

УДК 539.3:534.1

© 2000 г. Н.А. АБРОСИМОВ, В.Г. БАЖЕНОВ, А.В. ЕЛЕСИН

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
И ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ГЛАДКИХ
И ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК
ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ**

Задачи динамики подкрепленных цилиндрических оболочек являлись в последние годы предметом многочисленных исследований [1– 4]. При этом в подавляющем числе работ рассматривались вопросы собственных и вынужденных колебаний. В то же время проблеме нелинейного деформирования и устойчивости дискретно-подкрепленных цилиндрических оболочек при импульсных нагрузках уделялось значительно меньше внимания. Недостаточно исследованы и пределы применимости моделей "размазанных" ребер при решении задач данного класса.

Ниже рассматривается постановка и методика численного исследования нестационарного деформирования и потери устойчивости гладких и дискретно-подкрепленных упругопластических цилиндрических оболочек при импульсных нагрузках осевого сжатия и (или) внешнего давления. Полагается, что линии подкреплений совпадают с координатными направлениями цилиндрической оболочки. Разрешающая система уравнений формулируется на базе конструктивно-ортотропной теории и модели с дискретным размещением подкрепляющих элементов, причем для описания динамического поведения как обшивки, так и подкрепляющих элементов привлекаются уравнения геометрически нелинейной теории оболочек типа Тимошенко. Анализируются формы потери устойчивости и критические нагрузки упругого и упругопластического стрингерного цилиндрического отсека со свободными торцами, нагруженного импульсом внешнего давления, в зависимости от толщины обшивки и скорости роста давления. Исследуется механизм потери устойчивости гладкой оболочки при комбинированном нагружении осевым сжатием и внешним давлением. Сопоставляются формы потери устойчивости и критические нагрузки подкрепленной цилиндрической оболочки с жесткими дисками на торцах, нагруженной внешним давлением или осевым сжатием, рассчитанные по конструктивно-ортотропной теории и модели с дискретным размещением стрингеров.

Подкрепленную цилиндрическую оболочку длиной L и радиуса R отнесем к системе координат α_i ($i = \overline{1,3}$): α_1 – направлена вдоль образующей, α_2 – по окружности; α_3 – по внешней нормали к срединной поверхности. При этом коэффициенты первой квадратичной формы и главные кривизны будут равны $A_1 = A_2 = 1$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1/R$. При построении геометрических зависимостей будем исходить из соотношений простейшего квадратичного варианта нелинейной теории упругости [5, 6], которые с учетом гипотез типа Тимошенко можно представить в виде

$$e_{11} = \frac{1}{Z_1} [\varepsilon_{11} + \varepsilon_{13}^2 / 2 + \alpha_3 x_{11}], \quad e_{13} = \frac{1}{Z_1} (\varphi_1 + \varepsilon_{13}) \quad (1)$$

$$e_{12} = \frac{1}{Z_1} \varepsilon_{12} + \frac{1}{Z_2} \varepsilon_{21} + \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_1 Z_2} \varepsilon_{13} \varepsilon_{23} + \alpha_3 \left(\frac{1}{Z_1} \varkappa_{12} + \frac{1}{Z_2} \varkappa_{21} \right) \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + k_2 U_3, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_1},$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_2}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_1}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_2} - k_2 U_2, \quad \varkappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1},$$

$$\varkappa_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_2}, \quad \varkappa_{12} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_1}, \quad \varkappa_{21} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_2},$$

$$Z_1 = 1, \quad Z_2 = 1 + k_2 \alpha_3$$

Для получения физических соотношений воспользуемся теорией течения с линейным кинематическим упрочнением [7, 8], основные уравнения которой запишутся в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu e'_{ij}, \quad e_{ij} = e'_{ij} + e''_{ij}, \quad e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

$$e''_{ij} = \int_0^t \dot{e}''_{ij} dt, \quad e''_{11} + e''_{22} + e''_{33} = 0, \quad \dot{e}_{ij} = \dot{\gamma} S_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^3 S_{ij} S_{ij} - \frac{2}{3} \sigma_*^2 = 0 \quad (2)$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} - \rho_{ij}, \quad \sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22}) / 3,$$

где λ, μ – параметры Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера, $\rho_{ij} = 2ge''_{ij}$, ρ_{ij} – тензор остаточных микронапряжений, g – модуль линейного упрочнения материала, γ – скалярный параметр, σ_* – предел текучести материала, S_{ij} – девиатор активных напряжений.

