

УДК 539.3:534.1

© 2000 г. В.А. КОВАЛЕВ, Л.Ю. КОССОВИЧ, А.В. НИКОНОВ

ПЕРЕХОДНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПРИ ВНЕЗАПНО ПРИЛОЖЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

Асимптотические методы, разработанные в [2, 4, 5] для исследования нестационарных волн в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях, моделируемых ступенчатой функцией Хевисайда, применяются к анализу нестационарных волн при внезапно приложенных гармонических нагрузках. Рассматриваются торцевые продольные воздействия тангенциального типа. Используется безмоментная составляющая теории Кирхгофа – Лява и уточненные уравнения для описания окрестности квазифронта. Решения строятся с помощью интегрального преобразования Лапласа по времени. Обращение изображений проводится с помощью метода перевала второго порядка приближения и модифицированного метода перевала, применяемого при слиянии точки перевала и полюса. На фазовой плоскости выявлена зона, разделяющая область установившегося решения, имеющего характер незатухающих вынужденных колебаний, от области нестационарного решения, имеющего место в окрестности фронтов волн.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую упругую цилиндрическую оболочку, лицевые поверхности которой свободны от напряжений, находящуюся под действием ударно приложенной в начальный момент времени к торцу оболочки продольной нагрузки тангенциального типа. После приложения нагрузка изменяется по гармоническому закону. Такое воздействие можно считать квазимонохроматическим сигналом. В момент удара в оболочке возникает сложная система волн. Будем рассматривать промежуток времени до момента отражения волн от противоположного торца. Поэтому граничные условия ставятся только на загруженном торце и оболочка считается полубесконечной.

Задача для цилиндрической оболочки при действии на ее торец ударного воздействия, представленного функцией Хевисайда, исследовалось в [2]. Асимптотическим методом было построено решение на всей фазовой плоскости продольной координаты и времени. Целью данной работы является адаптация разработанных в [2] методов исследования на рассматриваемый вид нагрузок и проведение аналогий с соответствующими решениями из других областей физики, например из теории акустических волн.

Наличие дисперсии в упругих телах приводит к появлению "предвестников" – сигналов очень малой амплитуды, соответствующих части входного сигнала, которая была сильно искажена по амплитуде и частоте. Экспериментально предвестники звуковых волн были обнаружены в волноводах Праудом [6] и Вальтером [7]. После предвестников амплитуда сигнала в фиксированной точке возрастает плавно или резко, пока не достигнет своего максимального значения. Этот момент времени называют временем прибытия основной части сигнала. В настоящее время значительная часть исследований, посвященных распространению сигналов, выполнена в теории акустики, где эта проблема изучена наиболее полно. Поэтому было бы полезно

провести аналогию между упругими и акустическими волнами и сравнить результаты исследований.

Согласно [2] будем разделять напряженно-деформированное состояние (НДС) цилиндрической оболочки на составляющие с различными показателями изменчивости: двумерное решение по теории Кирхгофа – Лява и динамический погранслои. Быстроизменяющееся решение в начальные моменты времени и в окрестности фронта волны расширения строится с помощью теории динамического погранслоя. С ростом времени и удалением от фронта волны нестационарное волновое НДС цилиндрической оболочки описывается двумерной теорией Кирхгофа – Лява. Двумерное решение ищется в виде наложения безмоментной и моментной составляющих, удовлетворяющих тангенциальной и нетангенциальной частям граничных условий. Для выбранного типа воздействия асимптотически главной частью двумерного решения является безмоментная составляющая.

Для построения безмоментного НДС цилиндрической оболочки используем систему [2, 4], в которой среди уравнений движения отсутствует уравнение проекций действующих сил на нормаль к срединной поверхности, а в соотношениях упругости для усилий отсутствуют члены с прогибом. Такая система описывает распространение двумерных волн растяжения и кручения при показателях изменчивости НДС по продольной координате, большем нуля, что соответствует рассматриваемому классу торцевых воздействий, быстро изменяющихся во времени по гармоническому закону. Тогда уравнения движения записываются в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \varphi} - 2\rho h I_u &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} - 2\rho h I_v &= 0 \\ I_u &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad I_v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где T_1, T_2, S – тангенциальные усилия; u, v – перемещения точек срединной поверхности оболочки; h – полутолщина оболочки; t – время; α, φ – продольная и окружная координаты; R – радиус оболочки; ρ – плотность материала.

Усилия и перемещения связаны соотношениями

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \\ T_2 &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \\ S &= \frac{Eh}{1+\nu} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

Граничные условия на нагруженном торце запишем в виде

$$T_1 = 2hN(t) \cos(n\varphi) \cos(\omega_0 t), \quad v = 0 \quad (1.3)$$

где $N(t)$ – функция Хевисайда; ω_0 – частота возбуждающей нагрузки; n – количество волн в окружном направлении.

Уравнения (1.1) определяют два семейства характеристических поверхностей и описывают распространение волн расширения и сдвига. При этом погрешность

теории Кирхгофа – Лява относительно точной трехмерной теории влечет за собой изменение реальной волновой картины. Скорость волны расширения искажается этой теорией и определяется значением [2]: $c_3 = \sqrt{E/\rho(1-v^2)}$. Разрывы соответствующих функций появляются не на истинном, с точки зрения точной трехмерной теории, фронте волны, а на квазифронте, который, в свою очередь, является фронтом волны по приближенной двумерной теории. Скорость c_3 называется обычно скоростью волны растяжения (сжатия).

