МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2000

УДК 539.3

© 2000 г. ПИКУЛЬ В.В.

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК И ПЕРСПЕКТИВЫ ЕЕ РАЗВИТИЯ

Рассмотрены основные направления развития теории оболочек с позиции их соответствия законам физики. Выделено физически состоятельное направление. Определены перспективы развития.

1. Введение. Теория оболочек представляет собой раздел прикладной механики деформируемого твердого тела, имеющий обширную область практического приложения. Ей посвящено несколько десятков тысяч публикаций. Написано большое количество обзоров литературы, в которых рассмотрены общие и частные вопросы теории в различные промежутки ее развития. Так, например, в книге [1] приведен обзор литературы за период с 1967 г. по 1985 г., который включает 621 наименование. Обзор отечественной и зарубежной литературы более раннего периода содержится в [2–5].

За последнее десятилетие состоялось большое количество всевозможных конференций, симпозиумов и семинаров, в том числе пять специализированных конференций по теории оболочек и пластин, на которых заслушано несколько сотен докладов. Так, например, в трех томах трудов XVIII Международной конференции по теории оболочек и пластин, проходившей осенью 1997 в. в г. Саратове, опубликовано 88 докладов [6]. Вышло в свет несколько десятков монографий по различным аспектам теории оболочек, часть из которых приведена в списке цитируемой литературы [7–15]. Опубликовано несколько сотен статей во всевозможных сборниках научных трудов и в научных журналах. И тем не менее, основной задачей сегодняшнего дня является не подготовка очередного обзора, необходимость в котором не вызывает сомнения, а анализ современного состояния теории оболочек с точки зрения перспектив ее развития.

Появление и широкое внедрение в различные отрасли техники композитных материалов слоистой и волокнистой структуры вызвало необходимость в разработке новых методов расчета и проектирования оболочечных тел и конструкций, изготовляемых из этих материалов. Оказалось, что классическая теория, которая до этого безраздельно господствовала в прикладных методах расчета тонкостенных конструкций, не способна удовлетворительно описать напряженно-деформированное состояние композитных оболочек. За последние 50 лет предложено огромное количество различных вариантов теории трехслойных [16], многослойных [17, 18] и композитных оболочек волокнистой структуры [19, 20]. Основное отличие нового подхода заключается в учете поперечных деформаций и, прежде всего, деформаций поперечного сдвига. Исторически первый вариант сдвиговой теории был построен в 1944 г. Э. Рейсснером (E. Reissner) применительно к упругим пластинам [21]. Последующий период характеризуется накоплением новых идей и способов учета поперечных деформаций. Продолжились попытки решения задач механики оболочек в трехмерной постановке [22].

В принципе любую задачу механики оболочек можно решать в трехмерной постановке, которая является более точной в сравнении с двумерной постановкой теории оболочек. Однако реализовать на практике эту принципиальную возможность в требуемом объеме не удается вследствие чрезмерной сложности решения трехмерных задач и большого разнообразия практически необходимых постановок задачи. Известны оценки трудоемкости решения одно, двух и трехмерных краевых задач, согласно которым повышение размерности задачи на единицу повышает трудоемкость решения в 1000 раз [23]. Применительно к задачам механики деформируемого твердого тела эти оценки представляются заниженными, поскольку даже в простейшей ее ветви – в теории упругости, многие задачи в точной постановке остаются практически неразрешимыми [24].

Поведение оболочечных тел, подчиняясь общим законам механики деформируемого твердого тела, зависит также от специфически присущих им закономерностей [25]. Вследствие относительной малости толщины сопротивление оболочки в поперечном направлении существенно слабее сопротивления в тангенциальных направлениях. Уравнения состояния механики трехмерного тела, в том числе и уравнения закона Гука, не учитывают этого обстоятельства. Поэтому их формальное использование в теории оболочек может привести к существенной ошибке [26]. Специфические закономерности деформирования оболочечных тел являются физической предпосылкой к построению теории оболочек.

Перед тем, как перейти к непосредственному анализу существующих направлений развития теории оболочек, уточним основные понятия и установим общие принципы оценки физической состоятельности теории. По определению теория любого реального объекта или явления не может входить в противоречие с законами физики. Поскольку оболочка – это реальное тело, то математическое описание поведения оболочки может быть признано теорией только в случае его полного соответствия законам физики макромира. Для сплошных сред, к которым относятся оболочечные тела, это означает полное выполнение уравнений равновесия (движения), неразрывности среды, геометрии перемещений и общих начал термодинамики в каждой внутренней точке оболочки и уравнений равновесия на ее краевых поверхностях [27]. Применительно к слоистым оболочкам добавляются условия сопряжения слоев.

Приведем трехмерную постановку краевой задачи упругой изотропной пластины постоянной толщины в случае пренебрежения объемными силами, геометрической и физической нелинейностями:

$$x_i \in V: \quad \sigma_{ij,j} = 0, \quad 2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i},$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right) \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

$$z = -h/2: \quad \sigma_{\alpha 3} = 0, \quad \sigma_{33} = -q_{33}^{-}; \quad z = h/2: \quad \sigma_{\alpha 3} = 0, \quad \sigma_{33} = q_{33}^{+} \quad (\alpha = 1, 2) \tag{1.2}$$

$$x_i \in S \;\; (n_3 = 0): \quad \sigma_{i\beta} n_\beta = q_i \quad (\beta = 1, 2) \tag{1.3}$$

где σ_{ij}, ε_{ij}, u_i – компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещений; E, ν – модуль нормальной упругости и коэффициент Пуассона; $q_{33}^{-(+)}$, q_i – плотности внешней нагрузки, распределенные по лицевым ($z = \pm h/2$) и торцевой ($n_3 = 0$) поверхностям; h, S, V – толщина, площадь торцевой поверхности и внутренний объем пластины; n_i – направляющие косинусы краевых поверхностей пластины. Общая постановка краевых задач механики деформируемого твердого тела содержится в [9].

Трехмерная постановка краевой задачи (1.1)–(1.3) позволяет проанализировать современные варианты теории оболочек наиболее простыми и обозримыми средствами. При этом используется установившаяся классификация вариантов теории оболочек по признаку учета поперечных деформаций. Учет геометрической и физической нелинейностей, кривизны поверхности и других, очень важных для теории и практики характеристик оболочки на современном этапе развития теории является делом техники. Имеется многочисленная литература, в том числе обзорного характера, в которой рассматриваются и обсуждаются различные способы ввода их в теорию оболочек [1].

Следуя И.И. Воровичу [28], разобьем известные варианты теории оболочек на две группы. В первую группу объединим те из них, которые получены в результате некоторых регулярных процессов, сходящихся в каком-то смысле к исходной трехмерной задаче. Ко второй группе отнесем варианты теории, основанные на определенных допущениях и гипотезах, которые, по мнению их авторов справедливы для пластин и оболочек малой толщины. В каждой из этих групп определились свои направления. Существующие варианты теории оболочек обсудим с позиций концепции сплошных сред с внутренними связями [29]. Это позволит рассматривать различные модели оболочек в виде трехмерных тел, к которым без каких-либо оговорок применены законы физики и вариационные принципы.