Соотношения упругости для конструктивно-ортотропной оболочки определяются аналогично [9], для чего подкрепляющие ребра заменяются условным сплошным слоем, работающим только в осевом направлении. При этом закон Гука запишется в виде

$$\sigma_{11} = A_{11} e_{11} + A_{12} e_{22}, \quad \sigma_{12} = A_{33} e_{12}, \quad \sigma_{13} = G_{13} e_{13} \quad (1 \leftrightarrow 2) \quad (3)$$

$$A_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad A_{12} = \nu A_{11}, \quad A_{33} = G_{12} = G_{13} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Вводя удельные усилия и моменты $(N_{ij}, Q_j, M_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij}, \sigma_{j3}, \alpha_3 \sigma_{ij}) Z_j d\alpha_3$, физические соотношения (3) можно представить в виде

$$N_{11} = C_{11} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{13}^2 / 2) + C_{12} (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{23}^2 / 2) \quad (4)$$

$$N_{12} = C_{33} (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{13} \varepsilon_{23}) \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$M_{11} = D_{11} \varkappa_{11} + D_{12} \varkappa_{12}, \quad M_{12} = D_{33} (\varkappa_{12} + \varkappa_{21})$$

$$Q_1 = G_{13} h e_{13}$$

$$C_{mn} = 2 \sum_{i=1}^2 A_{mn}^{(i)} (z_i - z_{i-1}), \quad D_{mn} = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^2 A_{mn}^{(i)} (z_i^3 - z_{i-1}^3) \quad (mn = 11, 12, 22, 33)$$

где z_i ($i = 1, 2$) – координаты обшивки и условного слоя, отсчитываемые от срединной поверхности.

Вывод уравнений движения дискретно подкрепленной цилиндрической оболочки базируется на принципе возможных перемещений [5, 10], который в данном случае

может быть записан в виде

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \left\{ \iint_F \left[N_{11} \frac{\partial(\delta U_1)}{\partial \alpha_1} + N_{21} \frac{\partial(\delta U_1)}{\partial \alpha_2} + N_{22} \frac{\partial(\delta U_2)}{\partial \alpha_2} + N_{12} \frac{\partial(\delta U_2)}{\partial \alpha_1} - \right. \right. \\
 & - (Q_2 + N_{22} \varepsilon_{23} + N_{21} \varepsilon_{13}) k_2 \delta U_2 + (Q_1 + N_{12} \varepsilon_{23} + N_{11} \varepsilon_{13}) \frac{\partial(\delta U_3)}{\partial \alpha_1} + \\
 & + (Q_2 + N_{21} \varepsilon_{13} + N_{22} \varepsilon_{23}) \frac{\partial(\delta U_3)}{\partial \alpha_2} + N_{22} k_2 \delta U_3 + M_{11} \frac{\partial(\delta \varphi_1)}{\partial \alpha_1} + M_{21} \frac{\partial(\delta \varphi_1)}{\partial \alpha_2} + Q_1 \delta \varphi_1 + \\
 & + M_{22} \frac{\partial(\delta \varphi_2)}{\partial \alpha_2} + M_{12} \frac{\partial(\delta \varphi_2)}{\partial \alpha_1} + M_{12} \frac{\partial(\delta \varphi_2)}{\partial \alpha_1} + Q_2 \delta \varphi_2 \left. \right] d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & + \int \int_F [(B_{11} \ddot{U}_1 + B_{12} \ddot{\Phi}_1) \delta U_1 + (B_{11} \ddot{U}_2 + B_{12} \ddot{\Phi}_2) \delta U_2 + B_{11} \ddot{U}_3 \delta U_3 + (B_{22} \ddot{\Phi}_1 + B_{21} \ddot{U}_1) \delta \varphi_1 + \\
 & + (B_{22} \ddot{\Phi}_2 + B_{21} \ddot{U}_2) \delta \varphi_2] d\alpha_1 d\alpha_2 - \int \int_F \sum_{i=1,3} P_i \delta U_i d\alpha_1 d\alpha_2 - \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i'} (N'_{11} \delta U'_1 + N'_{21} \delta U'_2 + Q'_1 \delta U'_3 + \\
 & M'_{21} \delta \varphi_2) d\alpha_2 - \sum_{i=3}^4 \int_{\Gamma_i'} (N'_{12} \delta U'_1 + N'_{22} \delta U'_2 + Q'_2 \delta U'_3 + M'_{12} \delta \varphi_1 + M'_{22} \delta \varphi_2) d\alpha_1 - \\
 & - \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i^*} (N^*_{11} \delta U_1^* + N^*_{21} \delta U_2^* + Q^*_1 \delta U_3^* + M^*_{11} \delta \varphi_1 + M^*_{21} \delta \varphi_2) d\alpha_2 - \\
 & - \sum_{i=3}^4 \int_{\Gamma_i^*} (N^*_{12} \delta U_1^* + N^*_{22} \delta U_2^* + Q^*_2 \delta U_3^* + M^*_{12} \delta \varphi_1 + M^*_{22} \delta \varphi_2) d\alpha_1 \left. \right\} dt = 0
 \end{aligned} \quad (5)$$