Решение будем раскладывать в тригонометрический ряд по окружной координате. В соответствии с граничными условиями (1.3) для каждого члена ряда неизвестные функции будут разделяться следующим образом:

$$\begin{aligned} T_1(\alpha, \varphi, t) &= T_1(\alpha, t) \cos(n\varphi), \quad u(\alpha, \varphi, t) = u(\alpha, t) \cos(n\varphi) \\ T_2(\alpha, \varphi, t) &= T_2(\alpha, t) \cos(n\varphi), \quad v(\alpha, \varphi, t) = v(\alpha, t) \sin(n\varphi) \\ S(\alpha, \varphi, t) &= S(\alpha, t) \sin(n\varphi) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Перейдем к безразмерной форме координаты и времени $\xi_0 = \alpha/R$, $\tau_0 = c_3 t/R$, а также проведем операцию растяжения масштаба в соответствии с изменяемостью НДС [1]:

$$\xi = \varepsilon^{-a} \xi_0, \quad \tau = \varepsilon^{-b} \tau_0 \quad (1.5)$$

где $\varepsilon = h/R$ – малый параметр тонкостенности оболочки; a и b – показатели изменяемости НДС оболочки по направлению вдоль образующей и по времени.

Будем оценивать величину параметра n следующим образом:

$$n = \varepsilon^{-\theta} n^*, \quad n^* = O(1) \quad (1.6)$$

где θ – показатель изменяемости в окружном направлении.

Перейдем к безразмерной форме усилий и перемещений с учетом показателей изменяемости

$$\begin{aligned} T_1^* &= \frac{1-v^2}{2Eh} \varepsilon^{a-1} T_1, \quad u^* = \frac{u}{h} \\ T_2^* &= \frac{1-v^2}{2Eh} \varepsilon^{a-1} T_2, \quad v^* = \frac{v}{h} \\ S^* &= \frac{1-v^2}{2Eh} \varepsilon^{a-1} S \end{aligned} \quad (1.7)$$

Тогда уравнения движения и соотношения упругости для амплитудных значений компонент НДС (1.4) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^*}{\partial \xi} + \varepsilon^{a-\theta} n^* S^* - \varepsilon^{2a-2b} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} &= 0 \\ \frac{\partial S^*}{\partial \xi} - \varepsilon^{a-\theta} n^* T_2^* - \varepsilon^{2a-2b} \frac{\partial^2 v^*}{\partial \tau^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} T_1^* &= \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \varepsilon^{a-\theta} \nu n^* v^*, \quad T_2^* = \nu \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \varepsilon^{a-\theta} n^* v^* \\ S^* &= \frac{1-\nu}{2} \left(-\varepsilon^{a-\theta} n^* u^* + \frac{\partial v^*}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для построения безмоментной составляющей двумерного решения показатели изменяемости должны подчиняться определенным в [2] соотношениям. Изменяемость в направлении продольной координаты равна изменяемости в направлении окружной координаты или превосходит ее. При выполнении этого условия асимптотически главная часть разрешающей системы будет описывать распространение волн в направлении образующей. Изменяемость НДС по времени должна быть больше или равна изменяемости по времени торцевой нагрузки. Кроме того, показатели изменяемости по продольной координате и времени выбираются так, чтобы вторые производные от u и v по этим переменным имели одинаковый асимптотический порядок и содержались в асимптотически главной части разрешающей системы, обеспечивая волновой характер решений. Обозначим показатель изменяемости торцевой нагрузки по времени через c и будем рассматривать случай торцевого воздействия, когда $c > \theta$. Учитывая вышеперечисленные ограничения на выбор показателей изменяемости, выберем их следующими: $a = b = c$.

Безразмерную форму частотного параметра ω в граничных условиях (1.3) определим следующим образом:

$$\omega^* = \varepsilon^c \frac{R}{c_3} \omega_0, \quad \omega^* = O(1) \quad (1.10)$$

Подставляя (1.9) в (1.8), получим разрешающую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} - \varepsilon_1^2 \frac{(1-\nu)n^{*2}}{2} u^* - \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} + \varepsilon_1 \frac{(1+\nu)n^*}{2} \frac{\partial v^*}{\partial \xi} &= 0 \\ -\varepsilon_1 \frac{(1+\nu)n^*}{2} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial \xi^2} - \varepsilon_1^2 n^{*2} v^* - \frac{\partial^2 v^*}{\partial \tau^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^{c-\theta}$$

Граничные условия (1.3) в безразмерной форме запишутся в виде

$$T_1^* = H(\tau) \cos(\omega^* \tau), \quad \nu^* = 0 \quad (1.12)$$

В дальнейшем для удобства записи уравнений и их интегралов в безразмерной форме звездочку будем опускать.

