МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2000

УДК 539.374

© 2000 г. С.Е. АЛЕКСАНДРОВ

ПЛОСКИЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ИДЕАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

В рамках модели идеального жесткопластического материала существует класс решений известный как идеальные течения. Впервые возможность получения таких решений для установившихся плоских течений была показана в [1], в этой же работе было получено решение, описывающее процесс выдавливания через матрицу специальной формы. Доказательство существования идеальных течений для трехмерных установившихся течений дано в [2]. Для осесимметричного установившегося течения материала, подчиняющегося условию текучести Треска, уравнения идеальных течений были получены в характеристическом пространстве в [3] и на их основе в этой работе был рассмотрен процесс выдавливания через осесимметричную матрицу с определением ее эффективных геометрических параметров. В [4] приведены другие примеры двумерных установившихся идеальных течений и экспериментальные результаты. Теория идеальных течений развита также для неустановившихся процессов, например [5], и установившихся плоских течений упругопластического материала [6]. Некоторые общие свойства идеальных течений исследованы в [7], на основе этого исследования в [8] была разработана численная процедура, позволяющая определять оптимальные режимы операций листовой штамповки. Общее состояние теории отражено в [9]. Несмотря на определенные ограничения, накладываемые на краевые условия и форму инструмента [10], теория идеальных течений имеет большое практическое значение при теоретическом определении оптимальных геометрических параметров инструмента для различных операций обработки металлов давлением [11]. Отметим также, что простота уравнений теории идеальных течений позволяет использовать решения задач, полученные в рамках этой теории, (эти решения, естественно, являются и решениями в рамках общей теории течения жесткопластического материала) как тестовые при отладке компьютерных программ, что является неотъемлемым элементом численного моделирования [12].

В публикуемой работе исследованы уравнения теории идеальных течений для установившегося плоского течения. Известно, что теория плоской деформации является наиболее развитым разделом теории пластичности [13, 14]. В частности, в этом случае многие переменные подчиняются телеграфному уравнению в характеристическом пространстве. В публикуемой работе показано, что если условия идеальности течения выполняются, то существуют еще две переменные, которые подчиняются телеграфному уравнению. Эти переменные определяют связь между декартовой и криволинейной системой координат, координатные линии которой являются линиями тока и ортогональными к ним линиями.

1. Кинематические уравнения. Введем две системы координат: декартову систему x, y и ортогональную криволинейную систему ξ, η, базисные векторы которой, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$, в каждой точке направлены вдоль главных осей тензора напряжений (скоростей деформации) как показано на фиг. 1. Так как рассматриваются идеальные течения, то один из базисных векторов системы координат ξ, η, например $\mathbf{v}$, может также быть взят в качестве вектора скорости точки. (Это утверждение будет непосредственно следовать из дальнейших рассуждений). Обозначим $V = |\mathbf{v}|$ и $U = |\mathbf{u}|$. Тогда, геометрические соотношения, связывающие декартову систему координат с криволинейной системой ξ, η примут вид

$$\partial x/\partial\xi = V\cos\gamma, \quad \partial x/\partial\eta = -U\sin\gamma \tag{1.1}$$

$$\partial y/\partial\xi = V\sin\gamma, \quad \partial y/\partial\eta = U\cos\gamma$$

и

$$\partial\xi/\partial x = V^{-1}\cos\gamma, \quad \partial\xi/\partial y = V^{-1}\sin\gamma \tag{1.2}$$

$$\partial\eta/\partial x = -U^{-1}\sin\gamma, \quad \partial\eta/\partial y = U^{-1}\cos\gamma$$

Производные произвольной функции w в системе координат x, y связаны с ее производными в системе координат ξ, η соотношениями

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

Принимая во внимание (1.2), получим

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\cos\gamma}{V} - \frac{\partial w}{\partial\eta}\frac{\sin\gamma}{U}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\sin\gamma}{V} + \frac{\partial w}{\partial\eta}\frac{\cos\gamma}{U} \tag{1.3}$$

Проекции скорости на оси декартовой системы координат могут быть выражены через модуль скорости

$$\upsilon_x = V\cos\gamma, \qquad \upsilon_y = V\sin\gamma \tag{1.4}$$

Если в произвольной точке пространства совместить ось x с направлением касательной к линии ξ в данной точке, то есть положить, что в этой точке $\gamma = 0$, то будут выполняться следующие соотношения для компонент тензоров скоростей деформации в декартовой системе координат и системе координат ξ, η:

$$\varepsilon_\xi = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_\eta = \varepsilon_y, \quad \varepsilon_{\xi\eta} = \varepsilon_{xy} \quad \text{при } \gamma = 0 \tag{1.5}$$

