

УДК 539.3

© 2000 г. К.Ф. ЧЕРНЫХ

**КОМПЛЕКСНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
 В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

В механике разрушения широко используются инвариантные интегралы, введение и практическое использование которых связывают с именами Максвелла, Эшелби, Сандерса, Черепанова, Райсса, Будянского, Ноулса, Штернберга, Л.М. Зубова и др. [1–9]. Применительно к линейной плоской задаче были предложены [1] следующие интегралы:

$$(a) \quad J_k \equiv \int_g \left(\Phi v_k - \sigma_{v\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} \right) ds = 0$$

$$(b) \quad L \equiv \int_g \left[\left(\Phi v_1 x_2 + \sigma_{v1} u_2 - \sigma_{v\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_1} x_2 \right) - \left(\Phi v_2 x_1 + \sigma_{v2} u_1 - \sigma_{v\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_2} x_1 \right) \right] ds = 0$$

$$(c) \quad M \equiv \int_g \left(\Phi v_\alpha x_\alpha - \sigma_{v\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} x_\beta \right) ds = 0 \quad (k, \alpha, \beta = 1, 2)$$

Последние два интеграла были предложены Ноулсом и Штернбергом [3], причем последний интеграл предложен для изотропного материала.

В статье дан систематический вывод комплексных инвариантных интегралов для нелинейной плоской задачи. Характерные особенности комплексного подхода демонстрируются на примерах прямолинейного разреза, прямолинейного жесткого включения и клиновидного выреза. Последние два вида дефектов, по-видимому, ранее не рассматривались.

1. В нелинейной теории упругости широко используются: комплексные координаты

$$\begin{aligned} \zeta &= \dot{x}_1 + i \dot{x}_2, & \bar{\zeta} &= \dot{x}_1 - i \dot{x}_2, & z &= x_1 + i x_2 \\ \bar{z} &= x_1 - i x_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

дифференцированные по ним

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} - i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} + i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} \right) \quad (1.2)$$

векторные $(u_1 + i u_2)$ и тензорные

$$\begin{aligned} T_1 &= t_{11} + t_{22} + i(t_{12} - t_{21}), & T_2 &= t_{11} - t_{22} + i(t_{12} + t_{21}) \\ T_3 &= t_{13} + i t_{23}, & T_4 &= t_{31} + i t_{32}, & T_5 &= t_{33} \end{aligned} \quad (1.3)$$

комплексные компоненты.

Здесь \hat{x}_i, x_k – прямоугольные декартовы координаты материальной точки до и после деформации; градусом будут отмечаться величины, отнесенные к недеформированной конфигурации тела. В полярной системе координат $(\hat{r}, \hat{\phi})$ имеем

$$T_1^{\hat{r}} \equiv t_{\hat{r}\hat{r}} + t_{\hat{\phi}\hat{\phi}} + i(t_{\hat{r}\hat{\phi}} - t_{\hat{\phi}\hat{r}}) = T_1 \quad (1.4)$$

$$T_2^{\hat{r}} \equiv t_{\hat{r}\hat{r}} - t_{\hat{\phi}\hat{\phi}} + i(t_{\hat{r}\hat{\phi}} + t_{\hat{\phi}\hat{r}}) = T_2 e^{-i2\hat{\phi}}$$

$$T_3^{\hat{r}} \equiv t_{\hat{r}\hat{r}} - it_{\hat{\phi}\hat{r}} = T_3 e^{i\hat{\phi}}$$

$$T_4^{\hat{r}} = t_{\hat{r}\hat{r}} it_{\hat{\phi}\hat{r}} = T_4 e^{i\hat{\phi}}, \quad T_5^{\hat{r}} = T_5 = t_{33}$$

2. При обобщенной плоской деформации [11, 12]:

$$z = z(\zeta, \bar{\zeta}), \quad x_3 = \lambda \hat{x}_3 \quad (2.1)$$

где $\lambda = \text{const}$ – кратность удлинения в направлении третьей координатной оси. Угол поворота $\hat{\omega}$ вокруг той же оси определяется соотношением

$$e^{i\hat{\omega}} = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^{-1} \quad (2.2)$$