2. Безмоментная составляющая двумерного решения. Поставленную краевую задачу (1.11) с граничными условиями (1.12) будем решать с помощью метода интегрального преобразования Лапласа по временной переменной τ . Преобразованная система уравнений запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^L}{d\xi^2} - \left(\varepsilon_1^2 \frac{(1-\nu)n^2}{2} + s^2 \right) u^L + \varepsilon_1 \frac{(1+\nu)n}{2} \frac{dv^L}{d\xi} &= 0 \\ -\varepsilon_1 \frac{(1+\nu)n}{2} \frac{du^L}{d\xi} + \frac{1-\nu}{2} \frac{d^2 v^L}{d\xi^2} - (\varepsilon_1^2 n^2 + s^2) v^L &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Верхним индексом L обозначены изображения функций, s – параметр преобразования Лапласа.

Из четырех корней характеристического уравнения выберем два с отрицательной действительной частью при положительном действительном значении s :

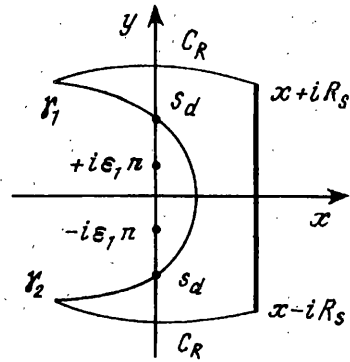
$$\lambda_1 = -\sqrt{s^2 + \varepsilon_1^2 n^2}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{k^2 s^2 + \varepsilon_1^2 n^2}, \quad k = \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \quad (2.2)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.12), определим изображение для тангенциального усилия

$$T_1^L = T_1^{dL} + T_1^{sL}$$

$$T_1^{dL} = \frac{s^2 + (1-\nu)\varepsilon_1^2 n^2}{s(s^2 + \omega^2)} \exp\left(-\sqrt{s^2 + \varepsilon_1^2 n^2} \frac{\xi_0}{\varepsilon^c}\right)$$

$$T_1^{sL} = -\frac{(1-\nu)\varepsilon_1^2 n^2}{s(s^2 + \omega^2)} \exp\left(-\sqrt{k^2 s^2 + \varepsilon_1^2 n^2} \frac{\xi_0}{\varepsilon^c}\right)$$
(2.3)



Фиг. 1

Решение (2.3) представляет собой сумму двух составляющих, первая из которых определяет распространение волн растяжения, а вторая – волн сдвига. Обращение изображения производится по формуле Меллина через интеграл в комплексной области параметра s . Оригинал при этом представится в виде

$$T_1 = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(s) \exp(\Psi_1(s)M) ds + \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_2(s) \exp(\Psi_2(s)M) ds \right)$$

$$F_1(s) = \frac{s^2 + (1-\nu)\varepsilon_1^2 n^2}{s(s^2 + \omega^2)}, \quad \Psi_1(s) = -\sqrt{s^2 + \varepsilon_1^2 n^2} \xi_0 + s\tau_0$$

$$F_2(s) = -\frac{(1-\nu)\varepsilon_1^2 n^2}{s(s^2 + \omega^2)}, \quad \Psi_2(s) = -\sqrt{k^2 s^2 + \varepsilon_1^2 n^2} \xi_0 + s\tau_0$$
(2.4)

$$M = 1/\varepsilon^c \gg 1$$

Интегрирование ведется по прямой, лежащей справа от оси ординат и особых точек.

В работах [2, 4] представлены асимптотические решения аналогичной задачи для цилиндрической оболочки при ударном воздействии в виде функции Хевисайда. Для решения рассматриваемой задачи можно было, конечно, воспользоваться интегральным представлением с помощью теоремы свертки на базе известного решения для функции Хевисайда. Однако, рассматриваемое решение для гармонических функций обладает, по сравнению с этим известным решением, новыми качественными особенностями перехода в установившееся состояние, математически обусловленными так называемыми критическими точками (см. следующий пункт этой статьи), а оценка интегралов для свертки также потребует разработки детального исследования. Поэтому решение для случая гармонических функций ищется в представленной работе непосредственно на базе интегралов (2.4).

При вычислении интеграла Меллина вдали от торца эффективно использовать метод перевала второго порядка приближения. Действительно, при $\xi_0, \tau_0 \gg \varepsilon^c$ в показателе экспоненты в подынтегральном выражении имеется большой параметр. Из-за этого экспонента ведет себя как быстро осциллирующая функция всюду, за исключением точек перевала, в которых $\Psi'(s) = 0$. Если функция $\Psi(s)$ имеет одну или несколько точек перевала, а спектр входного сигнала описывается функцией $F(s)$, медленно изменяющейся при всех значениях s , то основной вклад в интеграл Меллина дают окрестности точек перевала, а вкладом остальных значений s можно пренебречь. Точки перевала для интегралов (2.4) определяются соотношениями

$$s_d = \pm i \frac{\varepsilon_1 n \tau_0}{\sqrt{\tau_0^2 - \xi_0^2}}, \quad s_s = \pm i \frac{k^2 \varepsilon_1 n \tau_0}{\sqrt{k^2 \tau_0^2 - \xi_0^2}}$$
(2.5)