Скорости деформации в декартовой системе координат определяются выражениями $\varepsilon_{xy} = ½(\partial\upsilon_x/\partial y + \partial\upsilon_y/\partial x)$, $\varepsilon_x = \partial\upsilon_x/\partial x$, $\varepsilon_y = \partial\upsilon_y/\partial y$. Подставляя сюда соотношения (1.4), получим

$$\varepsilon_x = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial\gamma}{\partial x}V\sin\gamma, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}\sin\gamma + \frac{\partial\gamma}{\partial y}V\cos\gamma$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial\gamma}{\partial y}V\sin\gamma + \frac{\partial V}{\partial x}\sin\gamma + \frac{\partial\gamma}{\partial x}V\cos\gamma\right)$$

Тогда из (1.5) и (1.3) при $\gamma = 0$, найдем

$$\varepsilon_\xi = V^{-1}\partial V/\partial\xi, \quad \varepsilon_\eta = VU^{-1}\partial\gamma/\partial\eta \tag{1.6}$$

$$\varepsilon_{\xi\eta} = ½(U^{-1}\partial V/\partial\eta + \partial\gamma/\partial\xi) \tag{1.7}$$

Система кинематических уравнений в системе координат ξ, η состоит из уравнения несжимаемости, условия, что в этой системе координат сдвиги равны нулю и уравнений

$$\partial^2 x/\partial\xi\partial\eta = \partial^2 x/\partial\eta\partial\xi, \quad \partial^2 y/\partial\xi\partial\eta = \partial^2 y/\partial\eta\partial\xi \tag{1.8}$$

Условие несжимаемости имеет вид $\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta = 0$. Тогда из (1.6) найдем

$$V^{-1}\partial V/\partial\xi + VU^{-1}\partial\gamma/\partial\eta = 0 \tag{1.9}$$

Условие отсутствия сдвигов эквивалентно уравнению $\varepsilon_{\xi\eta} = 0$, которое, вследствие (1.7), принимает вид

$$U^{-1}\partial V/\partial\eta + \partial\gamma/\partial\xi = 0 \tag{1.10}$$

Положим, что в произвольной точке пространства ось x совпадает с касательной к линии ξ. Тогда, подставляя (1.1) в (1.8), при $\gamma = 0$ получим

$$U^{-1}\partial V/\partial\eta + \partial\gamma/\partial\xi = 0 \tag{1.11}$$

$$V^{-1}\partial U/\partial\xi - \partial\gamma/\partial\eta = 0 \tag{1.12}$$

Уравнение (1.11) совпадает с (1.10), показывая, что выбор **v** в качестве базисного вектора координатных линий ξ и вектора скорости возможен. Таким образом, система уравнений для определения V, U и γ состоит из (1.9), (1.10) и (1.12). Выражая $V\partial\gamma/\partial\eta$ из (1.12) и подставляя в (1.9), получим $V^{-1}\partial V/\partial\xi + U^{-1}\partial U/\partial\xi = 0$. Интегрирование этого уравнения дает

$$VU = \Phi(\eta) \tag{1.13}$$

Здесь Φ – произвольная функция η. Очевидно, что домножение U на произвольную функцию η изменяет только масштаб η-линий. Поэтому система координат $\xi\eta$ всегда может быть выбрана так, что $\Phi(\eta) = 1$. Дальнейшее исследование ведется именно в такой координатной системе.

Выражая U из (1.13) и подставляя в (1.10) и (1.12), получим систему двух уравнений относительно V и γ в виде $V\partial V/\partial\eta + \partial\gamma/\partial\xi = 0$, $V\partial\gamma/\partial\eta + V^{-2}\partial\gamma/\partial\xi = 0$. С помощью стандартной процедуры можно показать, что эта система относится к гиперболическому типу и ее характеристики определяются уравнениями

$$d\xi/d\eta = MV^{-2}, \qquad M = \pm 1 \tag{1.14}$$

а соотношения вдоль них будут

$$\gamma + M\ln V = C \tag{1.15}$$

Здесь C – постоянная величина на каждой характеристике.

2. Статические уравнения. Система статических уравнений состоит из уравнений равновесия и уравнений условия текучести. Кроме того, необходимо принять во внимание уравнения связи напряженного и деформированного состояния, следующие из ассоциированного закона течения. В случае плоской деформации изотропного жестко пластического материала любое условие текучести может быть записано в виде

$$\sigma_\xi - \sigma_\eta = m2k, \qquad m = \pm 1 \tag{2.1}$$

где k – предел текучести при чистом сдвиге.