2. Классическая теория оболочек. Классическая теория оболочек является естественным продолжением классической теории пластин, в которой учтены геометрические отличия формы поверхности. Основным этапам развития классической теории посвящены многочисленные публикации в отечественной и зарубежной печати. В настоящее время идет дискуссия по классической теории пластин [30–40], которую открыл в 1992 г. на страницах журнала Изв. АН. МТТ В.В. Васильев статьей обзорного характера [30].

Рассмотрим классическую теорию с позиций концепции сплошных сред с внутренними связями [29]. Предположим, что на упругий изотропный материал наложены внутренние связи, не допускающие поперечных деформаций. Тем самым произведем замену исходного материала неким абстрактным трансверсально изотропным материалом, обладающим бесконечно большой жесткостью на растяжение – сжатие в поперечном направлении и на поперечный сдвиг. В результате придем к одному из известных приемов обоснования физической состоятельности соотношений упругости и гипотез классической теории [30]. С позиции концепции сплошных сред с внутренними связями соотношения упругости и гипотезы классической теории:

$$\sigma_{\alpha\gamma}=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{\alpha\gamma}+\nu\varepsilon_{\delta\lambda});\quad \sigma_{12}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12}\quad (\alpha=\gamma\neq\delta=\lambda;\quad \alpha,\gamma,\delta,\lambda=1,2) \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_{13}=0\ (i=1,2,3) \tag{2.2}$$

можно рассматривать в качестве соотношений упругости трехмерного тела с внутренними связями, не допускающими поперечных деформаций.

Гипотезы классической теории позволяют легко проинтегрировать уравнения теории упругости (1.1) и в случае отсутствия продольных сил свести их к бигармоническому уравнению теории пластин и соотношениям, определяющим перемещение и напряженное состояние пластины. Соответствующий метод содержится в многочисленных публикациях. Поэтому, опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат в форме, удобной для проверки физической корректности классической теории:

$$u_\alpha=-zw_{,\alpha},\quad u_3=w(x_\alpha)\quad (\alpha=1,2) \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=-zw_{,\alpha\beta}\quad (\alpha,\beta=1,2);\quad \varepsilon_{i3}=0\quad (i=1,2,3) \tag{2.4}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}=-\frac{Ez}{1-\nu^2}(w_{,\alpha\gamma}+\nu w_{,\delta\lambda}),\quad \sigma_{12}=-\frac{Ez}{1+\nu}w_{,12},\quad \sigma_{\alpha3}=-\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{4}-z^2\right)\Delta w_{,\alpha}$$

$$\sigma_{33}=-q_{33}^{-}+\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^3}{12}+\frac{h^2}{4}z-\frac{z^3}{3}\right)\Delta\Delta w\quad (\alpha=\gamma\neq\delta=\lambda) \tag{2.5}$$

$$\Delta\Delta w=12\frac{1-\nu^2}{Eh^3},\quad q=q_{33}^{-}+q_{33}^{+} \tag{2.6}$$

Из выражений (2.3)–(2.6) видно, что по одной двумерной функции прогиба w в классической теории восстанавливается трехмерность перемещений и напряженно-деформированного состояния пластины. Элементарная подстановка выражений (2.3)–(2.6) обращает уравнения равновесия и геометрии перемещений (1.1) в тождества. Это означает, что последние уравнения полностью удовлетворяются в каждой внутренней точке пластины, а бигармоническое уравнение (2.6) является точным решением трехмерных уравнений теории упругости для абстрактного материала, задаваемого уравнениями упругости (2.1) при внутренних связях (2.2). Простой подстановкой легко убедиться и в полном выполнении краевых условий (1.2) на лицевых поверхностях пластины.

Для постановки двумерной краевой задачи остались трехмерные краевые условия на торцевой поверхности пластины (1.3). Двумерные краевые условия получим, обеспечив их полную эквивалентность заданной краевой нагрузке, с точки зрения их воздействия на пластину. Краевые силы, воздействуя на пластину, совершают работу на ее возможных перемещениях. Пластина воспринимает эту работу через внутренние силы. На основании закона сохранения энергии работа внутренних сил должна равняться работе внешних краевых сил на возможных перемещениях торцевой поверхности:

$$\int_S (\sigma_{i\beta} n_\beta - q_i)\delta u_i dS = 0 \qquad (2.7)$$

где с помощью (2.3) находятся вариации перемещения пластины

$$\delta u_\alpha = -z\delta w_{,\alpha}, \quad \delta u_3 = \delta w \qquad (2.8)$$

Равенства (2.8) сводят условие эквивалентности без какой-либо погрешности к виду

$$\int_\tau [(Q_\beta n_\beta - Q^\circ)\delta w - (M_{\alpha\beta} n_\beta - M_\alpha^\circ)\delta w_{,\alpha}]d\tau = 0 \qquad (2.9)$$

где $M_{\alpha\beta}$, Q_β – внутренние моменты и поперечные силы; M_α°, Q° – равнодействующие заданных на торцевой поверхности сил; τ – контурная линия, представляющая собой след пересечения координатной (срединной) плоскости с торцевой поверхностью. В силу линейной независимости возможных перемещений в каждой точке контурной линии находятся по три краевых условия:

$$Q_\beta n_\beta = Q^\circ \vee w = w^\circ, \quad M_{\alpha\beta} n_\beta = M_\alpha^\circ \vee w_{,\alpha} = w_{,\alpha}^\circ \quad (\alpha = 1, 2) \qquad (2.10)$$

Эти условия обычно находят с помощью вариационных принципов. Они получили название естественных краевых условий. Равнодействующие заданной краевой нагрузки полностью определяют главный вектор и главный момент краевых сил. Отсюда следует, что они отличаются от заданных сил лишь самоуравновешивающими составляющими.

Покажем физическую состоятельность наложения жестких связей на материал пластины, которые не допускают поперечных деформаций, т.е. правомерность сведения уравнений закона Гука к соотношениям (2.1) и (2.2) с позиций их соответствия началам термодинамики. Поскольку в исходных уравнениях теории упругости (1.1)–(1.3) не учитывается влияние температурных полей, то можно считать, что рассматривается адиабатический процесс деформирования. Поэтому начала термодинамики сводятся к одному закону сохранения механической энергии [27], который приводится к виду

$$\int_V \sigma_{ij,j}\delta u_i dV - \int_\Omega (\sigma_{ij} n_i - q_i)\delta u_i d\Omega = 0 \qquad (2.11)$$

где Ω – полная краевая поверхность пластины, включающая лицевые (1.2) и торцевую (1.3) поверхности. Для материала пластины с жесткими связями (2.2) оказались полностью удовлетворенными уравнения равновесия (1.1) и краевые условия на лицевых поверхностях (1.2). Вследствие этого объемный интервал (2.11) тождественно равен нулю, а поверхностный интеграл точно сводится к интегралу (2.7) на действительных перемещениях. Поэтому при краевых условиях (2.10) обеспечивается полное удовлетворение закона сохранения энергии (2.11).