Для вычисления интеграла Меллина построим замкнутый контур Γ , который состоит из отрезка прямой $[x - iR_s; x + iR_s]$, отрезков линий наискорейшего спуска γ_1 и γ_2 и дуг окружностей C_R , где R_s – радиус окружности (фиг. 1). Устремляем радиус окружности к бесконечности. Тогда интеграл по отрезку прямой $[x - iR_s; x + iR_s]$ устремится к интегралу Меллина, интеграл по окружности C_R даст в пределе ноль по лемме Жордана. Поэтому интеграл Меллина выражается через интегралы по линиям наискорейшего спуска с учетом вычетов от полюсов подынтегральной функции, находящихся внутри контура интегрирования Γ . Линии наискорейшего спуска проходят в областях, где $\text{Re } \Psi_1(s) \leq \text{Re } \Psi_1(s_d)$ и $\text{Re } \Psi_2(s) \leq \text{Re } \Psi_2(s_s)$ и определяются дугами эллипса, уравнение которого [2] в случае волны растяжения имеет вид

$$\frac{\tau_0^2 - \xi_0^2}{\varepsilon_1^2 n^2 \xi_0^2} x^2 + \frac{\tau_0^2 - \xi_0^2}{\varepsilon_1^2 n^2 \tau_0^2} y^2 = 1$$

Учитывая, что интеграл по линии γ_1 является комплексно сопряженным с интегралом по линии γ_2 , вклад в тангенциальное усилие точек перевала получим в виде

$$\begin{aligned} T_{1,1}^d &= \frac{\varepsilon^{3/2} \varepsilon_1^{3/2} n^{3/2} \xi_0 (T_d(1-\nu) - \tau_0^2)}{\sqrt{\pi} \tau_0 T_d^{1/4} (T_d \omega^2 - \varepsilon_1^2 n^2 \tau_0^2)} \left(\cos \frac{n\sqrt{T_d}}{\varepsilon^\theta} + \sin \frac{n\sqrt{T_d}}{\varepsilon^\theta} \right) \left[1 + O\left(\frac{\varepsilon^c}{\sqrt{T_d}} \right) \right] \\ T_{1,1}^s &= \frac{\varepsilon^{3/2} \varepsilon_1^{3/2} n^{3/2} \xi_0 T_s^{3/4} \sqrt{2(1-\nu)}}{\sqrt{\pi} \tau_0 (T_s \omega^2 - k^4 \varepsilon_1^2 n^2 \tau_0^2)} \left(\cos \frac{n\sqrt{T_s}}{\varepsilon^\theta} + \sin \frac{n\sqrt{T_s}}{\varepsilon^\theta} \right) \left[1 + O\left(\frac{\varepsilon^c}{\sqrt{T_s}} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$T_d = \tau_0^2 - \xi_0^2, \quad T_s = k^2 \tau_0^2 - \xi_0^2$$

Если контур интегрирования Γ при $R \rightarrow \infty$ содержит внутри себя полюсы подынтегральной функции, которые определяются соотношениями $s_{1,2} = \pm i\omega$, то к решению (2.6) добавляется сумма соответствующих вычетов этих функций в указанных полюсах. Решение для тангенциального усилия, определяемое вычетами $s_{1,2}$, представляется в виде

$$\begin{aligned} T_{1,2}^d &= \left(1 - \frac{(1-\nu)\varepsilon_1^2 n^2}{\omega^2} \right) \cos \left(\omega \frac{\tau_0}{\varepsilon^c} - \sqrt{\omega^2 - \varepsilon_1^2 n^2} \frac{\xi_0}{\varepsilon^c} \right) \\ T_{1,2}^s &= - \frac{(1-\nu)\varepsilon_1^2 n^2}{\omega^2} \cos \left(\omega \frac{\tau_0}{\varepsilon^c} - \sqrt{k^2 \omega^2 - \varepsilon_1^2 n^2} \frac{\xi_0}{\varepsilon^c} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Решения (2.7) определяют установившиеся колебания. Полюс $s_0 = 0$ определяет вклад в решение в окрестности торца квазистатической составляющей:

$$T_{1,0} = \frac{(1-\nu)\varepsilon_1^2 n^2}{\omega^2} \exp \left(- \frac{n\xi_0}{\varepsilon^c} \right) \quad (2.8)$$

Это слагаемое экспоненциально затухает при движении от торца по продольной координате вглубь оболочки. Таким образом, окончательное решение представится в виде

$$T_1^d = T_{1,0} + T_{1,1}^d + T_{1,2}^d, \quad T_1^s = -T_{1,0} + T_{1,1}^s + T_{1,2}^s \quad (2.9)$$

3. Асимптотика в окрестности критических точек. Рассмотрим случай, когда точка перевала, находящаяся на мнимой оси комплексной плоскости параметра s , приближается к полюсу и находится в достаточно малой окрестности полюса или совпадает с ним. Такая ситуация может возникнуть при некоторых значениях временной коор-

динаты τ_0 и продольной координаты ξ_0 . Геометрическое место слияния точки перевала и полюса на плоскости параметра преобразования Лапласа назовем критическим значением параметра s и обозначим s^{cr} .

Значению s^{cr} соответствует множество точек на фазовой плоскости $(\tau_0^{cr}, \xi_0^{cr})$, удовлетворяющих уравнению метода перевала при $s = s^{cr}$, и для которых выполняются равенства $\omega\sqrt{T_d} - \varepsilon_1 n \tau_0 = 0$ в случае волны растяжения и $\omega\sqrt{T_s} - k^2 \varepsilon_1 n \tau_0 = 0$ в случае волны сдвига. Точки $(\tau_0^{cr}, \xi_0^{cr})$ будем называть критическими точками. При слиянии полюса и точек перевала знаменатели в решении (2.6) обращаются в ноль и значение главного члена асимптотического решения, полученного по методу перевала второго порядка приближения при стремлении точки перевала к полюсу начинает резко возрастать. Поэтому для построения решения в этих областях фазовой плоскости необходимо использовать другие методы обращения изображений.

