

УДК 539.3:678.046.2

© 2000 г. Т.А. БЕЛЯКОВА, Е.В. ЛОМАКИН

**ТРЕЩИНА В ПОЛЕ СДВИГА В УПРУГОЙ СРЕДЕ  
С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ СВОЙСТВАМИ  
ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

Одной из причин изменения свойств среды в зависимости от вида внешних воздействий является наличие в среде различного вида неоднородностей, таких как микротрещины, поры, включения, армирующие элементы, поведение которых существенным образом зависит от условий нагружения и деформирования. Поэтому деформационные свойства среды не являются какими-то заданными характеристиками материала, инвариантными к условиям нагружения. Макросвойства таких сред зависят от реализуемого в среде вида напряженного состояния [1–5], причем эта зависимость возрастает с увеличением объемного содержания неоднородностей структуры материала [6–8]. В условиях неравномерного напряженного состояния деформационные свойства представляют собой функции координат, и макрооднородная в начальном состоянии среда становится неоднородной. При этом возникает ситуация, когда параметры связи между напряжениями и деформациями зависят от решения конкретной краевой задачи. Причем приобретенная при нагружении неоднородность деформационных свойств представляется в виде непрерывно дифференцируемых функций координат.

Рассматриваемые среды обладают специальной формой физической нелинейности. Исследованию напряженно-деформированного состояния в физически нелинейных средах посвящено много работ [9–15], но при построении решений с использованием определяющих соотношений деформационной теории пластичности принималось условие несжимаемости. Для рассматриваемых сред это предположение не может быть использовано, поскольку в них процессы сдвигового и объемного деформирования взаимосвязаны.

Данная работа представляет собой продолжение начатых в [16] исследований по построению решений задач о трещинах в условиях плоской деформации. Рассмотрена задача о трещине в поле сдвига в упругой среде с изменяющимися деформационными свойствами. На основе предложенных определяющих соотношений [5, 17] построено асимптотическое решение и исследованы поля перемещений, деформаций и напряжений вблизи вершины трещины для различных значений параметра чувствительности материала к изменению вида напряженного состояния. При этом показано, что обычно принимаемые при решении данных задач предположения о симметрии или антисимметрии распределения напряжений для рассматриваемых сред не могут быть приняты, так как не позволяют удовлетворить всем граничным условиям. С помощью инвариантного интеграла вычислены значения коэффициента интенсивности напряжений, определяющие условия начала роста трещины.

1. При описании зависимости деформационных свойств микроповрежденных сред от вида напряженного состояния может быть использован параметр  $\xi$ , представляющий собой отношение среднего напряжения  $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$  к интенсивности напряжений

$\sigma_0 = \sqrt{3/2} S_{ij} S_{ij}$ ,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$ . Данный параметр  $\xi = \sigma/\sigma_0$  характеризует в среднем соотношение между нормальными и касательными напряжениями и определяет в среднем вид напряженного состояния [3–5].

Для анализа характерных особенностей распределения напряжений, деформаций и перемещений вблизи вершины трещины может быть использован один из вариантов предложенных определяющих соотношений для рассматриваемого класса сред [17], когда потенциал деформаций представляется следующим образом:

$$\Phi = 1/2 [1 + \zeta(\xi)] (A + B\xi^2) \sigma_0^2 \quad (1.1)$$

При этом зависимость между деформациями и напряжениями ( $\epsilon_{ij} = \partial\Phi/\partial\sigma_{ij}$ ) имеет вид

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= 3/2 [A + \omega(\xi)] S_{ij} + 1/3 [B + \Omega(\xi)] \sigma \delta_{ij} \\ \omega(\xi) &= -1/2 (A + B\xi^2) \zeta'(\xi) \xi + A \zeta(\xi) \\ \Omega(\xi) &= 1/2 (A + B\xi^2) \zeta'(\xi) / \xi + B \zeta(\xi) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Штрихом обозначено дифференцирование по параметру  $\xi$ . Зависимости (1.1) и (1.2) включают в себя как частный случай соотношения для линейно упругого тела, когда  $\zeta(\xi) \equiv 0$ ,  $A = 2/3(1 + \nu)/E$ ,  $B = 3(1 - 2\nu)/E$ .

На основе (1.2) могут быть получены соотношения между интенсивностями напряжений и деформаций, а также между средним напряжением и объемной деформацией

$$\epsilon_0 [A + \omega(\xi)] \sigma_0, \quad \epsilon = [B + \Omega(\xi)] \sigma \quad (1.3)$$

Здесь  $\epsilon_0 = \sqrt{2/3} e_{ij} e_{ij}$  – интенсивность деформаций,  $e_{ij} = \epsilon_{ij} - 1/3 \epsilon \delta_{ij}$ ,  $\epsilon = \epsilon_{ii}$  – объемная деформация. При этом функции  $\zeta$ ,  $\omega$  и  $\Omega$  связаны соотношениями

$$\omega + \xi^2 \Omega = (A + B\xi^2) \zeta, \quad \omega' + \xi^2 \Omega' = 0 \quad (1.4)$$