Таким образом, уравнения классической теории (2.6) и двумерные краевые условия (2.10) построены в полном соответствии с законами физики, что подтверждает физическую состоятельность классической теории. Бигармоническое уравнение классической теории (2.6) при краевых условиях (2.10) является точным для абстрактного материала с соотношениями упругости (2.1) при внутренних связях (2.2). Однако это переопределенная задача, которая в общем случае оказывается неразрешимой. Введение обобщенной поперечной силы Кирхгофа приводит краевые условия в соответствие с бигармоническим уравнением, но это достигается путем введения в теорию дополнительной погрешности. Обоснованию введения обобщенной поперечной силы Кирхгофа посвящено большое количество работ. Не обошли своим вниманием обобщенную силу и участники дискуссии по теории оболочек [30, 31, 36, 38].

Погрешность использования классической теории для расчета пластин и оболочек из реального материала определяется мерой близости реального и абстрактного материалов и погрешностью преобразования краевых условий, связанных с введением обобщенной поперечной силы Кирхгофа. Первая оценка погрешности классической теории произведена В.В. Новожиловым и Р.М. Финкельштейн [41], которая основывается на геометрических особенностях оболочки. Х.М. Муштари и К.З. Галимов [42] получили оценку, исходя из физических соображений. Оценка А.А. Гольденвейзера [43] получена методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости и в отличие от оценки [41] учитывает изменяемость напряженного состояния в оболочке. Классическая теория пластин и оболочек проверена временем и для ее использования имеется широкое поле практического приложения. Однако физическую стройность классической теории нарушает необходимость введения поперечной силы Кирхгофа. Избавиться от этого недостатка можно путем учета деформаций поперечного сдвига.

3. Сдвиговая теория оболочек. Как уже отмечалось, впервые сдвиговый вариант теории пластин был построен Э. Рейснером [21]. Затем последовали варианты Генки (H. Henchy) [44], Уфлянда Я.С. [45], Б.Ф. Власова [56], С.А. Амбарцумяна [47], М.П. Шереметьева и Б.А. Пелеха [48] и т.д. Современное изложение сдвиговой теории пластин приведено в статье В.В. Васильева [30]. Методы построения сдвиговой теории пластин были естественным образом перенесены на оболочки [8, 49–55]. В сдвиговой теории оболочек поперечные деформации растяжения – сжатия принимаются равными нулю. Для учета деформаций поперечного сдвига используются различные приемы. Здесь воспользуемся концепцией сплошных сред с внутренними связями [29], которая позволяет получить физически состоятельный вариант сдвиговой теории. С этой целью преобразуем уравнения закона Гука изотропного материала к виду:

$$\sigma_{\alpha\gamma} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{\alpha\gamma} + \nu\varepsilon_{\delta\lambda}) \quad (\alpha = \gamma \neq \delta = \lambda), \qquad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\beta}\varepsilon_{12} \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \gamma_\alpha, \quad \gamma_\alpha = \frac{1}{h}\int_h \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\alpha 3}dz, \quad \varepsilon_{33} = 0 \tag{3.2}$$

Соотношения упругости (3.1) и равенства (3.2) получены путем устремления поперечного модуля нормальной упругости трансверсально изотропного материала [30] к бесконечности ($E' \to \infty$) и осреднения деформаций поперечного сдвига по толщине пластины при минимальном среднеквадратичном отклонении осредненных деформаций от деформаций, определяемых законом Гука. Выражения (3.1), (3.2) будем трактовать, как соотношения упругости трехмерного тела с внутренними связями, не допускающими растяжения-сжатия пластины по толщине и сдерживающими поперечный сдвиг таким образом, что поперечные нормали в процессе деформации остаются прямолинейными, но повернутыми на относительные углы сдвига $2\gamma_\alpha$.

Для абстрактного материала с соотношениями упругости (3.1) и внутренними связями (3.2) трехмерная краевая задача (1.1)–(1.3) точно сводится к двумерной краевой задаче. Основные соотношения и уравнения изгиба пластины могут быть представлены в виде:

$$u_\alpha = z\theta_\alpha, \quad \theta_\alpha = 2\gamma_\alpha - w_{,\alpha}, \quad u_3 = w(x_\alpha) \tag{3.3}$$

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = z(\theta_{\alpha,\beta} + \nu\theta_{\beta,\alpha}), \quad \varepsilon_\alpha = \gamma_\alpha, \quad \varepsilon_{33} = 0 \tag{3.4}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma} = \frac{Ez}{1-\nu^2}(\theta_{\alpha,\gamma} + \nu\theta_{\delta,\lambda}), \quad \sigma_{12} = \frac{Ez}{2(1+\nu)}(\theta_{1,2} + \nu\theta_{2,1})$$

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^3}{12} - z^2\right)\left(\theta_{\alpha,\gamma\gamma} + \frac{1-\nu}{2}\theta_{\alpha,\lambda\lambda} + \frac{1+\nu}{2}\theta_{\delta,\alpha\lambda}\right)$$

$$\sigma_{33} = -q_{33}^{-} - \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^3}{12} + \frac{h^2}{4}z - \frac{z^3}{3}\right)\Delta\theta_{\alpha,\alpha} \tag{3.5}$$

$$\Delta\Delta w = 12\frac{1-\nu^2}{Eh^3}q - 2\frac{1+\nu}{Eh}\Delta q, \quad \gamma_\alpha = \frac{h^2}{12(1-\nu)}\left(\theta_{\alpha,\gamma\gamma} + \frac{1-\nu}{2}\theta_{\alpha,\lambda\lambda} + \frac{1+\nu}{2}\theta_{\delta,\alpha\lambda}\right), \ \Sigma_{\gamma,\lambda} \tag{3.6}$$

$$\theta_\alpha = 2\gamma_\alpha - w_{,\alpha}$$

Пять уравнений (3.6) путем введения потенциальной φ и вихревой ψ функций по правилу:

$$\theta_1 = -\varphi_{,1} + \psi_{,2}, \quad \theta_2 = -\varphi_{,2} - \psi_{,1} \tag{3.7}$$

сводятся к стандартной форме Рейсснерского типа:

$$\Delta\Delta\varphi = 12\frac{1-\nu^2}{Eh^3}q, \quad \frac{h^2}{12}\Delta\psi - \psi = 0 \tag{3.8}$$

Функция прогиба w выражается через потенциальную функцию φ из первых двух уравнений (3.6) и (3.8):

$$w = \varphi - \frac{h^2}{6(1-\nu)}\Delta\varphi \tag{3.9}$$

после чего с помощью равенств (3.7) все параметры напряженно-деформированного состояния пластины (3.3)–(3.5) выражаются через потенциальную φ и вихревую ψ функции. Через них же выражаются и краевые условия. Эта процедура известна [30]. Поэтому здесь ограничимся качественным анализом точности сдвиговой теории в форме (3.3)–(3.6).

Путем элементарной подстановки убеждаемся, что выражения (3.3)–(3.6) полностью удовлетворяют уравнениям равновесия и геометрии перемещений теории упругости (1.1) и краевым условиям на лицевых поверхностях пластины (1.2). Это означает, что уравнения (3.6) являются точными применительно к абстрактному материалу, задаваемому соотношениями упругости (3.1) при внутренних связях (3.2). По пяти двумерным функциям w, γ_α, θ_α или двум функциям φ и ψ, восстанавливается трехмерность перемещений и напряженно-деформированного состояния пластины. Из условия эквивалентности (2.7) следует, что рассматриваемый абстрактный материал воспринимает лишь равнодействующие краевых сил и не реагирует на самоуравновешивающие составляющие. Условия эквивалентности (2.7) позволяют найти двумерные краевые условия, которые дают по три значения в каждой точке контурной линии торцевой поверхности:

$$Q_\beta n_\beta = Q^\circ \vee w = w^\circ, \quad M_{\alpha\beta} n_\beta = M_\alpha^\circ \vee \theta_\alpha = \theta_\alpha^\circ \quad (\alpha = 1,2) \tag{3.10}$$

Двумерная краевая задача (3.6), (3.10) находится в полном соответствии и с законом сохранения энергии (2.11). Следовательно, применительно к абстрактному материалу, описываемому соотношениями упругости (3.1) с внутренними связями (3.2), трехмерная краевая задача теории упругости (1.1)–(1.3) точно сводится к двумерной краевой задаче (3.6), (3.10).