$$B_{11} = \rho h, \quad B_{22} = \rho h^3 / 12, \quad B_{12} = B_{21} = \rho k_2 h^3 / 12$$

$$(N_{ij}, Q_j, M_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij}, \sigma_{i3}, \alpha_3 \sigma_{ij}) Z_j d\alpha_3$$

где P_i ($i = 1, 3$) – компоненты внешней нагрузки по направлениям координатных осей α_1, α_3 ; $N'_{ij}, Q'_{ij}, M'_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) – усилия и моменты, действующие на границе расчетной области $F = L_* 2\pi R$; Γ'_i ($i = \overline{1, 4}$) – граничные линии α_j ($j = 1, 2$) = const области F ; $N^*_{ij}, Q^*_i, M^*_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) – усилия и моменты, действующие на обшивку со стороны подкрепляющих элементов; Γ^*_i ($i = \overline{1, 4}$) – линии подкреплений в продольном и окружном направлениях, точка над буквой означает производную по времени.

Применяя к (5) известную процедуру преобразования интегралов, получим систему уравнений движения фрагмента подкрепленной цилиндрической оболочки

$$\begin{aligned}
 L_1(N) + P_1 &= B_{11} \ddot{U}_1 + B_{12} \ddot{\Phi}_1, & L_2(N) + Q_{22} k_2 + P_2 &= B_{11} \ddot{U}_2 + B_{12} \ddot{\Phi}_2 \\
 L_1(M) - Q_1 &= B_{22} \ddot{\Phi}_1 + B_{21} \ddot{U}_1, & L_2(M) - Q_2 &= B_{22} \ddot{\Phi}_2 + B_{21} \ddot{U}_2 \\
 L_1(T) &= \partial T_{11} / \partial \alpha_1 + \partial T_{21} / \partial \alpha_2
 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial Q_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_{22}}{\partial \alpha_2} - k_2 N_{22} + P_3 = B_{11} \ddot{U}_3, \quad Q_{11} = Q_1 + N_{11} \varepsilon_{13} + N_{12} \varepsilon_{23} \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

и естественные граничные условия на контурных Γ'_i ($i = \overline{1, 4}$) и (или) Γ^*_i ($i = \overline{1, 4}$)

$$N_{11} = N'_{11}, \quad N_{21} = N'_{21}, \quad Q_{11} = Q'_{11}, \quad M_{11} = M'_{11}, \quad M_{21} = M'_{21}$$

(7)

$$N_{11} = N_{11}^*, \quad N_{21} = N_{21}^*, \quad Q_{11} = Q_{11}^*, \quad M_{11} = M_{11}^*, \quad M_{21} = M_{21}^*$$

Следует заметить, что уравнения движения подкрепляющих элементов (кольцевых и прямоугольных пластин) могут быть получены (в своей локальной системе координат) по аналогичной схеме. При этом в общем базисе α_i ($i = \overline{1,3}$) на линиях стыковки подкрепляющих элементов с обшивкой должны выполняться условия жесткой склейки.