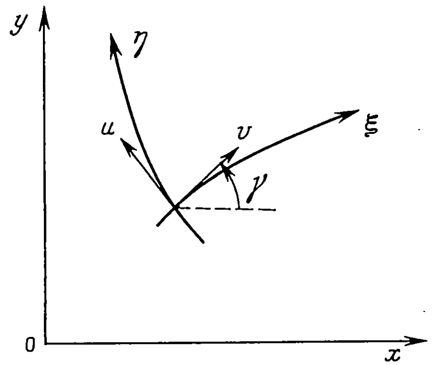
Вводя обозначение $2p = \sigma_\xi + \sigma_\eta$ и используя (2.1), компоненты тензора напряжений в декартовой системе координат могут быть представлены в виде

$$\sigma_x = p + mk\cos 2\gamma, \quad \sigma_y = p - mk\cos 2\gamma, \quad \tau_{xy} = mk\sin 2\gamma \tag{2.2}$$

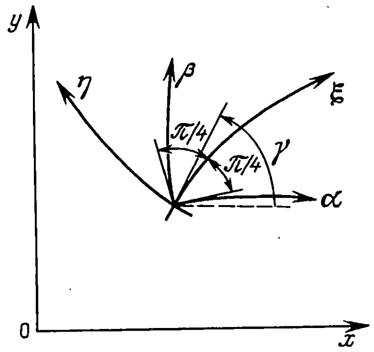
Уравнения равновесия в декартовой системе координат имеют форму

$$\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y = 0, \quad \partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{xy}/\partial x = 0 \tag{2.3}$$

Подставляя (2.2) в (2.3) и переходя к локальной системе координат в рассматриваемой точке ($\gamma = 0$) и, затем, к дифференцированию по ξ и η с помощью (1.3), получим $V^{-1}\partial p/\partial\xi + 2mkU^{-1}\partial\gamma/\partial\eta = 0$, $U^{-1}\partial p/\partial\eta + 2mkV^{-1}\partial\gamma/\partial\xi = 0$. Эти уравнения преобразуются к виду $\partial p/\partial\xi - 2mkV^{-1}\partial V/\partial\xi = 0, \partial p/\partial\eta - 2mkV^{-1}\partial V/\partial\eta = 0$ с помощью



Фиг. 1



Фиг. 2

(1.11) и (1.12). Интегрирование этих уравнений определяет две зависимости между p и V в виде $p - 2mk\ln V = p_2(\eta)$ и $p - 2mk\ln V = p_1(\xi)$, которые совместимы, если $p_2(\eta) = p_1(\xi) = p_0 = \text{const}$. Таким образом, окончательная связь между p и V имеет вид

$$(p - p_0)/(2k) = m\ln V \qquad (2.4)$$

Знак m зависит от величин главных напряжений: если вектор скорости совпадает с направлением большего в алгебраическом смысле главного напряжения, то $m = 1$, если с направлением меньшего главного напряжения, то $m = -1$. Весь тензор напряжений может быть получен из (2.2) и (2.4) при величине γ, определенной из решения кинематических уравнений.

3. Анализ уравнений в характеристических координатах. Введем характеристические координаты $\alpha\beta$, определяемые уравнениями (1.14). Из (1.13) и (1.14) следует, что угол между касательными к линиям ξ и к линиям α и β в любой точке равен $\mp \pi/4$ соответственно. (Этот результат, конечно, известен и из общей теории пластичности). Три координатные системы, xy, $\xi\eta$ и $\alpha\beta$, показаны на фиг. 2. Уравнения (1.14) могут быть переписаны в виде

$$\partial\xi/\partial\alpha = -V^{-2}\partial\eta/\partial\alpha, \quad \partial\xi/\partial\beta = V^{-2}\partial\eta/\partial\beta \qquad (3.1)$$

Соотношения вдоль характеристик (1.15) примут форму

$$\gamma - \ln V = 2c_2(\beta), \quad \gamma + \ln V = 2c_1(\alpha) \qquad (3.2)$$