Погрешность рассмотренного варианта сдвиговой теории определяется мерой близости абстрактного материала (3.1), (3.2) к реальному материалу, описываемому законом Гука. Сопоставляя уравнения абстрактного материала классической (2.1), (2.2) и сдвиговой (3.1), (3.2) теорий между собой и с уравнениями закона Гука, видим, что абстрактный материал сдвиговой теории оказывается ближе к реальному материалу в части учета деформаций поперечного сдвига. Более того, сдвиговая теория более точно учитывает и краевые условия. Поэтому рассмотренный вариант сдвиговой теории более точен и физически последовательнее классической теории.

В заключение заметим, что коэффициенты уравнений сдвиговой теории зависят от меры близости абстрактного и реального материалов. Если за меру близости принять величину среднеквадратичного отклонения с весом, то, меняя весовую функцию, можно построить большое разнообразие вариантов сдвиговой теории, которые будут отличаться друг от друга своими коэффициентами. С помощью весовых функций можно учесть неоднородность материала пластины или оболочки по толщине. Однако есть свои достоинства и в случае, когда весовая функция равна единице. В этом случае вводится в теорию осредненная по толщине деформация поперечного сдвига, которая пригодна для описания любой закономерности изменения поперечных деформаций по толщине пластины или оболочки. Такой подход находится в полном соответствии с условиями энергетической согласованности [56]. Подробный анализ теории Рейсснерского типа содержится в статье [30].

Математические направления развития теории оболочек. Математические направления развития теории оболочек ведут свое начало с работ выдающихся математиков О. Коши (A. Cauchy) [57] и С. Пуассона (S. Poisson) [58], опубликованных соответственно в 1828 и в 1829 годах. Обзор работ этого направления содержится в статье А.Л. Гольденвейзера и А.И. Лурье [59], в монографии [60] и статье [61] Н.А. Кильчевского, в статье И.И. Воровича [28]. Коши и Пуассон предопределили общую стратегию построения теории оболочек, в основе которой лежит разложение перемещений, деформаций и напряжений в ряды по поперечной координате. Их последователи продолжили использование степенных рядов [62]. Стали применять ряды по полиномам Лежандра [26], ряды Фурье и тензорные ряды Маклорена [60] и т.п.

Разложение перемещений, деформаций и напряжений в ряды по поперечной координате позволяет понизить размерность уравнений теории упругости на единицу. Но это достигается ценой увеличения числа двумерных уравнений до бесконечности, что имеет свои практические неудобства. Поэтому при построении теории оболочек основное внимание уделяется проблеме редукции бесконечной системы двумерных уравнений к конечной системе. Несколько разных способов такой редукции содержится в монографиях Н.А. Кильчевского [60] и И.Н. Векуа [26]. Характерной особенностью рассматриваемого направления развития теории оболочек является полное удовлетворение закона Гука и геометрии перемещений сплошной среды. Вследствие этого редукция бесконечной системы уравнений к конечной неизбежно входит в противоречие с локальными уравнениями равновесия. Из теорем теории упругости известно, что локальные уравнения равновесия доставляют минимум потенциальной энергии упругого тела, при котором реализуются истинные перемещения [63]. Отсюда следует, что решения редуцированных уравнений могут оказаться близкими к точным только в тех задачах, где нарушения локальных уравнений равновесия незначительны. В противном случае могут иметь место существенные ошибки.

Свыше пятидесяти лет тому назад для построения теории оболочек стали применять асимптотические методы [59], которые превратились в основной инструмент преобразования уравнений классической теории оболочек [43, 14]. Качественный анализ асимптотических методов в теории оболочек произведем на основе статьи А.Л. Гольденвейзера [38].

Перепишем уравнения (1.4) статьи [38] в принятом для нашего изложения в виде

$$\begin{gathered}\sigma_{ij,j}=0,\quad \upsilon_{\alpha,\gamma}=\sigma_{\alpha\gamma}-\nu(\sigma_{\delta\lambda}+\eta^2\sigma_{33}),\quad \upsilon_{3,3}=\eta^2(\eta^2\sigma_{33}-\nu\sigma_{\alpha\alpha})\\ \upsilon_{1,2}+\upsilon_{2,1}=2(1+\nu)\sigma_{12},\quad \upsilon_{\alpha,3}+\upsilon_{3,\alpha}=2(1+\nu)\eta^2\sigma_{\alpha 3}\\ \alpha=\gamma\neq\delta=\lambda\ \ (\alpha,\gamma,\delta,\lambda=1,2;\ i,j=1,2,3)\end{gathered}\tag{4.1}$$

В уравнениях (4.1) использованы безразмерные компоненты тензора напряжений, вектора перемещений и безразмерные декартовы координаты, введенные в статье [38] равенствами (1.1)–(1.3). Малый параметр η определяется равенством $\eta = h/l$, где h – полутолщина, а l – характерный (не малый) размер пластины. В соответствии с правилами асимптотического анализа величины, имеющие множителем малый параметр η^2, в статье [38] приняты равными нулю. Этот прием непосредственно приводит к гипотезам классической теории оболочек:

$$\upsilon_{\alpha,\gamma}=\sigma_{\alpha\gamma}-\nu\sigma_{\delta\lambda},\quad \upsilon_{3,3}=0,\quad \upsilon_{\alpha,3}+\upsilon_{3,\alpha}=0\tag{4.2}$$

В результате уравнения (4.1) сводятся к бигармоническому уравнению классической теории пластин:

$$\frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\nu^2}\Delta\Delta w=q\tag{4.3}$$

Нетрудно видеть, что процедура вывода бигармонического уравнения (4.3) внутренне противоречива. Действительно. Примем во внимание, что величина малого параметра η^2 конечна. Тогда на основании второго равенства (4.2) из уравнений (4.1) следует, что $\eta^2\sigma_{33} = \nu\sigma_{\alpha\alpha}$. Последнее равенство приводит второе уравнение (4.1) к виду

$$\upsilon_{\alpha,\gamma}=(1-\nu^2)\left(\sigma_{\alpha\gamma}-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{\delta\lambda}\right)\tag{4.4}$$

Замена первого уравнения (4.2) уравнением (4.4) ведет к бигармоническому уравнению в форме

$$\frac{2}{3}\frac{(1-\nu)Eh^3}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Delta\Delta w=q\tag{4.5}$$

Именно в такой форме получено уравнение изгиба изотропных пластин. И.Н. Векуа строгим математическим методом без привлечения каких-либо предположений [26]. Изгибная жесткость в уравнении (4.5) при коэффициенте Пуассона ν = 0,3 оказывается выше классического значения (4.3) на 22,5%. Таким образом, пренебрежение малым параметром η^2, величина которого в теории оболочек может быть равной 10^{-4} и меньше, приводит к разнице в величине прогиба w, составляющей 22,5%.