Дополняя соотношения (1–7) необходимым числом начальных условий и задавая начальную погибь, получим полную систему уравнений для анализа нелинейных процессов деформации и динамической потери устойчивости подкрепленных цилиндрических оболочек при неосесимметричных импульсных воздействиях.

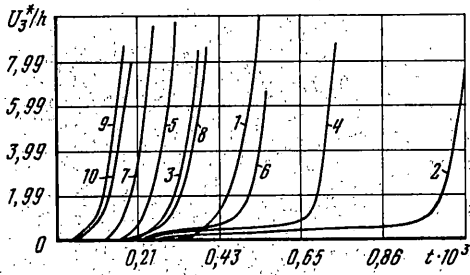
Критическая нагрузка потери устойчивости определяется по характерному излому на кривой амплитуда воздействия – максимальный прогиб.

Численный метод решения сформулированной начально-краевой задачи основывается на явной вариационно-разностной схеме [11, 12]. Следует заметить, что поскольку шаг интегрирования в явной схеме лимитируется толщиной наиболее тонкого элемента конструкции (в данном случае толщиной обшивки), то расчет с этим шагом всей конструкции приводит к существенному увеличению времени счета. Для устранения этого недостатка использован прием регуляризации разностной схемы [12], позволяющий вести расчет с шагом, который определяется дискретизацией срединных поверхностей элементов конструкций. При этом точность определения напряженно-деформированного состояния практически не изменяется, а шаг интегрирования по времени может возрастать на порядок.

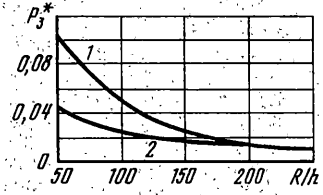
С целью проверки достоверности предложенной методики проводилось сравнение теоретических расчетов с экспериментальными данными по динамической устойчивости подкрепленных цилиндрических оболочек при нагружении импульсом внешнего давления, приведенными в [13]. Сравнительный анализ проводился для гладких и подкрепленных кольцевыми ребрами упругопластических оболочек. Гладкие оболочки теряли устойчивость с образованием шести выпучин в окружном направлении. Процесс потери устойчивости подкрепленных оболочек состоял из двух этапов. Вначале наблюдалась локальная потеря устойчивости между покреляющими ребрами, а затем происходила общая потеря устойчивости с образованием волн, захватывающих кольцевые ребра. Величина критического импульса для гладких и подкрепленных оболочек оказалась равной $I_*^T = 1,4 \cdot 10^3$ Па·с и $I_*^T = 2,2 \cdot 10^3$ Па·с соответственно. Соответствующие экспериментальные данные [13] – $I_* = 1,72 \cdot 10^3$ Па·с и $I_* = 2,52 \cdot 10^3$ Па·с. Наблюдается удовлетворительное согласование расчета и экспериментальных данных. Количественное отличие расчета и эксперимента связано, по-видимому, с погрешностями в измерительной схеме (как это отмечается в [13]) и не полным соответствием расчетной схемы условиям эксперимента.

В первом примере рассматривалось динамическое поведение и потеря устойчивости стрингерного цилиндрического отсека ($R = 0,072$ м, $L/R = 2$, стрингеры с размерами сечения $0,6 \cdot 10^{-3}$ м \times $3 \cdot 10^{-3}$ м) со свободными торцами при нагружении линейно растущим внешним давлением. Материал конструкции – алюминий: $E = 77,5$ ГПа, $\rho = 2700$ кг/м³, $\nu = 0,3$, $\sigma_* = 0,16$ ГПа, $g = 0,1$ ГПа.