Соотношения (1.2), (1.3) определяют нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями. Эта зависимость становится линейной только в случае постоянства параметра  $\xi$ , т.е. в условиях пропорционального нагружения. Из данных соотношений следует, что при сдвиге возможно объемное деформирование материала, а также возможно объемное расширение в тех случаях, когда среднее напряжение  $\sigma$  сжимающее. При этом объемная деформация и интенсивность деформаций согласно (1.3) связаны соотношением

$$\epsilon = \frac{B + \Omega(\xi)}{A + \omega(\xi)} \xi \epsilon_0 \quad (1.5)$$

Данное соотношение позволяет выразить параметр вида напряженного состояния  $\xi$  через параметр вида деформированного состояния  $\gamma = \epsilon/\epsilon_0$  и представить потенциал (1.1) в виде [16]:

$$U = 1/2 [1 + \eta(\gamma)] (1/A + \gamma^2/B) \epsilon_0^2 \quad (1.6)$$

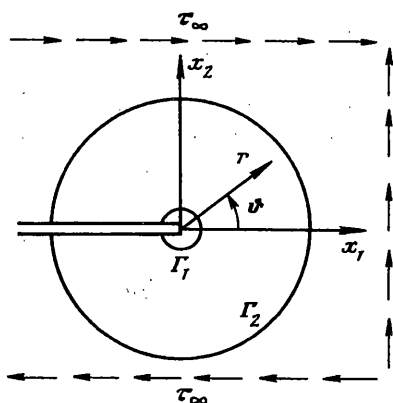
При этом зависимость напряжений от деформаций ( $\sigma_{ij} = \partial U/\partial \epsilon_{ij}$ ) имеет вид

$$\sigma_{ij} = 2/3 \psi(\gamma) e_{ij} + \Psi(\gamma) \epsilon \delta_{ij} \quad (1.7)$$

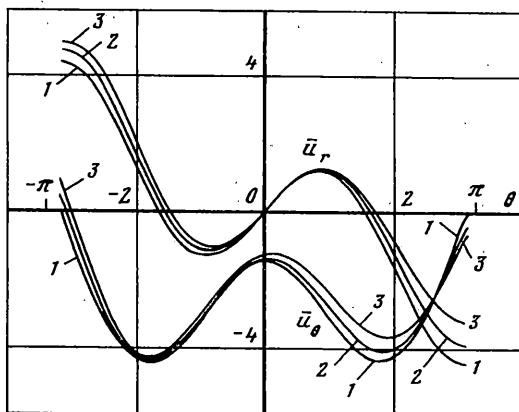
$$\psi(\gamma) = -1/2 (1/A + \gamma^2/B) \eta'(\gamma) \gamma + (1/A) [1 + \eta(\gamma)]$$

$$\Psi(\gamma) = 1/2 (1/A + \gamma^2/B) \eta'(\gamma) \gamma^{-1} + (1/B) [1 + \eta(\gamma)]$$

2. Рассмотрим среду с трещиной длины  $2l$  при сдвиге в условиях плоской деформации. Свойства среды описываются определяющими соотношениями (1.2), (1.7). Вда-



Фиг. 1



Фиг. 2

ли от трещины приложено касательное напряжение  $\tau_\infty$ . Для нахождения асимптотического решения введем полярную систему координат, связанную с одной из вершин трещины (фиг. 1).

Рассматриваемые среды относятся к физически нелинейным, но для них не могут быть использованы обычно принимаемые при решении задач о трещинах условие несжимаемости или линейно упругий закон сжимаемости, поскольку сдвиговая и объемная деформации связаны соотношением (1.5). Как показано в [16], введение функции напряжений Эри также не позволяет упростить получение решения задачи плоской деформации, так как в параметр  $\xi$  и, соответственно, в определяющие соотношения (1.2) входит напряжение  $\sigma_{zz}$  и его не удастся выразить в явном виде через напряжение  $\sigma_{r\theta}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$ , а также через функцию напряжений.

Поэтому при построении решения необходимо одновременно рассматривать два уравнения равновесия и уравнение совместности деформаций

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \\ 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{\theta\theta})}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Несмотря на нелинейность определяющих соотношений (1.2), (1.7), для них справедлива теорема Клапейрона, и потенциалы напряжений (1.1) и деформаций (1.6) совпадают  $U = \Phi = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$  [17]. При нахождении асимптотического решения в условиях плоской деформации можно использовать соответствующие представления для компонентов тензора деформаций [16]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= K_\varepsilon r^{-1/2} F_1(\vartheta), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = K_\varepsilon r^{-1/2} F_2(\vartheta) \\ \varepsilon_{r\theta} &= K_\varepsilon r^{-1/2} F_3(\vartheta) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Зависимость от  $r$  определяется требованием ограниченности энергии деформации при интегрировании по любому контуру, окружающему вершину трещины. Вследствие однородности уравнений (2.1) деформации определены с точностью до некоторого множителя  $K_\varepsilon$ .