Приведенный пример показывает, что при одночленной асимптотике правила асимптотического анализа, находятся в полном соответствии с гипотезами классической теории оболочек. На этом основании асимптотические методы можно считать естественным математическим аппаратом классической теории. Однако в силу внутренней противоречивости процедуры вывода бигармонического уравнения (4.3) асимптотическим методом применение асимптотических рядов для уточнения классической теории вызывает сомнения.

5. Направления развития теории оболочек с использованием гипотез. Рассматриваемые направления развития теории оболочек ведут свое начало с классической теории пластин. После появления и широкого внедрения в различные отрасли промышленности трехслойных, а затем многослойных и волокнистых композитов теория оболочек получила мощный импульс для дальнейшего развития. Прежде всего для построения теории неоднородных по толщине пластин и оболочек попытались использовать гипотезы Кирхгофа – Лява [64, 65, 47, 49]. Однако эти гипотезы оказались не в состоянии учесть основные особенности деформирования композитных материалов. Важнейшими из них являются поперечные деформации, в первую очередь деформации поперечного сдвига, и самоуравновешенные силы. О последней особенности деформирования неоднородных оболочек обычно упоминается вскользь. Однако она заслуживает большего внимания. В этом можно убедиться, обратившись к статье [66], в которой показано, что зона затухания самоуравновешивающих составляющих краевых сил в слоистых оболочках в несколько раз превышает зону затухания в однородных оболочках, а при некоторых соотношениях упругих свойств и размеров оболочки влияние этого силового фактора распространяется на всю оболочку в целом. По мере увеличения числа слоев и сближения их упругих свойств влияние самоуравновешенных сил уменьшается. Это обстоятельство позволяет использовать для расчета определенного класса композитных оболочек сдвиговую теорию оболочек [8, 20, 52, 67].

Самоуравновешенные силы оказывают существенное влияние на слоистые пластины и оболочки с небольшим числом слоев, упругие свойства которых имеют значительные различия. Применительно к трехслойным конструкциям с легким заполнителем принцип Сен-Венана не выполняется, вследствие чего необходимо учитывать самоуравновешивающие составляющие краевых сил.

Вопросам расчета трехслойных конструкций посвящено несколько тысяч публикаций. Основные подходы к построению трехслойных пластин и оболочек определились к 60-м годам нашего столетия и нашли свое отражение в обзоре [16]. В трехслойных конструкциях учет поперечных деформаций позволяет вводить в рассмотрение обобщенные внутренние силы и моменты, способные учитывать воздействие на оболочечные тела самоуравновешенных сил. Однако в стремлении к понижению порядка разрешающих уравнений многие авторы используют обобщенные поперечные силы кирхгофовского типа. Эта операция применительно к трехслойным конструкциям вызывает сомнение, поскольку в ее основе лежит замена системы сил, действующих на торцевую поверхность, другой статически эквивалентной системой. Тем самым происходит изменение самоуравновешенных сил, к которым трехслойные конструкции очень чувствительны [65]. При построении теории трехслойных пластин и оболочек основное внимание уделяется деформациям поперечного сдвига. Поперечные деформации растяжения–сжатия учитываются в легком заполнителе, да и то не всегда. Из большого числа допущений и гипотез наибольшую популярность завоевала гипотеза ломаной линии. Введение в теорию допущений и гипотез сопровождается, как правило, нарушением локальных уравнений равновесия, реже нарушением сплошности композита. Двумерные уравнения выводятся различными способами, но наибольшее распространение получило применение вариационных принципов.

Основные гипотезы и способы построения теории трехслойных конструкций были распространены на многослойные пластины и оболочки. Большое влияние на развитие многослойных пластин и оболочек оказали работы С.А. Амбарцумяна [49, 65], В.В. Болотина [68, 69], Э.И. Григолюка и П.П. Чулкова [70]. Анализ теории многослойных пластин и оболочек по состоянию на 1983 г. содержится в обзоре [18] и в более ранней обзорной статье [17]. На этом этапе развития теории оболочек, наряду с гипотезой ломаной линии, заметное распространение получили гипотезы С.А. Амбарцумяна. Для вывода двумерных уравнений продолжилось использование вариационных принципов и расширилось применение методов непосредственного преобразования уравнений теории упругости. Сохранилась основная стратегия в построении теории оболочек, приводящая к нарушению локальных уравнений равновесия или к нарушению сплошности композита. Продолжилось применение обобщенных поперечных сил кирхгофовского типа, связанное с изменением самоуравновешенных составляющих краевых сил.

Нарушение локальных уравнений равновесия, сплошности композита и изменение самоуравновешенных составляющих краевых сил ограничивает область применения теории трехслойных и многослойных пластин и оболочек узким классом задач, для которых упомянутые нарушения являются не существенными. Выходя за рамки этого класса задач, рассматриваемые варианты теории вступают в противоречие с законами физики, вследствие чего они оказываются не способными отразить с достаточной точностью напряженно-деформированное состояние оболочечных тел. В начале семидесятых годов нашего столетия появилось новое направление развития теории оболочек, при котором учет поперечных деформаций находится в полном соответствии с локальными уравнениями равновесия и сплошности материала.

6. Физически состоятельное направление развития теории оболочек. Под физически состоятельным будем понимать такое направление развития теории оболочек, при котором учет поперечных деформаций находится в полном соответствии с законами физики макромира и общими уравнениями механики сплошной среды. Физически состоятельное направление развития теории оболочек является естественным продолжением классической теории. Ближайшими предшественниками физически состоятельного направления развития теории оболочек можно считать В.З. Власова [71], С.Г. Лехницкого [64] и С.А. Амбарцумяна [47, 49, 65]. В работах С.А. Амбарцумяна, завершившего подходы В.З. Власова и С.Г. Лехницкого к построению классической теории оболочек, вывод всех соотношений теории слоистых анизотропных оболочек производится непосредственно из уравнений теории упругости в криволинейной ортогональной системе координат, без привлечения элементов теории поверхностей. Этот метод наряду с концепцией сплошных сред с внутренними связями составляет фундамент физически состоятельного направления развития теории оболочек.

Рассматриваемое направление развития теории оболочек зародилось практически одновременно и независимо друг от друга в Москве [72] и во Владивостоке [73]. При разных подходах их объединяет общее понимание значения и роли локальных уравнений равновесия в теории оболочечных тел. В рамках этого направления построены физически состоятельный вариант сдвиговой теории оболочек [8, 30] и теория оболочек с произвольным распределением упругих свойств по толщине, учитывающая поперечные деформации и самоуравновешенные силы [9, 74].