Критические точки на фазовой плоскости определяются соотношениями: $\xi_0^{cr} = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon_1^2 n^2 \tau_0^{cr}} / \omega$ — для волны растяжения и $\xi_0^{cr} = \sqrt{\omega^2 - k^2 \varepsilon_1^2 n^2 \tau_0^{cr}} / \omega$ — для волны сдвига. Появление критических точек на фазовой плоскости возможно только при условиях $\omega > \varepsilon_1 n$ и $\omega > \varepsilon_1 n / k$ для соответствующих типов волн.

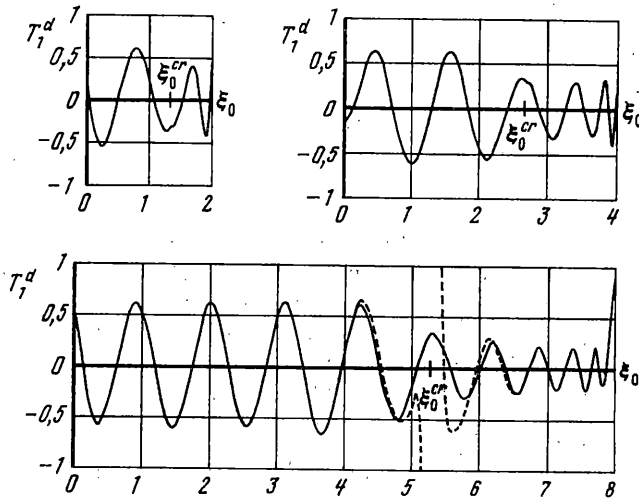
Будем использовать теорему модифицированного метода перевала [3] для случая слияния точки перевала и полюса. Введение малого параметра $\mu = s_{1,2} - s_{d,s}$ и дальнейшая замена переменной $s = s^* - \mu \pm i\omega$ в (2.3) позволяет уточнить построение решений (2.6), полученных с использованием обычного метода перевала. Уточненные в окрестности критических точек решения получены в виде

$$\begin{aligned}
 T_{1,1}^d &= \pm \frac{(\varepsilon_1 n)^{5/2} \xi_0^{3/2} (T_d(1-\nu) - \tau_0^2)}{\tau_0 T_d^{3/4} (\omega^2 - \varepsilon_1^2 n^2)^{3/4} (\varepsilon_1 n \tau_0 + \omega\sqrt{T_d})} [\cos(m_1)(1 - C(\mp k_1)) - S(\mp k_1)] + \\
 &+ \sin(m_1)(C(\mp k_1) - S(\mp k_1)) + T_{1,2}^d \left[1 + O\left(\frac{\varepsilon^c}{\sqrt{T_d}}\right) \right] \\
 T_{1,1}^s &= \pm \frac{2k^{3/2} (\varepsilon_1 n)^{5/2} \xi_0^{3/2} T_s^{1/4}}{\tau_0 (\omega^2 - k^2 \varepsilon_1^2 n^2)^{3/4} (k^2 \varepsilon_1 n \tau_0 + \omega\sqrt{T_s})} [\cos(m_2)(1 - C(\mp k_2)) - S(\mp k_2)] + \\
 &+ \sin(m_2)(C(\mp k_2) - S(\mp k_2)) + T_{1,2}^s \left[1 + O\left(\frac{\varepsilon^c}{\sqrt{T_s}}\right) \right] \\
 k_1 &= \frac{\varepsilon_1 n \sqrt{\xi_0} (\varepsilon_1 n \tau_0 - \omega\sqrt{T_d})}{\sqrt{\pi \varepsilon^c T_d} (\omega^2 - \varepsilon_1^2 n^2)^{3/4}}, \quad m_1 = \varepsilon^{-\theta} n \sqrt{T_d} + \frac{\pi}{2} k_1^2 \\
 k_2 &= \frac{\varepsilon_1 n \sqrt{k \xi_0} (k^2 \varepsilon_1 n \tau_0 - \omega_0 \sqrt{T_s})}{\sqrt{\pi \varepsilon^c T_s} (\omega^2 - k^2 \varepsilon_1^2 n^2)^{3/4}}, \quad m_2 = \varepsilon^{-\theta} n \sqrt{T_s} + \frac{\pi}{2} k_2^2
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $C(x)$ и $S(x)$ — интегралы Френеля вида

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$$

В формулах (3.2) верхний знак выбирается при $\xi_0 \leq \xi_0^{cr}$, а нижний — при $\xi_0 > \xi_0^{cr}$. Слагаемые $T_{1,2}^d$ и $T_{1,2}^s$ входят в общее решение только при $\xi_0 < \xi_0^{cr}$, когда полюсы



Фиг. 2

находятся внутри контура интегрирования (они определяют установившуюся часть решения). Асимптотический анализ показал, что при $|\xi_0 - \xi_0^{cr}| \geq \varepsilon^c$ решение (3.1) сравнивается с решением (2.6).