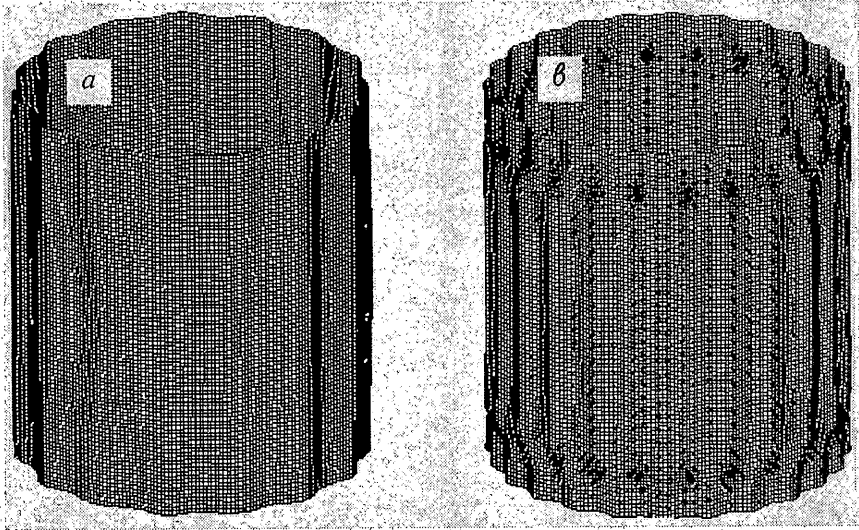
Результаты решения упругого и упругопластического деформирования цилиндрической оболочки, подкрепленной двадцатью четырьмя стрингерами, нагруженной внешним давлением со скоростью $V_3 = 10$ ГПа/с приведены на фиг. 1–3. На фиг. 1 показаны кривые, отражающие зависимости между максимальными прогибами и време-