Физически состоятельный вариант сдвиговой теории пластин приведен в статье В.В. Васильева [30] и в п. 3 настоящей статьи. Ниже рассмотрим физически состоятельный вариант теории пластин, учитывающий деформации поперечного сдвига и поперечные деформации растяжения – сжатия. Воспользовавшись концепцией сплошных сред с внутренними связями [29], преобразуем уравнения закона Гука (1.1) к виду

$$\sigma_{\alpha\gamma} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_{\alpha\gamma} + \frac{\nu}{1+\nu}(\varepsilon_{\delta\lambda} + \gamma_3)\right], \quad \sigma_{12} = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{12} \tag{6.1}$$

$$\varepsilon_{i3} = \gamma_i, \quad \gamma_\alpha = \frac{1}{h}\int_h \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\alpha 3}dz, \quad \gamma_3 = \frac{1}{h}\int_h \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu\sigma_{\alpha\alpha})dz \tag{6.2}$$

$$(\alpha = \gamma \neq \delta = \lambda; \quad \alpha, \gamma, \delta, \lambda = 1, 2; \quad i = 1, 2, 3)$$

Соотношения упругости (6.1) и равенства (6.2) получены из уравнений закона Гука (1.1) путем осреднения поперечных деформаций по толщине пластины при минимальном среднеквадратичном отклонении их значений от деформации, определяемых законом Гука. Выражения (6.1), (6.2) будем трактовать, как соотношения упругости (6.1) с внутренними связями (6.2), ограничивающими поперечные деформации средними значениями.

Для абстрактного материала с соотношениями упругости (6.1) и внутренними связями (6.2) трехмерная краевая задача (1.1)–(1.3) точно сводится к двумерной краевой задаче. Однако учет поперечных деформаций растяжения–сжатия не позволяет разделить поперечные и тангенциальные перемещения. Поэтому в отличие от классической, п. 2, и сдвиговой, п. 3, теорий, придется рассмотреть более общую постановку задачи. Основные соотношения и уравнения механики пластин могут быть представлены в виде

$$u_\alpha = v_\alpha + z\theta_\alpha - 0,5z^2\gamma_{3,\alpha}, \quad \theta_\alpha = 2\gamma_\alpha - w_{,\alpha}, \quad u_3 = w + z\gamma_3 \tag{6.3}$$

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha} + z(\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) - z^2\gamma_{3,\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{13} = \gamma_i \tag{6.4}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[v_{\alpha,\gamma} + z\theta_{\alpha.\gamma} - \frac{z^2}{2}\gamma_{3,\alpha\gamma} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(v_{\delta,\lambda} + z\theta_{\delta,\lambda} - \frac{z^2}{2}\gamma_{3,\delta\lambda} + \gamma_3\right)\right]$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}[v_{1,2} + v_{2,1} + z(\theta_{1,2} + \theta_{2,1}) - z^2\gamma_{3,12}]$$

$$\sigma_{\alpha,3} = -\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{\left(\frac{h}{2}+z\right)\left[\Delta v_\alpha + \frac{1}{2(1-\nu)}(v_{\delta,\alpha\lambda} - v_{\alpha,\delta\lambda})\right] -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\left[\Delta\theta_\alpha + \frac{1}{2(1-\nu)}(\theta_{\delta,\alpha\lambda} - \theta_{\alpha,\delta\lambda})\right] - \frac{1}{6}\left(\frac{h^3}{8} + z^2\right)\Delta\gamma_{3,\alpha} + \left(\frac{h}{2}+z\right)\frac{\nu}{1-\nu}\gamma_{3,\alpha}\right\}$$

$$\sigma_{33} = -\bar{q}_{33} + \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\left(\frac{h}{2}+z\right)^2\Delta v_{\alpha,\alpha} - \left(\frac{h^3}{12} + \frac{h^2}{4}z - \frac{z^3}{3}\right)\Delta\theta_{\alpha,\alpha} -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{12}\left(\frac{3h^4}{16} + \frac{h^3}{2}z + z^4\right)\Delta\Delta\gamma_3 + \left(\frac{h}{2}+z\right)^2\frac{\nu}{1-\nu}\Delta\gamma_3\right] \tag{6.5}$$

$$\Delta v_\alpha + \frac{1}{2(1-\nu)}(v_{\delta,\alpha\lambda} - v_{\alpha,\delta\lambda}) - \frac{h^2}{24}\Delta\gamma_{3,\alpha} + \frac{\nu}{(1-\nu)}\gamma_{3,\alpha} = 0$$

$$\Delta\Delta w + \frac{6}{h}\Delta v_{\alpha,\alpha} - 2\gamma_{\alpha,\alpha} - \frac{h}{4}\Delta\Delta\gamma_3 + \frac{6\nu}{(1-\nu)h}\Delta\gamma_3 = -\frac{12(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)Eh^3}q$$

$$2\Delta\gamma_\alpha + \frac{1}{1-\nu}(\gamma_{\delta,\alpha,\lambda} - \gamma_{\alpha,\delta\lambda}) - \frac{12(1-2\nu)}{(1-\nu)h^2}\gamma_\alpha - \frac{6}{h}\left[\Delta v_\alpha + \frac{1}{2(1-\nu)}(v_{\delta,\alpha\lambda} - v_{\alpha,\delta\lambda})\right] -$$

$$-\Delta w_{,\alpha} + \frac{h}{4}\Delta\gamma_{3,\alpha} - \frac{6\nu}{(1-\nu)h}\gamma_{3,\alpha} = 0$$

$$\Delta\Delta\gamma_3 - \frac{25\nu}{(1-\nu)h^2}\Delta\gamma_3 + \frac{120}{h^4}\gamma_3 - \frac{20}{h^2}\Delta v_{\alpha,\alpha} - \frac{120\nu}{(1-\nu)h^4}v_{\alpha,\alpha} -$$

$$-\frac{5}{h}(\Delta\Delta w - 2\Delta\gamma_{\alpha,\alpha}) = -\frac{120(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)Eh^4}\bar{q}_{33} \tag{6.6}$$

Система дифференциальных уравнений общего 16-го порядка (6.6) полностью определяет шесть двумерных функций v_α, w, γ_α и γ_3, через которые восстанавливается трехмерность перемещений и напряженно-деформированного состояния пластины. Подстановка выражений (6.3)–(6.6) обращает уравнения равновесия и геометрии перемещений (1.1) в тождества и приводит к полному удовлетворению краевых условий на лицевых поверхностях пластины (1.2). Следовательно, система двумерных уравнений (6.6) является точным решением трехмерных уравнений теории упругости для абстрактного материала, задаваемого соотношениями упругости (6.1) при внутренних связях (6.2).

Для постановки двумерной краевой задачи необходимо задать в каждой точке контурной линии пластины по 8 краевых условий. Последние найдем из условия эквивалентности (2.7):

$$N_{\alpha\beta}n_\beta = N^\circ_\alpha \vee v_\alpha = v^\circ_\alpha; \quad M_{\alpha\beta}n_\beta = M^\circ_\alpha \vee \theta_\alpha = \theta^\circ_\alpha; \quad M_{3\alpha\beta}n_\beta = M^\circ_{3\alpha} \vee \gamma_{3,\alpha} = \gamma^\circ_{3,\alpha}$$

$$Q_\beta n_\beta = Q^\circ \vee w = w^\circ; \quad Q_{3\beta}n_\beta = Q^\circ_3 \vee \gamma_3 = \gamma^\circ_3 \quad (\alpha = 1, 2) \tag{6.7}$$

Учет поперечных деформаций растяжения-сжатия приводит к появлению бимоментов и обобщенных поперечных сил:

$$M_{3\alpha\beta} = \frac{1}{2}\int_h \sigma_{\alpha\beta}z^2dz, \quad M^\circ_{3\alpha} = \frac{1}{2}\int_h q_\alpha z^2dz, \quad Q_{3\beta} = \int_h \sigma_{\beta 3}zdz, \quad Q^\circ_3 = \int_h q_3 zdz \tag{6.8}$$

которые учитывают самоуравновешенные силы. Нетрудно видеть, что при двумерных краевых условиях (6.7) обеспечивается полное удовлетворение закона сохранения энергии (2.11).