В асимптотическом представлении для деформаций (2.2) параметр  $\gamma = \varepsilon/\varepsilon_0$ , входящий в соотношения (1.7), зависит только от полярного угла  $\vartheta$ , а именно

$$\gamma = \frac{3}{2} (F_1 + F_2) F^{-1}, \quad F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - F_1 F_2 + 3 F_3^2} \quad (2.3)$$

Согласно соотношениям (1.7) и (2.2) асимптотические выражения для напряжений вблизи вершины трещины имеют вид

$$\sigma_{rr} = K_\sigma r^{-1/2} \tilde{\sigma}_{rr}(\vartheta), \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = K_\sigma r^{-1/2} \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta}(\vartheta) \quad (2.4)$$

$$\sigma_{r\vartheta} = K_\sigma r^{-1/2} \tilde{\sigma}_{r\vartheta}(\vartheta), \quad \sigma_{zz} = K_\sigma r^{-1/2} \tilde{\sigma}_{zz}(\vartheta)$$

Коэффициент  $K_\sigma$  может быть выражен через коэффициент  $K_\epsilon$ .

Рассмотрим один из возможных вариантов определяющих соотношений (1.2), когда  $\omega(\xi)$  представляется в виде линейной функции,  $\omega(\xi) = C\xi$ . Тогда согласно (1.4)  $\Omega(\xi) = C/\xi$ . Соотношения (1.2) и (1.7) принимают вид [16]:

$$\epsilon_{ij} = \frac{3}{2}(A + C\xi)S_{ij} + \frac{1}{3}(B + C/\xi)\sigma\delta_{ij} \quad (2.5)$$

$$\sigma_{ij} = [\frac{2}{3}(B - C\gamma)e_{ij} + (A - C/\gamma)\epsilon\delta_{ij}](AB - C^2)^{-1}$$

Единственность решения краевых задач обеспечена при выполнении условия  $AB - C^2 > 0$ .

Соотношения (2.5) включают в себя как частный случай при  $C = 0$  зависимости для линейно упругого тела. При этом в результате решения системы уравнений (2.1) для трещины в поле сдвига с использованием граничных условий  $F_1(0) = F_2(0) = 0, F_3(0) = 1$  получаем следующие выражения для функций  $F_i$ :

$$\begin{aligned} F_1 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \left[ -\left(1 + \frac{4}{9} \frac{B}{A}\right) \left(1 + \frac{1}{9} \frac{B}{A}\right)^{-1} + 3 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right] \\ F_2 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \left[ \left(1 - \frac{2}{9} \frac{B}{A}\right) \left(1 + \frac{1}{9} \frac{B}{A}\right)^{-1} - 3 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right] \\ F_3 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \left[ 3 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - 2 \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Связь между коэффициентами  $K_\epsilon$  и  $K_\sigma$  может быть найдена путем сравнения выражений для напряжений, получающихся на основе (2.2) и зависимостей (2.5) с выражениями (2.4). Например, для напряжения  $\sigma_{r\vartheta}$  получаем

$$\sigma_{r\vartheta} = \frac{2}{3}(B - C\gamma)(AB - C^2)^{-1} K_\epsilon r^{-1/2} F_3(\vartheta) \quad (2.7)$$

Сравнивая выражения (2.4) и (2.7) и удовлетворяя условию, что при  $C = 0$  эти выражения должны совпадать с известным решением задачи линейной теории упругости (2.6), находим

$$K_\epsilon = \frac{3}{2}(AB - C^2)^{-1} K_\sigma \quad (2.8)$$

На основе (2.2)–(2.5) получим формулы, определяющие зависимость напряжений от полярного угла  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr} &= \frac{1}{3}(1 - \gamma C/B)(2F_1 - F_2) + \frac{3}{2}(A - C\gamma^{-1})(F_1 + F_2)/B \\ \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta} &= \frac{1}{3}(1 - \gamma C/B)(2F_2 - F_1) + \frac{3}{2}(A - C\gamma^{-1})(F_1 + F_2)/B \\ \tilde{\sigma}_{r\vartheta} &= (1 - \gamma C/B)F_3 \\ \tilde{\sigma}_{zz} &= [-\frac{1}{3}(B - \gamma C) + \frac{3}{2}(A - C\gamma^{-1})](F_1 + F_2)/B \end{aligned} \quad (2.9)$$

Используя выражения деформаций через перемещения  $\epsilon_{rr} = \partial u_r / \partial r$ ,  $\epsilon_{\vartheta\vartheta} = \partial u_\vartheta / r \partial \vartheta + u_r / r$ , а также (2.2) и (2.8), получим формулы для перемещений

$$u_r = 3K_\sigma \sqrt{r}(AB - C^2)F_1/B \quad (2.10)$$

$$u_\vartheta = 6K_\sigma \sqrt{r}(AB - C^2)(F_4 - F_3)/B, \quad F_4 = dF_1/d\vartheta$$