На фиг. 2 сплошной линией изображены графики функции T_1^d , построенные по совокупности асимптотик (2.9), (3.1) при следующих значениях механических параметров: $\nu = 0,3$; $\varepsilon = 0,01$; $n = 1$; $\omega = 1$, $\theta = 0,4$; $c = 0,5$. Картина эволюции возмущения в начальной стадии процесса показывает переходный волновой процесс в моменты времени $\tau_0 = 2; 4; 8$. В окрестности критических точек решение (2.6), изображенное пунктирной линией, испытывает скачок, который сглаживается с помощью формул (3.1). Фронт волны растяжения распространяется со скоростью c_3 .

Передняя часть сигнала – так называемый предвестник – имеет малую амплитуду и высокую частоту. Расположенный в области $\xi_0 \geq \xi_0^{cr}$, он описывается в области $\xi_0 < \tau_0$ (для волн растяжения) и в области $\xi_0 < k\tau_0$ (для волн сдвига) безмоментной составляющей; далее, с ростом координаты, – динамическим погранслоем. В следующем пункте статьи будет описано построение решения для предвестника в малой окрестности квазифронта.

Вслед за предвестником прибывает основная часть сигнала, которая соответствует установившемуся решению. Скорость, с которой прибывает основная часть сигнала, всегда меньше c_3 . Процесс установления сигнала характеризуется ростом амплитуды. Время прихода основной части сигнала на заданном расстоянии от торца оболочки можно определить из соотношения

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{\omega^2 + \varepsilon_1^2 n^2}}{\omega} \tau_0 \quad (3.2)$$

Исследуя полученные решения, можно сделать следующие выводы. При $\tau_0 \rightarrow \infty$ решение за критической точкой в асимптотически главном определяется формулами

$$T_1^d = \frac{(1-\nu)\varepsilon_1^2 n^2}{\omega^2} \exp\left(-\frac{n\xi_0}{\varepsilon^c}\right) + \left(1 - \frac{(1-\nu)\varepsilon_1^2 n^2}{\omega^2}\right) \cos\left(\frac{\omega\tau_0}{\varepsilon^c} - \sqrt{\omega^2 - \varepsilon_1^2 n^2} \xi_0 / \varepsilon^c\right)$$

$$T_1^s = -\frac{(1-\nu)\varepsilon_1^2 n^2}{\omega^2} \exp\left(-\frac{n\xi_0}{\varepsilon^c}\right) + \frac{(1-\nu)\varepsilon_1^2 n^2}{\omega^2} \cos\left(\frac{\omega\tau_0}{\varepsilon^c} - \sqrt{k\omega^2 - \varepsilon_1^2 n^2} \xi_0 / \varepsilon^c\right)$$

для волн растяжения и сдвига, соответственно. Эти формулы характеризуют установившееся решение. Они входят в него для фиксированных моментов времени при $\xi_0 < \xi_0^{cr}$ и отсутствуют при $\xi_0 > \xi_0^{cr}$. Таким образом, физический смысл критических точек состоит в следующем: они определяют границу на фазовой плоскости, разделяющую область установившегося решения, имеющего характер незатухающих вынужденных колебаний, от области нестационарного решения, имеющего место в окрестности фронтов волн.

Область критической точки можно трактовать как область возникновения резонанса. В точку, заданную координатой ξ_0^{cr} , приходят те частоты спектра сигнала, которые совпадают с частотой возбуждающей нагрузки ω_0 . Здесь происходит резкое увеличение амплитуды. Изменяемость огибающей решения (2.6) увеличивается. Дисперсия среды становится существенной в области частот, близких к резонансным. В области этих частот отклик среды на заданное воздействие запаздывает со временем относительно квазифронта.

4. Динамический погранслой в окрестности квазифронта. Решение (2.9) показывает, что на квазифронте, который воспринимается двумерной теорией Кирхгофа – Лява как фронт волны растяжения, передается разрыв решения первого рода для напряжений. Это противоречит точной трехмерной теории. Теория динамического погранслоя позволяет сгладить разрыв решения на квазифронте.

Для определения НДС цилиндрической оболочки в окрестности квазифронта вместо общих уравнений теории динамического погранслоя будем использовать уточненные уравнения классической двумерной теории оболочек. При этом в уравнениях движения (1.1) следует уточнить инерцию продольной и сдвиговой волн производными по времени более высоких порядков в соответствии с предложенным в [5]. Такое уточнение позволит расширить область применимости теории Кирхгофа – Лява.

Согласно [5] в уравнениях (1.1) положим

$$I_u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_1 \left(\frac{h}{c_2} \right)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + d_2 \left(\frac{h}{c_2} \right)^4 \frac{\partial^6 u}{\partial t^6}$$

$$I_v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + d_1 \left(\frac{h}{c_2} \right)^2 \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + d_2 \left(\frac{h}{c_2} \right)^4 \frac{\partial^6 v}{\partial t^6} \quad (4.1)$$

$$d_1 = -\frac{v^2}{6(1-v)}, \quad d_2 = \frac{v^2(6-10v+3v^2)}{180(1-v^2)}$$

где $c_2 = \sqrt{E/[2(1+\nu)\rho]}$ – скорость волны сдвига.