Кратность изменения объема J подсчитывается по формуле

$$J = \lambda \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} \right) = \lambda \left(\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 - \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 \right) \quad (2.3)$$

Однородное комплексное уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \{F^{-1} \cdot \mathcal{J}\}_1}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial \{F^{-1} \cdot \mathcal{J}\}_2}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.4)$$

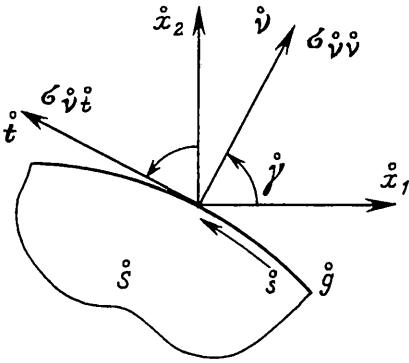
где $\{F^{-1} \cdot \mathcal{J}\}_i$ – комплексные компоненты тензора номинальных напряжений.

Рассмотрим цилиндрическое тело с осью, совпадающей с третьей координатной осью. Поскольку рассматриваемые величины не зависят от \hat{x}_3 , можно рассматривать произвольное поперечное сечение (недеформированного) цилиндра – область \hat{S} с граничным контуром \hat{g} (фиг. 1). На граничном контуре будем рассматривать статическое граничное условие

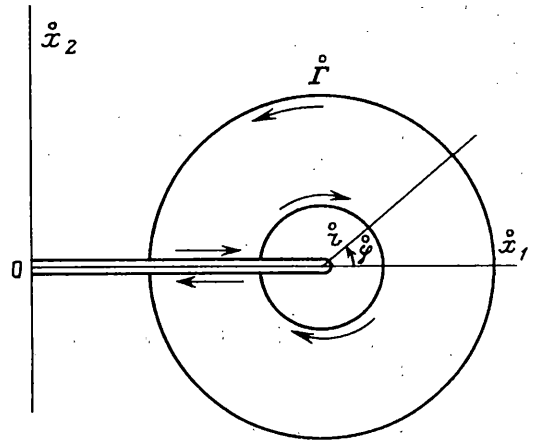
$$\{F^{-1} \cdot \mathcal{J}\}_1 e^{i\hat{\gamma}} + \{F^{-1} \cdot \mathcal{J}\}_2 e^{-i\hat{\gamma}} = 2[\sigma_{\hat{\nu}_1}(\hat{s}) + i\sigma_{\hat{\nu}_2}(\hat{s})] \quad (2.5)$$

либо условие жесткого края

$$\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} - 1 \right) e^{i\hat{\gamma}} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\hat{\gamma}} = 0 \quad (2.6)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Имеет место закон упругости

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial (\partial z / \partial \bar{\zeta})}, \quad \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial (\partial z / \partial \zeta)} \quad (2.7)$$

$$\{F^{-1} \cdot \Sigma\}_{33} = \partial \Phi / \partial \lambda$$

$$\Phi = \Phi \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}, \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}, \frac{\partial z}{\partial \zeta}; \lambda \right) \quad (2.8)$$

где Φ – упругий потенциал, а $\lambda = \text{const}$ рассматривается как параметр.

Для изотропного материала

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 = \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z / \partial \zeta|}$$

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z / \partial \bar{\zeta}|} \quad (2.9)$$

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_{33} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}, \quad \Phi = \Phi \left(\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|, \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|; \lambda \right)$$

Условные напряжения (симметричные напряжения Био) подсчитываются по формулам

$$\dot{\Sigma}_1 \equiv \dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} = \text{Re} \left[\left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^{-1} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 \right] \quad (2.10)$$

$$\dot{\Sigma}_2 \equiv \dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22} + i2\dot{\sigma}_{12} = \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2$$

$$\dot{\sigma}_{33} = \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_{33}$$

