0)} + B_2^{(0)} + \frac{2(1+\nu)}{R_i^3}C_2^{(0)} - \frac{4}{R_i^5}D_2^{(0)} = -\frac{\rho\omega^2(1-2\nu)}{28G(1-\nu)}R_i^2 \quad (i=1, 2)$$

Для возможности исключения из формы внешней поверхности второй и четвертой гармоник при проведении асферизации функцию отклонения $f(\alpha)$ в (1.1) зададим в виде

$$f(\alpha) = P_2(\cos \alpha) + kP_4(\cos \alpha) \quad (2.4)$$

где k – параметр, подлежащий определению.

Принимая во внимание (2.2) и (2.4), преобразуем граничные условия (1.9) первого приближения:

$$\sigma_{rr}^{(1)}|_{r=R_1} = \sum_{n=0,2,4,6} (M_{rr}^{(n)} + kN_{rr}^{(n)})P_n(\cos \alpha), \quad \sigma_{r\alpha}^{(1)}|_{r=R_1} = \sum_{n=2,4,6} (M_{r\alpha}^{(n)} + kN_{r\alpha}^{(n)})\frac{dP_n}{d\alpha} \quad (2.5)$$

$$\sigma_{rr}^{(1)}|_{r=R_2} = \sigma_{r\alpha}^{(1)}|_{r=R_2} = 0, \quad M_{rr}^{(0)} = \frac{1}{5}\left(6g_{r\alpha}^{(2)} - R_1\frac{dg_{rr}^{(2)}}{dr}\right), \quad N_{rr}^{(0)} = 0$$

$$M_{rr}^{(2)} = \frac{1}{7}\left(6g_{r\alpha}^{(2)} - 7R_1\frac{dg_{rr}^{(2)}}{dr} - 2R_1\frac{dg_{r\alpha}^{(2)}}{dr}\right), \quad N_{rr}^{(2)} = \frac{2}{7}\left(10g_{r\alpha}^{(2)} - R_1\frac{dg_{rr}^{(2)}}{dr}\right)$$

$$M_{rr}^{(4)} = -\frac{18}{35}\left(4g_{r\alpha}^{(2)} + R_1\frac{dg_{rr}^{(2)}}{dr}\right), \quad N_{rr}^{(4)} = \frac{1}{77}\left(60g_{r\alpha}^{(2)} - 77R_1\frac{dg_{rr}^{(2)}}{dr} - 20R_1\frac{dg_{r\alpha}^{(2)}}{dr}\right)$$

$$M_{rr}^{(6)} = 0, \quad N_{rr}^{(6)} = -\frac{5}{11}\left(8g_{r\alpha}^{(2)} + R_1\frac{dg_{rr}^{(2)}}{dr}\right)$$

$$M_{r\alpha}^{(2)} = \frac{1}{7}\left(7g_{\alpha\alpha}^{(0)} + g_{\alpha\alpha}^{(2)} - R_1\frac{dg_{r\alpha}^{(2)}}{dr}\right), \quad N_{r\alpha}^{(2)} = \frac{2}{21}\left(5g_{\alpha\alpha}^{(2)} + 2R_1\frac{dg_{r\alpha}^{(2)}}{dr}\right)$$

$$M_{r\alpha}^{(4)} = \frac{9}{35}\left(g_{\alpha\alpha}^{(2)} - R_1\frac{dg_{r\alpha}^{(2)}}{dr}\right), \quad N_{r\alpha}^{(4)} = \frac{1}{77}\left(77g_{\alpha\alpha}^{(0)} + 17g_{\alpha\alpha}^{(2)} - 3R_1\frac{dg_{r\alpha}^{(2)}}{dr}\right)$$

$$M_{r\alpha}^{(6)} = 0, \quad N_{r\alpha}^{(6)} = \frac{5}{33}\left(2g_{r\alpha}^{(2)} - R_1\frac{dg_{r\alpha}^{(2)}}{dr}\right)$$

$$g_{ij}^{(n)} \equiv g_{ij}^{(n)}(R_1), \quad \frac{dg_{ij}^{(n)}}{dr} \equiv \left. \frac{dg_{ij}^{(n)}(r)}{dr} \right|_{r=R_1}$$