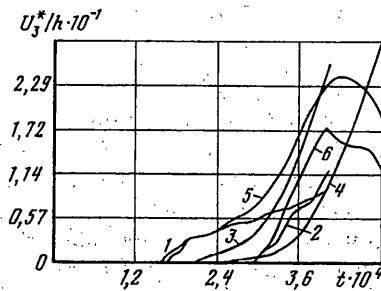
Фиг. 1



Фиг. 2

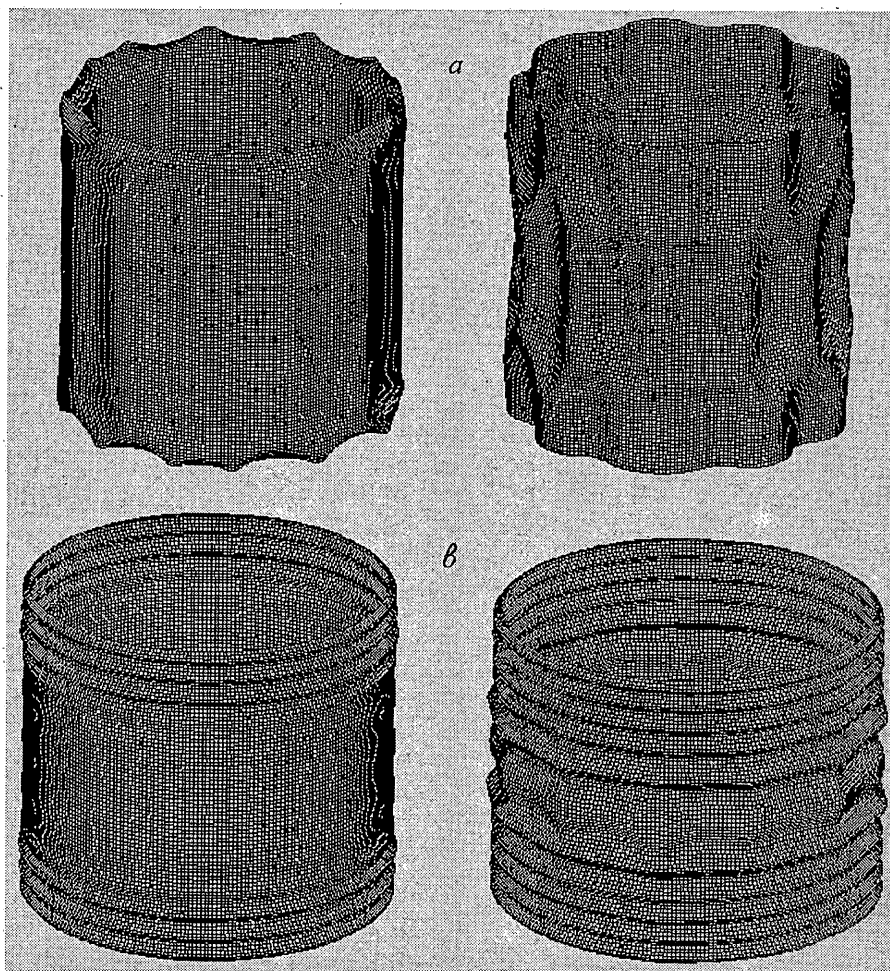


Фиг. 3



Фиг. 4

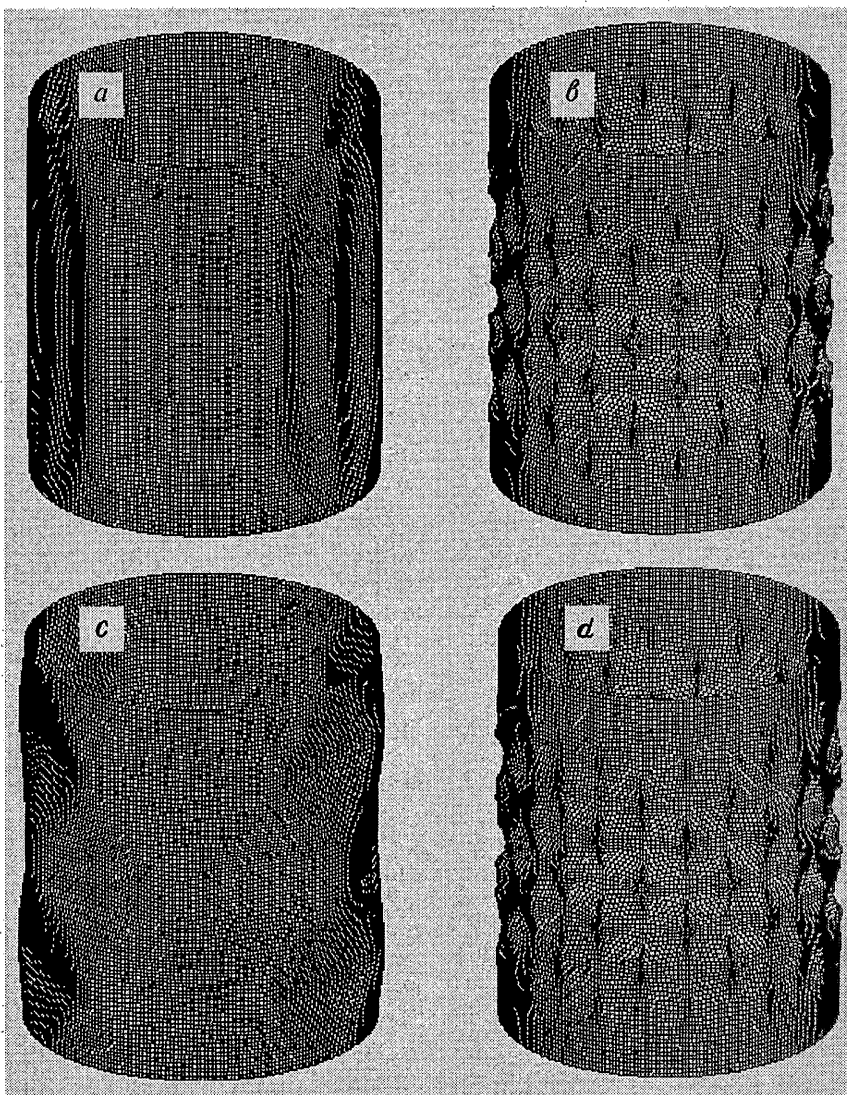
нем нагружения (или нагрузкой) для различных толщин обшивки стрингерного отсека. Здесь кривые с нечетными номерами 1, 3, 5, 7, 9 соответствуют упругопластической работе обшивки и подкрепляющих элементов и рассчитаны при $R/h = 50, 75, 100, 125, 200$ соответственно, а аналогичные кривые с четными номерами 2, 4, 6, 8, 10 – упругому деформированию конструкции. На фиг. 2 приведены величины критического давления P_3^* [ГПа] при упругом (кривая 1) и упругопластическом (кривая 2) поведении материала конструкции в зависимости от толщины обшивки.