В процессе рассмотрения нелинейных проблем хрупкого разрушения, сосредоточенных воздействий, дислокаций и дисклинаций в кристаллах были выявлены

многочисленные дефекты истинных напряжений (напряжений Коши) [10, 12], поэтому ниже будут рассматриваться условные напряжения, свободные от этих дефектов.

$$\int_{\mathring{s}} X(\zeta, \bar{\zeta}) \left[\frac{\partial \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2}{\partial \zeta} \right] \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \left(\frac{\partial \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2}{\partial \bar{\zeta}} \right) \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} d\mathring{s} = 0$$

$$\int_{\mathring{s}} Y(\zeta, \bar{\zeta}) \left[\frac{\partial \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2}{\partial \bar{\zeta}} \right] \frac{dz}{\partial \zeta} + \left(\frac{\partial \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2}{\partial \zeta} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} / \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right) d\mathring{s} = 0$$
(3.1)

Здесь $X(\zeta, \bar{\zeta})$, $Y(\zeta, \bar{\zeta})$ – подлежащие выбору весовые функции. Интегрирование равенств (3.1) по частям с помощью равенств

$$\int_{\mathring{s}} u \frac{\partial v}{\partial \zeta} d\mathring{s} = \frac{1}{2} \int_{\mathring{s}} e^{-i\varphi} u v d\mathring{s} - \int_{\mathring{s}} v \frac{\partial u}{\partial \zeta} d\mathring{s}$$

$$\int_{\mathring{s}} u \frac{\partial v}{\partial \bar{\zeta}} d\mathring{s} = \frac{1}{2} \int_{\mathring{s}} e^{i\varphi} u v d\mathring{s} - \int_{\mathring{s}} v \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} d\mathring{s}$$

$$\int_{\mathring{s}} \frac{\partial u}{\partial \zeta} d\mathring{s} = \frac{1}{2} \int_{\mathring{s}} e^{-i\varphi} v d\mathring{s}, \quad \int_{\mathring{s}} \frac{\partial v}{\partial \bar{\zeta}} d\mathring{s} = \frac{1}{2} \int_{\mathring{s}} e^{i\varphi} u d\mathring{s}$$

и при учете (2.7), (2.8) приводит к искомым инвариантным интегралам

$$J \equiv \int_{\mathring{s}} \left\{ \Phi e^{i\varphi} - (\sigma_{\varphi_1} + \sigma_{\varphi_2}) \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \overline{(\sigma_{\varphi_1} + i\sigma_{\varphi_2})} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right\} d\mathring{s} = 0$$

$$L \equiv \int_{\mathring{s}} \left\{ \bar{\zeta} \left[\Phi e^{i\varphi} - (\sigma_{\varphi_1} + i\sigma_{\varphi_2}) \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \overline{(\sigma_{\varphi_1} + i\sigma_{\varphi_2})} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right] - \bar{\zeta} \left[\Phi e^{-i\varphi} - \overline{(\sigma_{\varphi_1} + i\sigma_{\varphi_2})} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - (\sigma_{\varphi_1} + i\sigma_{\varphi_2}) \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right] \right\} d\mathring{s} = 0$$
(3.2)

$$M \equiv \int_{\mathring{s}} \left\{ \bar{\zeta} \left[\Phi e^{i\varphi} - (\sigma_{\varphi_1} + i\sigma_{\varphi_2}) \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \overline{(\sigma_{\varphi_1} + i\sigma_{\varphi_2})} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right] + \zeta \left[\Phi e^{-i\varphi} - \overline{(\sigma_{\varphi_1} + i\sigma_{\varphi_2})} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - (\sigma_{\varphi_1} + i\sigma_{\varphi_2}) \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right] \right\} d\mathring{s} = 0$$

Отметим, что эти комплексные инвариантные интегралы не совпадают с интегралами (a) – (c), записанными в комплексной форме. Первый из них (a) справедлив для произвольного анизотропного материала. Второй (b) справедлив помимо изотропного материала и для трансверсально-изотропного. Третий (c) – при геометрически нелинейном подходе пригоден для материала с квадратным упругим потенциалом.