Произведем уже известную операцию масштабирования с использованием показателей изменяемости. Переходя в уравнениях (4.1) к безразмерной форме компонент усилий и перемещений и производя разделение переменных в соответствии с (1.4), для цилиндрической оболочки получим

$$\frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} + \varepsilon^{1-\theta} n S - \varepsilon^{-1} k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau_1^2} + d_1 \frac{\partial^4 u}{\partial \tau_1^4} + d_2 \frac{\partial^6 u}{\partial \tau_1^6} \right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \xi_1} - \varepsilon^{1-\theta} n T_2 - \varepsilon^{-1} k^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \tau_1^2} + d_1 \frac{\partial^4 v}{\partial \tau_1^4} + d_2 \frac{\partial^6 v}{\partial \tau_1^6} \right) = 0 \quad (4.2)$$

Соотношения упругости (1.9) примут вид

$$T_1 = \varepsilon^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \varepsilon^{1-\theta} \nu n v \right), \quad T_2 = \varepsilon^{-1} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \varepsilon^{1-\theta} n v \right) \quad (4.3)$$

$$T_2 = \varepsilon^{-1} k^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \xi_1} \varepsilon^{1-\theta} n u \right), \quad \xi_1 = \frac{\alpha}{h}, \quad \tau_1 = \frac{c_2}{h} t$$

Подставляя (4.3) в (4.2), получим разрешающие уравнения движения в перемещениях

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} - k^2 \varepsilon_2^2 n^2 u - k^2 \chi_u^2 + \varepsilon_2 n \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial v}{\partial \xi_1} = 0$$

$$-\varepsilon_2 n \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} - \varepsilon_2^2 n^2 v - k^2 \chi_v^2 = 0 \quad (4.4)$$

$$\chi_u^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau_1^2} + d_1 \frac{\partial^4 u}{\partial \tau_1^4} + d_2 \frac{\partial^6 u}{\partial \tau_1^6}$$

$$\chi_v^2 = \frac{\partial^2 v}{\partial \tau_1^2} + d_1 \frac{\partial^4 v}{\partial \tau_1^4} + d_2 \frac{\partial^6 v}{\partial \tau_1^6}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon^{1-\theta}$$

Граничные условия на торце в безразмерной форме записываются в виде

$$T_1 = H(\tau_1) \cos(\varepsilon_3 k \omega \tau_1), \quad v = 0, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon^{1-c} \quad (4.5)$$

Поставленную краевую задачу так же, как и при исследовании безмоментной составляющей, будем решать, используя аппарат преобразования Лапласа. Характеристическое уравнение для преобразованной по Лапласу системы уравнений (4.4) получено в виде

$$\lambda^4 - \left(2\varepsilon_2^2 n^2 + \frac{3-\nu}{2} \chi^2 \right) \lambda^2 + \varepsilon_2^4 n^4 + \frac{3-\nu}{2} \varepsilon_2^2 n^2 \chi^2 + \frac{1-\nu}{2} \chi^4 = 0$$

$$\chi^2 = s^2 + d_1 s^4 + d_2 s^6 \quad (4.6)$$

Из четырех корней уравнения (4.6) выберем два с отрицательной действительной частью:

$$\lambda_1 = -\sqrt{\varepsilon_2^2 n^2 + k^2 \chi^2}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\varepsilon_2^2 n^2 + \chi^2} \quad (4.7)$$

Решение в изображениях имеет вид

$$T_1^L = \frac{(2\varepsilon_2^2 n^2 + \chi^2) s}{\chi^2 (s^2 + \varepsilon_3^2 \omega^2)} \exp(-\sqrt{\varepsilon_2^2 n^2 + k^2 \chi^2} \xi_1) - \frac{2\varepsilon_2^2 n^2 s}{\chi^2 (s^2 + \varepsilon_3^2 \omega^2)} \exp(-\sqrt{\varepsilon_2^2 n^2 + \chi^2} \xi_1) \quad (4.8)$$

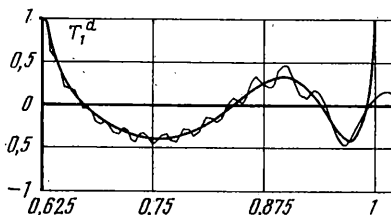
Анализ показывает, что на фронте волны сдвига разрывов решения не наблюдается. Поэтому будем проводить исследования для волны растяжения, пытаясь сгладить возникающий в окрестности квазифронта разрыв решения, т.е. будем рассматривать второе слагаемое. Оригинал решения представим в виде

$$T_1^d = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(s) \exp[\Psi(s)M] ds$$

$$F(s) = \frac{(2\varepsilon_2^2 n^2 + \chi^2) s}{(s^2 + \varepsilon_3^2 \omega^2) \chi^2}, \quad \Psi(s) = s k \tau_0 - \sqrt{\varepsilon_3^2 n^2 + k^2 \chi^2} \xi_0 \quad (4.9)$$

где $M = 1/\varepsilon$ – большой параметр. Для удобства построения графиков мы перешли к координатам ξ_0, τ_0 , которые связаны с координатами ξ_1, τ_1 соотношениями $\xi_1 = \xi_0/\varepsilon, \tau_1 = k\tau_0/\varepsilon$.