Здесь $c_1(\alpha)$ – произвольная функция α и $c_2(\beta)$ – произвольная функция β. Из геометрических соображений (фиг. 2) следует

$$\partial x/\partial\alpha = h_\alpha \cos(\gamma - \pi/4), \quad \partial x/\partial\beta = h_\beta \cos(\gamma + \pi/4)$$
$$\partial y/\partial\alpha = h_\alpha \sin(\gamma - \pi/4), \quad \partial y/\partial\beta = h_\beta \sin(\gamma + \pi/4) \qquad (3.3)$$

Здесь h_α и h_β – параметры Ламе линий α и β соответственно. Из (3.2) получим

$$\gamma = c_1(\alpha) + c_2(\beta), \quad \ln V = c_1(\alpha) - c_2(\beta) \qquad (3.4)$$

Если $c_1(\alpha) \neq \text{const}$ и $c_2(\beta) \neq \text{const}$, то без ограничения общности можно положить

$$\gamma = \alpha + \beta, \quad \ln V = \alpha - \beta \qquad (3.5)$$

Введем новые зависимые переменные ε и ν по формулам

$$\xi = \varepsilon\exp(\beta - \alpha), \qquad \eta = \nu\exp(\alpha - \beta) \qquad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.1), с учетом (3.5) получим $\partial(\varepsilon + \nu)/\partial\alpha = \varepsilon - \nu$ и $\partial(\varepsilon - \nu)/\partial\beta = -(\varepsilon + \nu)$. Дифференцируя эти уравнения по β и α соответственно, после элементарных преобразований найдем

$$\partial^2\varepsilon/\partial\beta\partial\alpha + \varepsilon = 0, \qquad \partial^2\nu/\partial\beta\partial\alpha + \nu = 0 \tag{3.7}$$

Таким образом, переменные ε и ν в общем случае удовлетворяют телеграфному уравнению в характеристических координатах. Такому же уравнению удовлетворяют многие другие переменные в теории пластичности (без предположения об идеальности течения) [13, 14]. В этих же работах разработаны методы решения соответствующих краевых задач.

Используя (1.1), (1.13) и (3.1), параметры Ламэ h_α и h_β определяются так

$$h_\alpha = \sqrt{2}V\partial\xi/\partial\alpha, \quad h_\beta = \sqrt{2}V\partial\xi/\partial\beta \tag{3.8}$$

Здесь предполагается, что направления линий α и β выбраны так, что $\partial\xi/\partial\alpha > 0$ и $\partial\xi/\partial\beta > 0$. Подставляя (3.8) в (3.3), получим

$$\partial x/\partial\alpha = \sqrt{2}V\cos(\gamma - \pi/4)\partial\xi/\partial\alpha, \quad \partial x/\partial\beta = \sqrt{2}V\cos(\gamma + \pi/4)\partial\xi/\partial\beta$$

$$\partial y/\partial\alpha = \sqrt{2}V\sin(\gamma - \pi/4)\partial\xi/\partial\alpha, \quad \partial y/\partial\beta = \sqrt{2}V\sin(\gamma + \pi/4)\partial\xi/\partial\beta \tag{3.9}$$

В этих уравнениях V и γ являются известными функциями α и β в соответствии с (3.5). Уравнения (3.9) могут быть проинтегрированы вдоль любого удобного пути в координатах $\alpha\beta$, определяя связь между характеристическими и декартовыми координатами.

Положим теперь, что $c_1(\alpha) = \text{const}$. Тогда из (3.4) следует, что V и γ зависят только от β. Без ограничения общности можно принять $c_1(\alpha) = 0$ и $c_2(\beta) = \beta$. Тогда из (3.4) найдем

$$\gamma = \beta, \qquad \ln V = -\beta \tag{3.10}$$

Так как γ не зависит от α, то очевидно, что линии α образуют прямолинейное семейство характеристик (Результат, также известный из общей теории пластичности). Подставляя (3.10) в (3.1), получим $\partial\xi/\partial\alpha = -\exp(2\beta)\partial\eta/\partial\alpha$, $\partial\xi/\partial\beta = \exp(2\beta)\partial\eta/\partial\beta$. Интегрирование этих уравнений дает

$$\xi = [F(\beta) - \eta]\exp(2\beta), \quad \eta = [g(\alpha) + \int f(\beta)\exp(\beta)d\beta]\exp(-\beta) \tag{3.11}$$