Коэффициент  $K_\sigma$  может быть определен с помощью инвариантного интеграла [10, 11], который в полярной системе координат имеет вид

$$J = r \int_{\Gamma} [U \cos \vartheta - r^{-1} \chi(\vartheta)] d\vartheta \quad (2.11)$$

$$\chi(\vartheta) = \sin \vartheta [\sigma_{rr}(u_\vartheta - u'_r) - \sigma_{r\vartheta}(u_r + u'_\vartheta)] + \frac{1}{2} \cos \vartheta (\sigma_{rr} u_r + \sigma_{r\vartheta} u_\vartheta)$$

Здесь  $\Gamma$  – произвольный контур, охватывающий вершину трещины, штрихом обозначена производная по  $\vartheta$ .

3. Используя определяющие соотношения (2.5) и представление (2.2) для компонентов тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , из уравнений равновесия и уравнения совместности деформаций (2.1) можно получить систему дифференциальных уравнений для определения функций  $F_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \frac{d}{d\vartheta} [(B - C\gamma) F_3] &= \left( \frac{1}{2} A - \frac{4}{9} B + \frac{4}{9} C\gamma \right) F_1 + \left( \frac{1}{2} A + \frac{5}{9} B - \frac{5}{9} C\gamma \right) F_2 - \frac{1}{3} CF \\ \frac{d}{d\vartheta} \left[ \left( A + \frac{4}{9} B - \frac{4}{9} C\gamma \right) F_2 + \left( A - \frac{2}{9} B + \frac{2}{9} C\gamma \right) F_1 - \frac{2}{3} CF \right] &= -(B - C\gamma) F_3 \\ 4 \frac{d}{d\vartheta} (F_4 - F_3) &= -2F_1 + F_2, \quad F_4 = \frac{dF_1}{d\vartheta} \end{aligned} \quad (3.1)$$

При формулировке краевых условий для функций  $F_i$  в общем случае не могут быть использованы обычно принимаемые предположения о симметричном и антисимметричном распределении различных компонентов тензора напряжений. Например, для трещины в поле сдвига они заключаются в том, что напряжение  $\sigma_{r\vartheta}$  является четной функцией, а напряжения  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  – нечетными функциями полярного угла  $\vartheta$  [12]. Покажем, что для сред, поведение которых описывается соотношениями (1.2), (1.7), эти предположения не могут быть приняты.

Действительно, зависимость деформационных свойств среды от вида напряженного состояния определяется входящими в соотношения (1.2) функциями параметра  $\xi$ . Введем новый параметр, не зависящий от напряжения  $\sigma_{zz}$ ,  $\beta = (\sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta}) / \sqrt{3} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta})^2 + 4\sigma_{r\vartheta}^2}$ . В [16] показано, что параметры  $\xi$  и  $\beta$  связаны соотношением

$$\xi = \sqrt{1 - \frac{1}{9} \left( \xi \frac{B + \Omega(\xi)}{A + \omega(\xi)} \right)^2} \beta - \frac{1}{9} \xi \frac{B + \Omega(\xi)}{A + \omega(\xi)} \quad (3.2)$$

В случае линейной функции  $\omega(\xi) = C\xi$  уравнение (3.2) имеет вид

$$81(A + C\xi)^2 (\xi^2 - \beta^2) + 18(A + C\xi)(B\xi + C)\xi + (B\xi + C)^2 (1 + 9\beta^2) = 0 \quad (3.3)$$

Поверхность трещины свободна от нагрузок, следовательно, должны быть выполнены условия

$$\sigma_{r\vartheta}(\pm\pi) = 0, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta}(\pm\pi) = 0 \quad (3.4)$$

Таким образом, у поверхности трещины среда находится в условиях двухосного напряженного состояния в плоскости  $(x_1, x_3)$ , которому соответствует значение  $\beta(\pm\pi)$ . Уравнение (3.3) при этом принимает вид

$$\xi^2 = \frac{27(A + C\xi)^2}{81(A + C\xi)^2 + 18(A + C\xi)(B + C\xi^{-1}) + 4(B + C\xi^{-1})^2} \quad (3.5)$$

В диапазоне изменения параметра  $\xi$  для двухосного напряженного состояния  $-2/3 \leq \xi \leq 2/3$  уравнение (3.5) имеет два различных корня, соответствующих напряженному состоянию на верхнем ( $\xi(\pi) < 0$ ) и на нижнем ( $\xi(-\pi) > 0$ ) берегах трещины.

В линейно упругом случае ( $C = 0$ ) корни уравнения (3.5) имеют значения  $\xi(\pm\pi) = \pm 3\sqrt{3A/\sqrt{81A^2 + 18AB + 4B^2}}$ .