Решение (4.9) представляет собой аппроксимацию вклада первой моды в решение для динамического погранслоя. Наличие большого параметра в показателе степени экспоненты позволяет использовать метод перевала. Используя теорему [3] об асимптотическом представлении интеграла (4.9), решение в окрестности невырожденных точек перевала, которые расположены симметрично относительно вещественной оси комплексной плоскости параметра s и для которых выполняется неравенство $\Psi''(s) \neq 0$, было получено в виде



Фиг. 3

$$T_1^d = \sum_{i=1}^2 \frac{F(s_i)}{\sqrt{\pi M |\Psi''(s_i)|}} [\sin(\Psi(s_i)M) + \cos(\Psi(s_i)M)]$$

$$F(s_i) = \frac{(2\varepsilon_3^2 n^2 + \chi^2(s_i))s_i}{(s_i^2 + \varepsilon_3^2 \omega^2)\chi^2(s_i)}, \quad \chi^2(s_i) = s_i^2 + d_1 s_i^4 + d_2 s_i^6 \quad (4.10)$$

где s_1, s_2 – значения параметра s , находящиеся на мнимой оси по разные стороны от вырожденной точки перевала, которая определяется соотношением

$$s_v = \varepsilon_3^{1/2} (\mu_0 + \varepsilon_3 \mu_1 + \varepsilon_3^2 \mu_2)$$

$$\mu_0 = \left(\frac{n^2}{3|d_1|k^2} \right)^{1/4}, \quad \mu_1 = \frac{3n^2 d_1 + k^2 \mu_0^4 (d_1^2 + 5d_2)}{6k^2 \mu_0 d_1} \quad (4.11)$$

$$\mu_2 = \frac{12n^2 \mu_0 \mu_1 d_1 - 15n^2 \mu_0^4 d_2 - 18k^2 \mu_0^2 \mu_1^2 d_1 + 12k^2 \mu_1 \mu_0^5 (d_1^2 + 5d_2) - 9k^2 \mu_0^8 d_1 d_2}{12k^2 \mu_0^3 d_1}$$

Отметим, что единственному значению вырожденной точки s_v соответствует единственное значение $\chi_v = \chi(s_v)$. В то же время каждому значению χ , отличному от χ_v , будет соответствовать два значения s : s_1 и s_2 , причем $\chi(s_1) = \chi(s_2)$.

В малой окрестности вырожденной точки перевала, в которой вторая производная функция $\Psi(s)$ обращается в ноль, применение формулы (4.10) становится невозможным. В этом случае следует использовать теорему метода перевала третьего порядка приближения. Решение для тангенциального усилия в этой области получено в виде

$$T_1^d = \Gamma [R_1 Ai(z) + R_2 Ai'(z)] \left[1 + O\left(\frac{1}{M}\right) \right]$$

$$R_1 = -\pi \left(\frac{\varepsilon}{4|\Psi'''(s_v)|} \right)^{1/3} [F(s_1) + F(s_2)] \sin(M\Psi(s_v))$$

$$R_2 = \frac{\pi}{\sqrt{|\xi_1^v - \xi_1|}} \left(\frac{\varepsilon^4}{32|\Psi'''(s_v)|} \right)^{1/6} [F(s_1) + F(s_2)] \cos(M\Psi(s_v)) \quad (4.12)$$

$$z = - \left(\frac{2}{\varepsilon^2 |\Psi'''(s_0)|} \right)^{1/3} \Psi'(s_v)$$

Значение продольной координаты ξ_0^v , соответствующее значению s_v , вычисляется из соотношения $\Psi'(s) = 0$ и было получено в виде $\xi_0^v = k\tau_0 / \chi'(s_v)$.

На фиг. 3 представлен график, изображающий поведение функции T_1^d в окрестности квазифронта при $\nu = 0,3$; $\epsilon = 0,01$; $n = 1$; $\omega = 1$; $\theta = 0,4$; $d = 0,5$; $\tau_0 = 1$. Жирной линией на рисунке представлено решение, полученное по формуле (2.9), тонкой линией – решение по формулам (4.10) и (4.12). На приведенных графиках хорошо видна сращиваемость асимптотических решений, полученных разными методами. В области за квазифронтом асимптотически главная часть решения, полученного из уравнений с приведенной инерцией, совпадает с асимптотически главной частью решения для безмоментной составляющей. Численные расчеты наглядно продемонстрировали, как погранслои сглаживает разрыв двумерного решения на квазифронте, осциллируя вокруг двумерного решения и как согласуются решения по методам перевала второго и третьего порядков приближения.

Эта статья поддержана INTAS грантом номер 96-2113.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. Коссович Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1986. 176 с.
3. Федорюк М.В. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
4. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of thin walled elastic bodies. San-Diego: Academic Press, 1998. 226 p.
5. Kaplunov J.D. On the quasi-front in two-dimensional shell theories // C.R. Acad. Sci/Paris. 1991. T. 313. Série II. P. 731–736.
6. Proud J.M., Tamarkin P., Kornhauser E.T. Propagation of sound pulses in a dispersive medium // J. Acoust. Soc. 1956. V. 28. No. 1. P. 80–85.
7. Walther K. Pulse compression in an acoustic waveguide // J. Acoust. Soc. 1961. V. 33. No. 5. P. 681–686.

Москва,
Саратов

Поступила в редакцию
29.01.1998