Таким образом, для абстрактного материала с соотношениями упругости (6.1) и внутренними связями (6.2) трехмерная краевая задача (1.1)–(1.3) точно сводится к двумерной краевой задаче (6.6), (6.7) при полном соблюдении законов механики сплошных сред. Следовательно, представленный вариант теории пластин, учитывающий поперечные деформации, является физически самостоятельным. Его отличительной особенностью является способность учитывать самоуравновешенные силы.

Погрешность представленного варианта теории пластин определяется мерой близости абстрактного материала с соотношениями упругости (6.1) и внутренними связями (6.2) к реальному материалу, определяемому законом Гука (1.1):

$$\delta_i = \left\{ \int_h \left[\frac{1+\nu}{E}\left(\sigma_{i3} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{kk}\delta_{i3} \right) \right]^2 dz - h\gamma_i^2 \right\}^{1/2}$$

где δ_i – среднеквадратическая погрешность. Для тонких пластин и оболочек может быть определена асимптотическая погрешность [29].

Если за меру близости абстрактного материала к реальному принять минимум среднеквадратического отклонения с весом, то можно в рамках представленного варианта теории пластин учесть неоднородность материала по толщине. Для этого достаточно в качестве весовой использовать функцию распределения податливости материала по толщине.

В физически состоятельном направлении развития теории оболочек двумерная краевая задача встроена в трехмерную модель оболочечного тела. Она служит для определения двумерных функций трехмерного тела, через которые восстанавливается трехмерность перемещений и напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек.

7. Перспективы развития теории оболочек. На развитие теории оболочек существенное влияние оказывают модельные представления об оболочечных телах и процессах их деформирования. При классическом подходе к построению теории о деформации оболочечного тела можно судить по деформированию срединной поверхности пластины или оболочек. Это естественным образом привело к геометрическим модельным представлениям об оболочечных телах, как двумерных поверхностях. Такие представления вошли в учебную и научную литературу и прочно укрепились в нашем сознании. На начальном этапе развития теории геометрические представления способствовали глубокому проникновению в теорию оболочек математических методов и, как следствие, содействовали успешному развитию теории и методов решения практических задач. Очень плодотворным для развития классической теории оболочек оказался асимптотический анализ уравнений теории упругости. Вследствие совпадения правил асимптотического анализа при использовании одночленной асимптотики со способом ввода в теорию гипотез Кирхгофа – Лява, асимптотические методы превратились в естественный математический аппарат классической теории оболочек.

На современном этапе развития теории оболочек, когда потребовался учет поперечных деформаций, геометрические представления вошли в противоречие с физической сущностью оболочки, как трехмерного тела. Под воздействием геометрических представлений, на физическую сущность процессов деформирования оболочек перестали обращать должное внимание. В результате этого развитие теории оболочек пошло в направлении, противоречащем законам физики, см. п.п. 4, 5. Более того, вследствие геометрического представления об оболочке, как о двумерной поверхности, появилось сомнение в возможности использования при построении теории оболочек даже таких фундаментальных понятий физики, как работа, и в правомерности применения вариационных принципов механики [40]. Асимптотические методы стали представляться естественным математическим аппаратом не только классической теории, но и теории оболочек в целом [40].

Значение математики и ее методов для развития теории оболочек исключительно велико. Однако, ее роль ограничена чисто логическими операциями и для построения теории оболочек необходимо привлекать физические закономерности механики оболочечных тел. Тот факт, что асимптотические методы позволяют строить уравнения классической теории оболочек без привлечения дополнительных предположений, объясняется их внутренней сущностью. Это приближенные методы, основные правила которых при одночленной асимптотике совпадают со способом ввода в теорию гипотез Кирхгофа – Лява.

Введение в теорию физического представления об оболочке, как трехмерном теле, не оставляет никаких сомнений в правомерности использования в теории оболочек фундаментальных физических понятий, законов и вариационных принципов механики. Становится ясным место математических методов в теории оболочек. Однако, изменение устоявшихся представлений является мучительным процессом, требующим определенного времени. Вне всякого сомнения, физическое представление об оболочке, как трехмерном теле, отражает ее реальные свойства. Поэтому дальнейшее развитие теории оболочек пойдет в физически состоятельном направлении. Существенное значение для понимания и развития физически состоятельного направления теории оболочек имеет концепция сплошной среды с внутренними связями, предложенная в статье [32]. Наложение внутренних связей понижает число степеней свободы для поперечных нормалей оболочки до конечных значений, не вступая в противоречие с общими началами термодинамики. Это позволяет строить абстрактные математические модели материала трехмерного оболочечного тела, применительно к которым трехмерная краевая задача точно сводится к конечной двумерной задаче [25]. При учете поперечных деформаций, используя различные меры близости, можно строить математические модели наилучшего приближения к реальному материалу, с оценкой погрешности. В п.п. 2, 3 и 6 применение концепции сплошной среды с внутренними связями продемонстрировано на примере построения и уточнения классической теории изотропной пластины. Так же показано замечательное свойство внутренних связей находиться в полном соответствии с общими началами термодинамики. В рамках концепции сплошных сред с внутренними связями можно учесть разнообразные появления неупругости материала оболочечных тел [74].