При наличии зависимости деформационных характеристик среды от вида напряженного состояния ( $C \neq 0$ ) в результате решения уравнения (3.5) получаются неравные по модулю значения параметра  $\xi$ . Это означает, что приложенное вдали от трещины касательное напряжение  $\tau_\infty$  создает в материале напряженное состояние, которое характеризуется несимметричным изменением параметра  $\xi$  в зависимости от угла  $\vartheta$ . Поэтому деформационные свойства среды вблизи вершины трещины также распределены несимметричным образом.

Для решения краевой задачи имеем два условия на поверхности трещины (3.4), которые на основе соотношений (2.5) и формул (2.2) могут быть представлены в виде

$$F_3(\pm\pi) = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{2}{9}[B - C\gamma(\pm\pi)][2F_2(\pm\pi) - F_1(\pm\pi)] + [A - C/\gamma(\pm\pi)][F_1(\pm\pi) + F_2(\pm\pi)] = 0$$

Условия (3.4), (3.6) должны выполняться для любых типов трещин вне зависимости от вида нагружения вдали от трещины. При построении решения для конкретного вида нагружения среды необходимо сформулировать соответствующие условия перед вершиной трещины при  $\vartheta = 0$ .

Поскольку система уравнений (3.1) является однородной, и неизвестные функции определяются с точностью до произвольного ненулевого множителя, то необходимо ввести некоторое условие нормировки, например, для функции  $F_3$ :

$$F_3(0) = 1 \quad (3.7)$$

Еще одно условие определяется кинематикой при сдвиге двух частей полупространства относительно плоскости трещины и согласно (2.10) может быть представлено в виде

$$F_1(0) = 0 \quad (3.8)$$

Для решения системы уравнений (3.1) необходимо определить четыре условия в какой-либо одной точке интервала изменения угла  $\vartheta$ . Два недостающих условия при  $\vartheta = -\pi$  определялись численно при помощи метода стрельбы с использованием условий (3.7) и (3.8). После этого система (3.1) решалась численно на отрезке  $[-\pi; \pi]$  методом Рунге – Кутты с автоматическим выбором шага. Проведенная проверка показала, что условия (3.6) при  $\vartheta = \pi$  для полученного решения также удовлетворяются.

Принимая во внимание соотношения (2.2)–(2.5), (2.8), (2.10), инвариантный интеграл (2.11) можно представить в виде

$$J = \frac{3}{2} \frac{(AB - C^2)}{B} K_\sigma^2 \int_{-\pi}^{\pi} \chi_0(\vartheta) d\vartheta \quad (3.9)$$

$$\chi_0(\vartheta) = \cos \vartheta [\frac{1}{3}BF^2 - CF(F_1 + F_2) + \frac{3}{4}A(F_1 + F_2)^2] / B - \\ - \sin \vartheta [2\tilde{\sigma}_{rr}(F_4 - 2F_3) - \tilde{\sigma}_{r\vartheta}F_2] - \cos \vartheta [\tilde{\sigma}_{rr}F_1 + 2\tilde{\sigma}_{r\vartheta}(F_4 - F_3)]$$

Функции  $\tilde{\sigma}_{rr}$  и  $\tilde{\sigma}_{r\vartheta}$  представлены формулами (2.9). Приравнявая значение инвариантного интеграла по контуру  $\Gamma_2$  вдали от вершины трещины к его значению по контуру  $\Gamma_1$  вблизи от нее, вычисленному с помощью (3.9), можно определить коэффициент  $K_\sigma$ .

Вдали от трещины реализуется однородное напряженное состояние, для которого параметр  $\xi$  постоянный. Следовательно, соотношения (2.5), связывающие напряжения

| $C/A$ | $E^-/E^+$ | $\xi_\infty$ | $k$   | $K_\sigma/K_0$ |
|-------|-----------|--------------|-------|----------------|
| 0     | 1,00      | 0            | 1,000 | 1,000          |
| 0,1   | 1,12      | -0,0094      | 0,998 | 1,004          |
| 0,2   | 1,25      | -0,0188      | 0,992 | 1,015          |
| 0,3   | 1,41      | -0,0283      | 0,983 | 1,035          |
| 0,4   | 1,58      | -0,0380      | 0,970 | 1,065          |
| 0,5   | 1,78      | -0,0478      | 0,952 | 1,107          |
| 0,6   | 2,02      | -0,0580      | 0,931 | 1,166          |

и деформации, совпадают с соотношениями для линейно упругого тела. При этом коэффициенты упругости в соотношениях (2.5) соответствуют реализуемому вдали от трещины виду напряженного состояния, который определяется напряжениями  $\sigma_{12} = \tau_\infty$ ,  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$  и условиями плоской деформации  $\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = \epsilon_{33} = 0$ . Используя эти условия, на основе соотношений (2.5) находим уравнение для определения значения  $\xi$  вдали от вершины трещины

$$A + C\xi + \frac{1}{6}[B + C\xi^{-1}] = 0 \quad (3.10)$$

Выражение (1.5) задает связь между параметром  $\xi$  и параметром вида деформированного состояния  $\gamma = (B + C\xi^{-1})(A + C\xi)^{-1}\xi$ .