В решении однородного уравнения первого приближения (1.8) исходя из вида граничных условий (2.5) необходимо рассматривать слагаемые до 6-й гармоники включительно:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= \sum_{n=0,2,4,6} [A_n^{(1)} r^{n+1} (n+1)(n-2+4\nu) + B_n^{(1)} r^{n-1} n + C_n^{(1)} r^{-n} n(n+3-4\nu) - \\ &- D_n^{(1)} r^{-(n+2)} (n+1)] P_n(\cos \alpha) \\ u_\alpha^{(1)} &= \sum_{n=2,4,6} [A_n^{(1)} r^{n+1} (n+5-4\nu) + B_n^{(1)} r^{n-1} + C_n^{(1)} r^{-n} (4-n-4\nu) + D_n^{(1)} r^{-(n+2)}] \frac{dP_n}{d\alpha} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Переходя от (2.6) к напряжениям первого приближения, получаем, в соответствии с граничными условиями (2.5), систему уравнений для определения постоянных $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ ($n=0,2,4,6$):

$$\begin{aligned} 2G[A_n^{(1)}(n+1)(n^2-n-2-2\nu)R_i^n + B_n^{(1)}n(n-1)R_i^{n-2} - C_n^{(1)}n(n^2+3n-2\nu)R_i^{-(n+1)} + \\ + D_n^{(1)}(n+1)(n+2)R_i^{-(n+3)}] &= F_i^{(n)} \\ 2G[A_n^{(1)}(n^2+2n-1+2\nu)R_i^n + B_n^{(1)}(n-1)R_i^{n-2} + C_n^{(1)}(n^2-2+2\nu)R_i^{-(n+1)} - \\ - D_n^{(1)}(n+2)R_i^{-(n+3)}] &= H_i^{(n)} \quad (i=1,2) \\ F_1^{(n)} = M_{rr}^{(n)} + kN_{rr}^{(n)}, \quad H_1^{(n)} = M_{r\alpha}^{(n)} + kN_{r\alpha}^{(n)}, \quad F_2^{(n)} = H_2^{(n)} = 0 \quad (n=0,2,4,6) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Радиальное перемещение точек внешней поверхности ротора при вращении с учетом нулевого (2.1) и первого (2.6) приближений обозначим через $u^{(\omega)}$ и представим в виде

$$u^{(\omega)} = u_0^{(\omega)} \left\{ Q_0^{(0)} + Q_2^{(0)} P_2(\cos \alpha) + \varepsilon \left[Q_0^{(1)} + \sum_{n=2,4} (Q_n^{(1)} + kS_n^{(1)}) P_n(\cos \alpha) + kS_6^{(1)} P_6(\cos \alpha) \right] \right\} \quad (2.8)$$

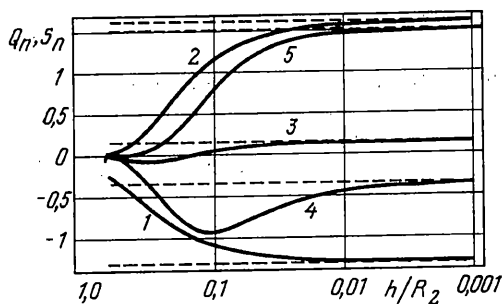
$$u_0^{(\omega)} = \rho \omega^2 R_2^3 / (2G)$$

Составляющие $Q_0^{(0)}$, $Q_0^{(1)}$ полученного решения определяют равномерное расширение ротора без изменения сферической формы и поэтому в рассматриваемой задаче не представляют интереса. Слагаемое с функцией $P_6(\cos \alpha)$ также не рассматривается, поскольку, как показано в [1], оно вызывает существенно меньшие уходы ротора, чем вторая и четвертая гармоники.