Здесь $g(\alpha)$ – произвольная функция α, $F(\beta)$ – произвольная функция β, а функция $f(\beta)$ связана с $F(\beta)$ уравнением

$$dF/d\beta + 2F = 2f \tag{3.12}$$

Подставляя (3.10) и (3.11) с учетом (3.12) в (3.9) и интегрируя, найдем

$$x = [\sqrt{2}\cos(\beta - \pi/4)\xi + x_0(\beta)]\exp(-\beta)$$

$$y = [\sqrt{2}\sin(\beta - \pi/4)\xi + y_0(\beta)]\exp(-\beta)$$

Здесь ξ является функцией α и β, определенной уравнениями (3.11), а $x_0(\beta)$ и $y_0(\beta)$, функции β, определяются из уравнений

$$dx_0/d\beta - x_0 = -\sin(\beta)\exp(2\beta)dF/d\beta$$

$$dy_0/d\beta - y_0 = \cos(\beta)\exp(2\beta)dF/d\beta$$

которые могут быть проинтегрированы в квадратурах.

Анализ случая $c_1(\alpha) \neq \text{const}$, $c_2(\beta) \neq \text{const}$ проводится аналогично. Поэтому рассмотрим случай $c_1(\alpha) = \text{const}$, и $c_2(\beta) = \text{const}$. Из (3.4) очевидно, что оба семейства характеристик прямолинейны, а V и γ не зависят от координат. Таким образом, в этом случае возможно только перемещение соответствующего объема материала как жесткого целого.

4. Течение вблизи свободной поверхности. Из теории пластичности известно, что поле характеристик и напряженное состояние однозначно определяются вблизи свободной поверхности (если материал деформируется). Для определения поля скоростей требуются дополнительные условия. Однако, в случае идеальных течений эти условия получаются автоматически. Очевидно, что свободная поверхность (линия на плоскости xy) совпадает с одной из ξ линий. На этой линии $\sigma_\eta = 0$ и из (2.1) следует, что $\sigma_\xi = m2k$. Таким образом, $p = mk = \text{const}$. Тогда, из (2.4) получим, что на свободной поверхности $V = \text{const}$. Из общих свойств уравнений теории пластичности следует, что всегда можно принять на этой линии $V = 1$. Угол γ на свободной поверхности также известен. Таким образом, поскольку ξ линии не являются характеристиками, имеем задачу Коши, решение которой определяет напряженно-деформированное состояние вблизи свободной поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Richmond O., Devenpeck M.L.* A die profile for maximum efficiency in strip drawing // Proc. 4th U.S. Nat. Cong. Appl. Mech. V. 2. / Ed. R.M. Rosenberg New-York: ASME. 1962. P. 1053–1057.
2. *Hill R.* Ideal forming operations for perfectly plastic solids // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. № 3. P. 223–227.
3. *Richmond O., Morrison H.L.* Streamlined wire drawing dies of minimum length // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. № 3. P. 195–203.
4. *Richmond O.* Theory of streamlined dies for drawing and extrusion // Mechanics of the Solid State // Eds F.P.J. Rimrott and J. Schwaighofer Toronto: Univ. Toronto Press.1968. P. 154–167.
5. *Richmond O., Morrison H.L., Devenpeck M.L.* Ideal metal forming // Metal forming plasticity // Ed. H. Lippmann Berlin: Springer, 1978. P. 223–226.
6. *Hill R.* On the kinematics of steady plane flows in elastoplastic media // Metal forming and impact mechanics / Ed. S.R. Reid Oxford: Pergamon Press. 1985. P. 3–17.
7. *Chung K., Richmond O.* Ideal forming, Pt 1: Homogeneous deformation with minimum plastic work // Intern. J. Mech. Sci. 1992. V. 34. № 7. P. 575–591.
8. *Chung K., Richmond O.* Ideal forming, Pt 2: Sheet forming with optimum deformation // Intern. J. Mech. Sci. 1992. V. 34. № 8. P. 617–633.
9. *Chung K., Richmond O.* The mechanics of ideal forming // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1994. V. 61. № 1. P. 176–181.
10. *Weinberger H.F.* On the nonexistence of certain ideal forming operations for extrusion and drawing dies // J. Mech. Phys. Solids. 1997. V. 45. № 8. P. 1275–1280.
11. *Richmond O.* Are slipline theory and the rigid/plastic solid obsolete? // Topics in plasticity / Ed. W.H. Yang Ann Arbor: Acad. Press. 1991. P. 174–182.
12. *Sinclair G.B., Anaya-Dufresne M., Meda G., Okajima M.* Tuned test problems for numerical methods in engineering // Intern. J. Numer. Methods Engng. 1997. V. 40. № 22. P. 4183–4209.
13. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
14. *Друянов Б.А., Непершин Р.И.* Теория технологической пластичности. М.: Машиностроение, 1990. 271 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.01.1998