Для среды, находящейся в условиях плоской деформации, параметр  $\gamma$  должен удовлетворять условию  $|\gamma| \leq 3$ . Поэтому один из корней уравнения (3.10) должен быть отброшен. Вид напряженного состояния вдали от трещины определяется параметром

$$\xi_\infty = \frac{\sqrt{(9A+B)^2 - 36C^2} - (9A+B)}{18C}$$

На основе выражения (1.1) и соотношений (1.4), (2.5) потенциал деформаций можно представить в виде

$$\Phi = \frac{1}{2}k(A\sigma_0^2 + B\sigma^2), \quad k = 1 + 2C\xi_\infty(A + B\xi_\infty^2)^{-1} \quad (3.11)$$

Таким образом, вдали от вершины трещины напряженно-деформированное состояние материала описывается потенциалом (3.11), который представляет собой потенциал для линейно упругого тела с характеристиками упругости  $kA$  и  $kB$ . С помощью коэффициента  $k$  внесена поправка к решению задачи линейной теории упругости. Значения параметра  $\xi_\infty$  и поправочного коэффициента  $k$  приведены в таблице для различных значений коэффициента  $C$ , который характеризует чувствительность свойств материала к виду напряженного состояния, например, отношение модуля упругости при сжатии  $E^-$  к модулю упругости при растяжении  $E^+$ .

Значение инвариантного интеграла по контуру  $\Gamma_2$  вдали от вершины трещины

$$J = \frac{3}{2}kA(A + \frac{4}{9}B)(A + \frac{1}{9}B)^{-1}\pi K_0^2 \quad (3.12)$$

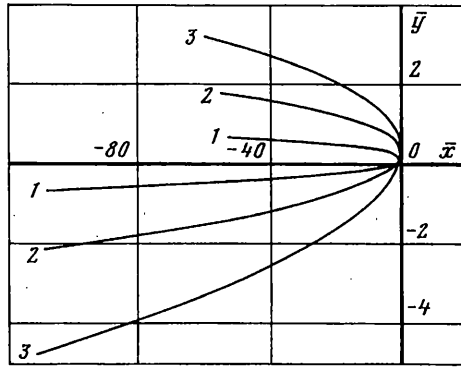
Здесь  $K_0 = \tau_\infty \sqrt{l/2}$  — коэффициент интенсивности напряжений в линейно упругом теле в условиях однородного сдвига вдали от трещины.

Приравнявая выражения (3.9) и (3.12), находим

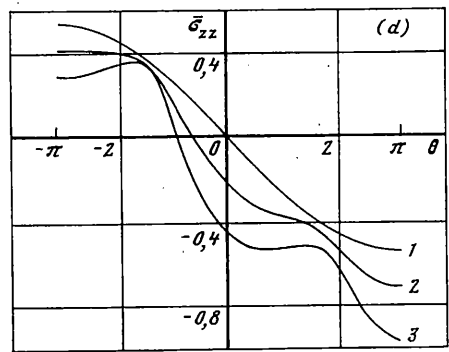
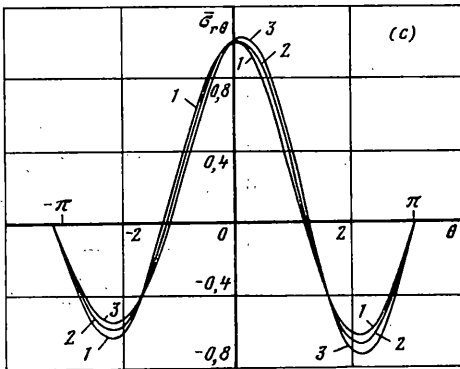
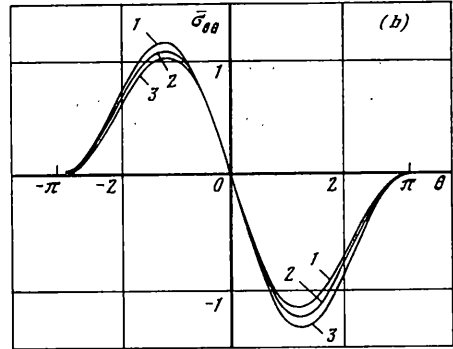
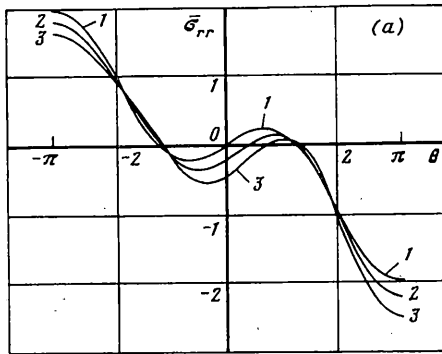
$$K_\sigma = \left[ k\pi \frac{AB}{(AB - C^2)} \frac{(A + \frac{4}{9}B)}{(A + \frac{1}{9}B)} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \chi_0(\vartheta) d\vartheta \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{2}} K_0 \quad (3.13)$$

В таблице приведены значения  $K_\sigma/K_0$ . На основе (2.8) и (3.13) можно определить коэффициент  $K_\epsilon$  в представлении (2.2) для деформаций.