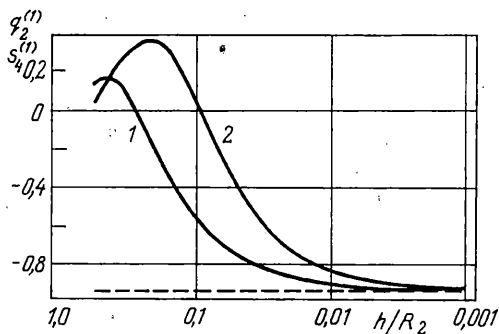
На фиг. 2 приведены зависимости коэффициентов $Q_2^{(0)}$, $Q_2^{(1)}$, $S_2^{(1)}$, $Q_4^{(1)}$, $S_4^{(1)}$ (кривые 1-5) от относительной величины h/R_2 (в убывающей логарифмической шкале), где $h = R_2 - R_1$ - "средняя" толщина стенки ротора. Графики построены для значения $\nu = 0,03$ (бериллий). Видно, что при уменьшении толщины стенки ротора все коэффициенты стремятся к асимптотическим значениям (на фиг. 2 - штриховые линии). Для бериллия это:

$$Q_{2\infty}^{(0)} = -1,314, \quad Q_{2\infty}^{(1)} = 1,612, \quad S_{2\infty}^{(1)} = 0,141, \quad Q_{4\infty}^{(1)} = -0,340, \quad S_{4\infty}^{(1)} = 1,509 \quad (2.9)$$

Эти значения коэффициентов соответствуют тем, которые получаются при решении поставленной задачи методами безмоментной теории оболочек [2]. На фиг. 2 можно оценить отличие результатов, полученных в данной работе с учетом конечной



Фиг. 2



Фиг. 3

толщины стенки ротора, и в рамках упрощенной модели тонкой оболочки при различных отношениях h/R_2 . Заметим, что именно в окрестности значения $h/R_2 \approx 0,1$, характерного для роторов электростатических гироскопов, находится максимум отклонения коэффициента $Q_4^{(1)}$.

3. Деформация ротора под действием внешнего давления. Пусть $\omega = 0$ и на ротор действует равномерное гидростатическое давление p . Решение задачи нулевого приближения (1.6) в этом случае определяется простыми выражениями [6]:

$$u_r^{(0)} = -\frac{(1-2\nu)pR_2^3 r}{2G(1+\nu)(R_2^3 - R_1^3)} - \frac{pR_2^3 R_1^3}{4G(R_2^3 - R_1^3)r^2}, \quad u_\alpha^{(0)} = 0 \quad (3.1)$$

$$\sigma_{rr}^{(0)} = -\frac{pR_2^3(r^3 - R_1^3)}{(R_2^3 - R_1^3)r^3}, \quad \sigma_{r\alpha}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} = -\frac{pR_2^3(2r^3 + R_1^3)}{2(R_2^3 - R_1^3)r^3}$$

Подставляя (3.1) в граничные условия (1.9), получим

$$\sigma_{rr}^{(1)}|_{r=R_1} = \gamma_{rr}^{(0)} [P_2(\cos \alpha) + kP_4(\cos \alpha)]$$

$$\sigma_{r\alpha}^{(1)}|_{r=R_1} = \gamma_{\alpha\alpha}^{(0)} \left[\frac{dP_2}{d\alpha} + k \frac{dP_4}{d\alpha} \right], \quad \sigma_{rr}^{(1)}|_{r=R_2} = \sigma_{r\alpha}^{(1)}|_{r=R_2} = 0 \quad (3.2)$$

$$\text{где } \gamma_{rr}^{(0)} = -R_1 \frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr} \Big|_{r=R_1} = \frac{3pR_2^3}{(R_2^3 - R_1^3)}, \quad \gamma_{\alpha\alpha}^{(0)} = \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}|_{r=R_1} = -\frac{3pR_2^3}{2(R_2^3 - R_1^3)}$$

Решение задачи первого приближения (1.8) в этом случае имеет вид (2.6), где следует заменить $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ на новые постоянные $a_n^{(1)}, b_n^{(1)}, c_n^{(1)}, d_n^{(1)}$ и суммировать для $n = 2, 4$. Граничные условия (3.2) для определения этих постоянных дают систему, совпадающую по форме с (2.7), где $F_1^{(2)} = \gamma_{rr}^{(0)}, F_1^{(4)} = k\gamma_{rr}^{(0)}, H_1^{(2)} = \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}, H_1^{(4)} = k\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}, F_2^{(n)} = H_2^{(n)} = 0$ ($n = 2, 4$).