В заключение отметим, что к настоящему времени полностью оформилось физически состоятельное направление теории оболочек [8, 9, 75] и созданы реальные предпосылки для его дальнейшего развития [25, 29, 56, 76].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филин А.П.* Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1987. 384 с.
2. *Алумяэ Н.А.* Теория упругих оболочек и пластинок // Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1972. Т. 3. С. 227–266.
3. *Ониашвили О.Д.* Расчет оболочек и других тонкостенных конструкций // Строительная механика в СССР. 1917–1967. М.: Стройиздат, 1969. С. 165–202.
4. *Джанелидзе Г.Ю.* Обзор работ по теории изгиба тонких плит, опубликованных в СССР // ПММ. 1948. Т. 12, вып. 1. С. 109–128.
5. *Naghdi P.* The theory of shells and plates // Handbuch der Physik. Berlin: Springer, 1972. Bd. VI a/2. S. 425–640.
6. Труды XVIII Международной конференции по теории оболочек и пластин. Саратов: СГТУ, 1997. Т. 1. 177 с. Т. 2. 151 с. Т. 3. 169 с.
7. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П.* Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка, 1987. 216 с.
8. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 269 с.
9. *Пикуль В.В.* Прикладная механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1989. 221 с.
10. *Шкутин Л.И.* Механика деформаций гибких тел. Новосибирск: Наука, 1988. 128 с.
11. *Ридель В.В., Гулин Б.В.* Динамика мягких оболочек. М.: Наука, 1990. 205 с.
12. *Голованов А.И., Корнишин М.С.* Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. 269 с.
13. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т.* Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. М.: Наука, 1992. 336 с.
14. *Товстик П.Е.* Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука. Физматлит, 1995. 320 с.
15. *Петров В.В., Иноземцев В.К., Синева Н.Ф.* Теория наведенной неоднородности и ее приложения к проблеме устойчивости пластин и оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1996. 312 с.
16. *Куршин Л.М.* Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек // Расчет пространственных конструкций. М.: Стройиздат, 1962. Вып. 7. С. 163–192.
17. *Григолюк Э.И., Коган Ф.А.* Современное состояние многослойных оболочек // Прикл. механика. 1972. Т. 8. № 6. С. 3–17.
18. *Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф.* Анизотропные многослойные пластины и оболочки // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ. 1983. Т. 15. С. 3–68.
19. *Болотин В.В.* О теории армированных тел // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 1. С. 74–80.
20. *Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.
21. *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates // J. Math. and Phys. 1944. V. 23. № 4. P. 184–191.
22. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* К расчету напряженного состояния толстенных неоднородных анизотропных оболочек // Прикл. механика. 1974. Вып. 10. № 5. С. 86–93.
23. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с.
24. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.:Наука, 1981. 688 с.
25. *Пикуль В.В.* К проблеме построения физически корректной теории оболочек // Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 18–25.
26. *Векуа И.Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 288 с.
27. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
28. *Ворович И.И.* Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. 2-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Т. 3. Механика твердого тела. М.: Наука, 1966. С. 116–136.
29. *Пикуль В.В.* Физические корректные модели материала упругих оболочек // Изв. АН. МТТ. 1995. № 2. С. 103–108.

30. *Васильев В.В.* О теории тонких пластин // Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 26–47.
31. *Жилин П.А.* О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиции современной теории пластин // Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 48–64.
32. *Жилин П.А.* О классической теории пластин и преобразования Кельвина – Тэта // Изв. АН. МТТ. 1995. № 4. С. 133–139.
33. *Алфутов Н.А.* О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин // Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 65–72.
34. *Гольденвейзер А.Л.* Алгоритмы асимптотического построения линейной двумерной теории тонких оболочек и принцип Сен-Венана // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 96–108.
35. *Волох К.Ю.* О классической теории пластин // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 156–165.
36. *Даревский В.М.* О статических граничных условиях в классической теории оболочек и пластин // Изв. АН. МТТ. 1995. № 4. С. 130–133.
37. *Васильев В.В.* К дискуссии по классической теории пластин // Изв. АН. МТТ. 1995. № 4. С. 140–150.
38. *Гольденвейзер А.Л.* О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин // Изв. АН. МТТ. 1997. № 3. С. 134–149.
39. *Васильев В.В.* Об асимптотическом методе обоснования теории пластин // Изв. АН. МТТ. 1997. № 3. С. 150–155.
40. *Гольденвейзер А.Л.* Замечания о статье В.В. Васильева "Об асимптотическом методе обоснования теории пластин" // Изв. АН. МТТ. 1997. № 4. С. 150–158.
41. *Новожилов В.В., Финкельштейн Р.* О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 5. С. 331–340.
42. *Муштари Х.М., Галимов К.З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигиздат, 1957. 431 с.
43. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
44. *Hencky H.* Über die Berücksichtigung der Schubverrung in ebenen Platten // Jng. Arch. 1947. Bd. 16. № 1. S. 72–76.
45. *Уфлянд Я.С.* Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 3. С. 287–300.
46. *Власов Б.Ф.* Об уравнениях теории изгиба пластинок // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 12. С. 57–60.
47. *Амбарцумян С.А.* К теории изгиба анизотропных пластинок // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 5. С. 69–77.
48. *Шереметьев М.П., Пелех Б.Л.* К построению уточненной теории пластин // Инж. ж. 1964. Т. 4. № 3. С. 504–509.
49. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
50. *Королев В.И.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки из армированных пластмасс. М.: Машиностроение, 1965. 272 с.
51. *Пелех Б.Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка, 1973. 246 с.
52. *Палий О.М., Спиро В.Е.* Анизотропные оболочки в судостроении. Л.: Судостроение, 1977. 392 с.
53. *Пикуль В.В.* Общая техническая теория тонких упругих пластин и пологих оболочек. М.: Наука, 1977. 152 с.
54. *Пикуль В.В.* Теория и расчет оболочек вращения. М.: Наука, 1982. 160 с.
55. *Елпатьевский А.П., Васильев В.В.* Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов. М.: Машиностроение, 1972. 168 с.
56. *Васильев В.В., Лурье С.А.* К проблеме построения неклассической теории пластин // Изв. АН. МТТ. 1990. № 2. С. 158–167.
57. *Cauchy A.* Sur l'equilibre et le mouvement d'une plaque solide // Dans: Exercise de mathematique. 1828. № 3.
58. *Poisson S.* Memoire sur l'equilibre et le mouvement des corps elastiques // Mem. Acad. Sci. Paris. 1829. № 8. P. 357–570; 623–627.
59. *Гольденвейзер А.Л., Лурье А.И.* О математической теории равновесия упругих оболочек // ПММ. 1947. Т. 11. Вып. 5. С. 565–592.
60. *Кильчевский Н.А.* Основы аналитической механики оболочек. Ч. 1. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 355 с.

61. *Кильчевский Н.А.* Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследование постановки краевых задач теории оболочек // Тр. 2-й Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Киев: Изд-во АН УССР, 1962. С. 58–69.
62. *Лурье А.И.* Общая теория упругих тонких оболочек // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 2. С. 7–34.
63. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
64. *Лехницкий С.Б.* Изгиб неоднородных анизотропных тонких плит симметричного строения // ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 1. С. 71–91.
65. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 266 с.
66. *Гусейн-Заде М. И.* Напряженное состояние погранслоя для слоистых пластинок // Тр. 7-й Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1970. С. 638–643.
67. *Немировский Ю.В., Резников А.П.* Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск: Наука, 1986. 168 с.
68. *Болотин В.В.* К теории слоистых плит // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 3. С. 65–72.
69. *Болотин В.В., Новичок Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 376 с.
70. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Нелинейные уравнения тонких упругих слоистых анизотропных пологих оболочек с жестким заполнителем // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 5. С. 68–80.
71. *Власов В.З.* Строительная механика оболочек. И.: ОНТИ, 1936. 263 с.
72. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Вариант уточненной теории изгиба балок из слоистых пластмасс // Механика полимеров. 1972. № 4. С. 674–681.
73. *Пикуль В.В.* Изгиб и устойчивость неоднородных гибких пластин с произвольным соотношением упругих свойств по толщине // Строительная механика и проектирование корабля: Тр. Дальневост. политех. ин-та. 1971. Т. 76. С. 125–138.
74. *Пикуль В.В., Пикуль М.В.* Математическая модель упруго-вязко-пластического оболочечного тела // Дальневосточный мат. сб. Владивосток: Дальнаука, 1996. вып. 2. С. 146–152.
75. *Пикуль В.В.* Теория и расчет слоистых конструкций. М.: Наука, 1985. 183 с.
76. *Васильев В.В., Лурье С.А.* К проблеме уточнения теории пологих оболочек // Изв. АН. МТТ. 1990. № 6. С. 139–146.

Владивосток

Поступила в редакцию
24.04.1998