На фиг. 2 приведены кривые изменения перемещений в зависимости от полярного угла  $\bar{u}_i(\vartheta) = u_i(K_0 A \sqrt{r})^{-1}$ . Кривые 1 соответствуют решению для линейно упругой



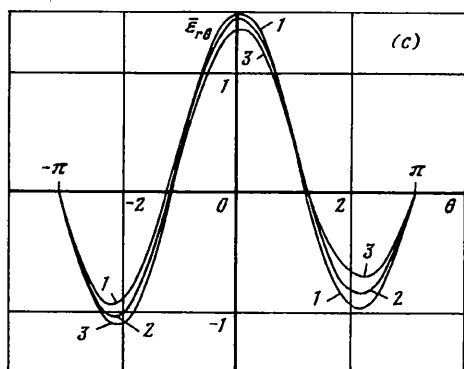
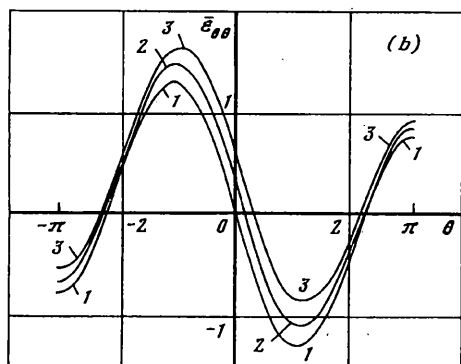
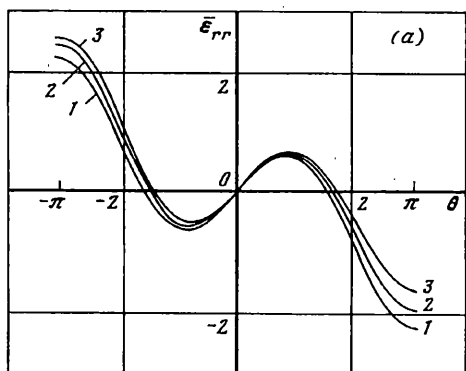
Фиг. 3



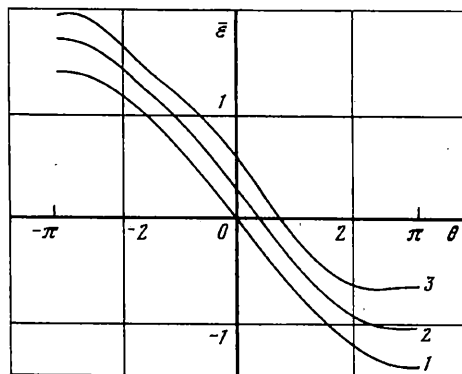
Фиг. 4

среды ( $C = 0$ ), кривые 2 – значению  $C/A = 0,3$ , кривые 3 –  $C/A = 0,6$ . В отличие от линейно упругого решения перемещение  $u_\theta$  не равно нулю на поверхности трещины. Наряду со сдвигом берегов разреза относительно друг друга происходит раскрытие трещины, возрастающее с ростом чувствительности материала к виду напряженного состояния. Диаграммы изменения перемещений несимметричны относительно плоскости трещины, и с ростом  $C$  асимметрия увеличивается.

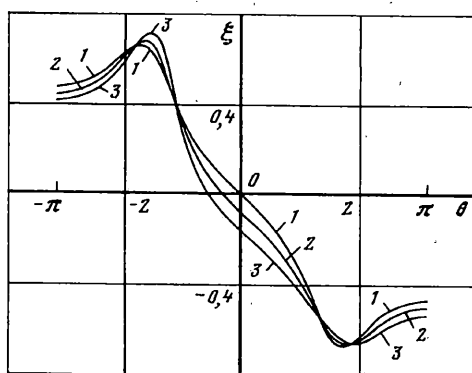
Контур раскрывшейся трещины показан на фиг. 3. Уравнение контура может быть задано параметрически  $x(r, \pm\pi) = -r - u_r(r, \pm\pi)$ ,  $y(r, \pm\pi) = -u_\theta(r, \pm\pi)$ , где  $r$  – полярный радиус. Кривые представлены для безразмерных переменных  $\bar{x} = (A\tau_\infty)^{-2} x/l$ ,



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

$\bar{y} = (A\tau_{\infty})^{-2} y/l$ ,  $\bar{r} = (A\tau_{\infty})^{-2} r/l$ . Рассматриваемая окрестность вершины трещины до деформации соответствует отрезку  $-80 \leq \bar{x} \leq 0$ ,  $\bar{y} = 0$ . Кривые 1-3 получены при значениях  $C/A = 0,1; 0,3; 0,6$ .

Данный результат принципиально отличается от известных решений [9, 12] согласно которым в условиях сдвига раскрытие трещины равно нулю.