Фиг. 5

Характерные формы потери устойчивости при упругом и упругопластическом деформировании для конструкции с толщиной обшивки $R/h = 100$ изображены на фиг. 3, а, в соответственно. Анализ потери устойчивости показал, что при упругом деформировании материала конструкции происходит потеря устойчивости с образованием выпучин, вытянутых вдоль образующей цилиндра. При этом стрингерный отсек при $R/h = 50$ трансформируется в правильную шестигранную призму, а по мере уменьшения толщины обшивки номер формы потери устойчивости растет и начиная с $R/h \geq 150$ конструкция теряет устойчивость по арочной форме, причем подкрепляющие стрингеры выполняют роль промежуточных опор.

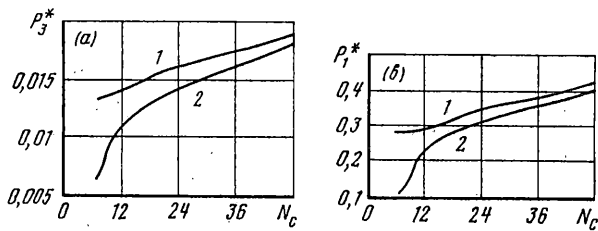
Для упругопластического поведения материала конструкции арочная форма потери устойчивости характерна как для оболочек средней толщины $R/h \leq 75$, так и достаточно тонких — $R/h \geq 125$. В промежуточном диапазоне толщин обшивки $125 \leq R/h \leq 75$ реализуется форма потери устойчивости в виде "китайского фонарика" (см. фиг. 3, в). При нагружении с большими скоростями роста внешнего давления продольный размер выпучин в средней части "китайского фонарика" уменьшается и образуется три ряда вмятин. Из полученных результатов также сле-



Фиг. 6

дует, что при вычислении критических нагрузок внешнего давления, подкрепленной стрингерами цилиндрической оболочки, учет физической нелинейности становится необходимым при $R/h \leq 200$.

Во втором примере анализировался механизм упругой и упругопластической потери устойчивости гладкой оболочки со свободными торцами при нагружении комбинацией импульсов внешнего давления и осевого сжатия. Геометрия и материал оболочки были такими же как и в первом примере. Результаты решения задачи для оболочки с $R/h = 100$ приведены на фиг. 4, 5. На фиг. 4 представлены диаграммы "максимальный прогиб – время", причем кривые с нечетными номерами соответствуют упругопластической работе материала оболочки, а с четными номерами – идеально упругой. Здесь кривые 1, 2 рассчитаны при чисто осевом нагружении со скоростью роста давления $V_1 = 1,1 \cdot 10^3$ ГПа/с, кривые 3, 4 – при нагружении внешним



Фиг. 7

давлением со скоростью $V_3 = 10$ ГПа/с, а кривые 5, 6 – при нагружении комбинацией импульсов осевого сжатия и внешнего давления треугольной формы, причем скорости роста давления на "восходящих" участках были такими же, как в случае нагружения только осевым сжатием и внешним давлением, а скорости "падающих" были соответственно в тридцать шесть раз больше, при этом время достижения нагрузкой максимального значения $t_* = 3,6 \cdot 10^{-4}$ с. Некоторые характерные формы, которые оболочка принимает в процессе потери устойчивости при комбинированном нагружении показаны на фиг. 5, а, в для упругого и упругопластического поведения материала оболочки.