Аналогично, обозначив через $u^{(p)}$ радиальное перемещение точек внешней поверхности ротора под действием сил давления (с точностью до слагаемых порядка ε^2), представим его в виде:

$$u^{(p)} = u_0^{(p)} \{ q_2^{(0)} + \varepsilon [q_2^{(1)} P_2(\cos \alpha) + k s_4^{(1)} P_4(\cos \alpha)] \} \quad (3.3)$$

$$u_0^{(p)} = pR_2^3 / (4Gh^2)$$

Графики зависимости коэффициентов $q_2^{(1)}, s_4^{(1)}$ (кривые 1, 2) от относительной толщины стенки ротора h/R_2 построены на фиг. 3. На основании (3.2) и (2.7) несложно проверить, что при $h/R_2 \rightarrow 0$, что соответствует случаю бесконечно тонкой оболочки, асимптотические значения коэффициентов $q_{2\infty}^{(1)}$ и $s_{4\infty}^{(1)}$ определяются одинаковыми

уравнениями и поэтому совпадают

$$q_{2\infty}^{(1)} = s_{4\infty}^{(1)} = -0,942 \quad (3.4)$$

4. Определение значений параметра k и давления p . Полученные решения (2.8) и (3.4) позволяют по заданному значению угловой скорости ω определить значение давления p и параметр внутренней полости k , необходимые для проведения асферизации ротора. Приравнявая амплитуды при второй и четвертой функциях Лежандра в формулах (2.8) и (3.3), получаем систему уравнений для определения параметров k и p :

$$\begin{cases} Q_2^{(0)} + \varepsilon(Q_2^{(1)} + kS_2^{(1)}) = \varepsilon w p q_2^{(1)} \\ Q_4^{(1)} + kS_4^{(1)} = w p k s_4^{(1)} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$w = 1/(2\rho\omega^2 h^2)$$

Числовой пример: $R_1 = 2,35$ см, $R_2 = 2,5$ см, $\varepsilon = 0,03$, $\omega = 2\pi \cdot 10^3$ рад/с (60 тыс. об/мин), $\rho = 1,85 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu = 0,03$, $G = 1,47 \cdot 10^{11}$ Па (бериллий). Радиальные перемещения точек внешней поверхности ротора равны (u [мкм]):

$$u^{(\omega)} = [115,7 + (1,21k - 443,7)P_2 + (12,82k - 8,35)P_4 - 6,93kP_6]10^{-2} \quad (4.2)$$

$$u^{(p)} = -[69,21 + 27,22P_2 + 12,75kP_4]10^{-8}p \quad (4.3)$$

Решая систему (4.1), получаем значения $p = 17,79$ МПа, $k = 0,05$.

Замечания. При найденных значениях p и k в форме вращающегося ротора будут отсутствовать 2-я и 4-я гармоники, однако сохранится 6-я, амплитуда которой, согласно (4.2), равна 0,003 мкм.

В выражениях (4.2) и (4.3) для деформаций внешней поверхности ротора коэффициенты при функции $P_2(\cos \alpha)$ примерно в 50 раз больше коэффициентов при $P_4(\cos \alpha)$, однако последними нельзя пренебречь, поскольку, как показано в [1], составляющая возмущающих моментов, вызванная наличием 4-й гармоники, может на два порядка превышать составляющую от 2-й гармоники, и, следовательно, столь различные коэффициенты в решении могут вызывать сравнимые уходы ротора гироскопа.

Анализируя полученные выражения (2.8) и (3.3), можно заметить, что при $k = 0$ в решение $u^{(p)}$ не входит функция $P_4(\cos \alpha)$, откуда следует, что если ее изначально не вводить в форму (2.4) внутренней поверхности ротора, то невозможно с помощью описанного метода асферизации исключить четвертую гармонику из формы внешней поверхности вращающегося ротора.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 97-01-00212).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартыненко Ю.Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
2. Мартыненко Ю.Г., Подалков В.В. Асферизация полого ротора электростатического гироскопа // Гироскопия и навигация. 1997. № 2(17). С. 56–64.
3. Huxley A.S., Nuttal J.D., Witt D.C. The electrostatically suspended gyroscope – a review of mechanical design aspects // Ferranti, PC 1987. C81/87. P. 37–44.
4. Пешехонов В.Г. Ключевые задачи современной автономной навигации // Гироскопия и навигация. 1996. № 1 (12). С. 48–55.
5. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 139 с.
6. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.02.1998