Кривые изменения напряжений  $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} \sqrt{r}/K_0$ , приведенные на фиг. 4, тоже обладают существенной асимметрией. В окрестности верхнего берега трещины интервал изменения значений полярного угла, для которых напряжение  $\sigma_{rr}$  растягивающее (фиг. 4, а) уменьшается с увеличением коэффициента  $C$ . Существенно изменяется по

сравнению с линейно упругим распределением напряжения  $\sigma_{zz}$  (фиг. 4, d). Численные значения напряжения  $\sigma_{r\theta}$  незначительно отличаются от соответствующего распределения для упругого тела, но максимальное значение  $\sigma_{r\theta}$  достигается не на продолжении трещины, а под определенным углом к плоскости трещины, составляющим примерно  $7^\circ$  для  $C/A = 0,6$ .

На фиг. 5 показано распределение деформаций,  $\bar{\epsilon}_{ij}(\vartheta) = \epsilon_{ij}\sqrt{r}(K_0A)^{-1}$ . Кривые изменения объемной деформации  $\bar{\epsilon}(\vartheta) = \epsilon_{ii}\sqrt{r}(K_0A)^{-1}$  приведены на фиг. 6. Для рассматриваемых сред касательные напряжения вызывают дополнительное изменение объема.

Зависимость параметра вида напряженного состояния  $\xi$  от полярного угла представлена на фиг. 7. Состояние чистого сдвига в напряжениях ( $\xi = 0$ ) в отличие от линейно упругого решения достигается не на продолжении трещины, а под углом к плоскости трещины, который для  $C/A = 0,6$  составляет примерно  $-32^\circ$ .

Полученные решения позволяют сделать вывод о том, что учет зависимости деформационных свойств материала от вида напряженного состояния дает возможность уточнить распределение напряжений, деформаций и перемещений вблизи вершины трещины. Возникающая при нагружении неоднородность деформационных свойств среды приводит к нарушению соответствующей симметрии в распределении различных компонентов тензора напряжений. Несмотря на то, что эта приобретенная неоднородность свойств среды представляется непрерывно дифференцируемыми функциями координат, решение заметно отличается от асимптотического решения задачи линейной теории упругости, что свидетельствует о том, что сделанное в работе [9] утверждение о совпадении этих решений справедливо не всегда. Под действием касательных напряжений вдали от трещины происходит ее раскрытие. С увеличением поврежденности среды и соответствующим ростом чувствительности механических свойств среды к изменению вида напряженного состояния возрастают значения коэффициента интенсивности напряжений, что вызывает снижение критических напряжений, определяющих начало роста трещины. Данный результат находится в соответствии с полученным ранее для трещины нормального отрыва [16].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Гигиняк Ф.Ф., Ламашевский В.П. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Наук. думка, 1983. 366 с.
2. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979. 301 с.
3. Ломакин Е.В. Нелинейная деформация материалов, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 92–99.
4. Ломакин Е.В. Разномодульность композитных материалов // Механика композит. материалов. 1981. № 1. С. 23–29.
5. Ломакин Е.В. Определяющие соотношения деформационной теории для дилатирующих сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 6. С. 66–75.
6. Walsh J.B. The effect of cracks on the uniaxial elastic compression of rocks // J. Geophys. Res. 1965. V. 70. No. 2. P. 399–411.
7. Walsh J.B. The effect of cracks on the compressibility of rock // J. Geophys. Res. 1965. V. 70. № 2. P. 381–389.
8. Budiansky B., O'Connell R.J. Elastic moduli of a cracked solid // Intern. J. Solids and Structures. 1976. V. 12. No. 2. P. 81–97.
9. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
10. Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. and Phys. Solids. 1968. V. 16. No. 1. P. 1–12.
11. Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material // J. Mech. and Phys. Solids. 1968. V. 16. No. 1. P. 13–31.

12. *Hutchinson J.W.* Plastic stress and strain fields at crack tip // *J. Mech. and Phys. Solids*. 1968. V. 16. No. 5. P. 337–347.
13. *Pan J.* Asymptotic analysis of a crack in a power-law material under combined in-plane and out-of-plane shear loading conditions // *J. Mech. and Phys. Solids*. 1990. V. 38. No. 2. P. 133–159.
14. *Pan J., Shih C.F.* Elastic-plastic analysis of combined mode I and III crack-tip fields under small-scale yielding conditions // *J. Mech. and Phys. Solids*. 1990. V. 38. No. 2. P. 161–181.
15. *Pan J., Shih C.F.* Elastic-plastic analysis of combined mode I, II and III crack-tip fields under small-scale yielding conditions // *Intern. J. Solids and Structures*. 1992. V. 29. No. 22. P. 2795–2814.
16. *Белякова Т.А., Ломакин Е.В.* Трещина нормального разрыва в упругой среде с изменяющимися свойствами в условиях плоской деформации // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1999. № 3. С. 97–105.
17. *Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н.* Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1978. № 6. С. 29–34.

Москва

Поступила в редакцию  
18.02.1999