Из приведенных результатов следует, что при комбинированном нагружении в случае упругого деформирования процесс потери устойчивости начинается с торцов оболочки путем образования двенадцати вмятин, обращенных к центру кривизны, а затем по мере развития процесса в средней части оболочки формируется пояс из двенадцати вмятин, смещенным по отношению к торцовым на четверть волны.

При упругопластическом деформировании процесс начинается с формирования кольцевых складок на торцах оболочки, а затем число складок растет и они смещаются к центральному сечению оболочки. В последствии в районе центрального сечения образуется пояс в виде двенадцатигранной призмы.

Из анализа кривых, приведенных на фиг. 4, следует, что учет физической нелинейности приводит к существенному уменьшению критических нагрузок, причем при комбинированном нагружении этот эффект проявляется в большей степени.

В третьем примере проведен сравнительный анализ форм потери устойчивости и критических нагрузок осевого сжатия и внешнего давления стрингерной цилиндрической оболочки, рассчитанных в рамках конструктивно-ортотропной теории и модели с дискретным размещением стрингеров. Геометрия, материал и характер нагружения оболочки, скрепленной по торцам жесткими дисками, были такими же, как и в выше рассмотренных задачах. На фиг. 6 представлены характерные формы потери устойчивости оболочки, подкрепленной шестью стрингерами, причем фиг. 6, а, в получены при нагружении внешним давлением со скоростью $V_3 = 2$ ГПа/с, фиг. 6, с, d – осевым сжатием со скоростью $V_1 = 36$ ГПа/с, фиг. 6, а, с соответствуют расчету по модели с дискретным размещением стрингеров, фиг. 6, в, d – конструктивно-ортотропной теории. Зависимости критических нагрузок внешнего давления и осевого сжатия от числа подкрепляющих стрингеров приведены на фиг. 7, а, в соответственно. Здесь кривая 1 соответствует дискретной модели, а 2 – конструктивно-ортотропной теории.

Из полученных результатов следует, что при числе стрингеров меньше двадцати четырех конструктивно-ортотропная схема приводит не только к качественно иным формам потери устойчивости по сравнению с дискретной моделью, но и к существенно заниженным критическим нагрузкам.

Работа выполнена в рамках финансирования РФФИ по Программе поддержки ведущих научных школ России (проекты 96-15-98156 и 99-01-00132).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. *Жигалко Ю.П., Дмитриева Л.М.* Динамика ребристых пластин и оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. Вып. 13. С. 3–30.
3. *Андрианов И.В., Лесничая В.А., Маневич Л.И.* Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. 221 с.
4. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А.* Статика, динамика и устойчивость ребристых оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1990. Т. 21. С. 132–191.
5. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 212 с.
6. *Шаповалов Л.А.* Об учете поперечного обжатия в уравнениях нелинейной динамики оболочек // Изв. АН. МТТ. 1997. № 3. С. 156–168.
7. *Ишлинский А.Ю.* Общая теория пластичности с линейным упрочнением. // Укр. мат. ж. 1954. Т. 6. № 3. С. 314–325.
8. *Баженов В.Г.* Численное исследование нестационарных процессов деформирования упругопластических оболочек // Пробл. прочности. 1984. № 11. С. 51–54.
9. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
10. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 512 с.
11. *Абросимов Н.А., Баженов В.Г., Елесин А.В.* Численный анализ динамического деформирования и потери устойчивости композитных оболочек вращения при импульсном нагружении // Механика композит. материалов. 1995. Т. 31. № 1. С. 65–71.
12. *Баженов В.Г., Чекарчев Д.Т.* Вариационно-разностные схемы в нестационарных волновых задачах динамики пластин и оболочек. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1992. 159 с.
13. *Андреев Л.В., Крушельницкий И.Н., Павленко И.Д., Приварникова Ю.К., Прокопало Е.Ф.* Динамическая устойчивость подкрепленных цилиндрических оболочек при нагружении импульсом внешнего давления // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 1. С. 118–125.

Москва

Поступила в редакцию
28.06.1998