4. Покажем характерные особенности применения комплексного подхода на примере плоскости с прямолинейным разрезом. Идея метода, как известно, состоит во введении контура специального вида (фиг. 2). Если интеграл по берегам разреза равен нулю, то при показанном направлении обхода он распадается на две равные между собой части. На малой окружности справедлива асимптотика напряжений. На части же контура Γ_0 , достаточно удаленной от рассматриваемого конца разреза, справедливы зависимости линейной теории упругости, к тому же величина интеграла не зависит от вида Γ_0 , поэтому при нелинейном подходе его можно считать известной постоянной. После принятия дополнительных предположений появляется возможность полностью определить асимптотику напряженно-деформируемого состояния в окрестности конца разреза (трещины).

Так, если верхний (+) и нижний (-) берега разреза свободны от нагрузки, то на них

$$\sigma_{v_1}^{\pm} = \sigma_{v_2}^{\pm} = 0, \quad \dot{\gamma}^{\pm} = \mp \frac{\pi}{2}, \quad e^{i\dot{\gamma}^{\pm}} = \mp i, \quad e^{-i\dot{\gamma}^{\pm}} = \pm i \quad (4.1)$$

Отсюда и из (3.2) усматривается, что условия распада выполняются для интегрального равенства

$$\operatorname{Re} \int_{\dot{\Gamma}} \left[\Phi e^{i\dot{\gamma}} - \left(\sigma_{v_1} + i\sigma_{v_2} \right) \frac{d\bar{z}}{\partial \zeta} - \left(\overline{\sigma_{v_1} + i\sigma_{v_2}} \right) \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right] d\dot{s} = 0 \quad (4.2)$$

На окружности малого радиуса \dot{r} :

$$\dot{\gamma} = \dot{\varphi} - \pi, \quad e^{i\dot{\gamma}} = -ie^{i\dot{\varphi}}, \quad e^{-i\dot{\gamma}} = ie^{-i\dot{\varphi}}, \quad d\dot{s} = -r d\dot{\varphi} \quad (4.3)$$

и из соотношений (4.2), (4.3), (2.5) и (2.9) получаем для изотропного материала

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \Phi - \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z / \partial \zeta|} + \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right| \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z / \partial \bar{\zeta}|} \right) \right\} e^{i\dot{\varphi}} - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \left(\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z / \partial \zeta|} + \right. \\ \left. + \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z / \partial \bar{\zeta}|} \right) e^{-i\dot{\varphi}} \Big\} d\dot{\varphi} = \frac{X}{r} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$X = \operatorname{Re} \int_{\dot{\Gamma}} \left[\Phi e^{i\dot{\gamma}} - \left(\sigma_{v_1} + i\sigma_{v_2} \right) \frac{\bar{z}}{\partial \zeta} - \left(\overline{\sigma_{v_1} + i\sigma_{v_2}} \right) \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right] d\dot{s} \quad (4.5)$$

Примем в окрестности конца разреза асимптотические представления

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} \sim \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| e^{i\psi_1(r, \dot{\varphi})}, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} = \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right| e^{i\psi_2(r, \dot{\varphi})} \quad (4.6)$$

Отсюда и из выражений (2.9) следует

$$\begin{aligned} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 &\sim \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z / \partial \zeta|} e^{i\psi_1(r, \dot{\varphi})}, \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 &\sim \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z / \partial \bar{\zeta}|} e^{i\psi_2(r, \dot{\varphi})} \end{aligned} \quad (4.7)$$

На свободных от нагрузки берегах разреза имеем, согласно соотношениям (2.5) и (4.1):

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 \sim \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 \quad (4.8)$$

Отсюда и из (4.7) следует, что на верхнем ($\dot{\phi} = \kappa$) и нижнем ($\dot{\phi} = -\kappa$) концах (разомкнутой) малой окружности

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial |dz/\partial \zeta|} \right|_{\dot{\phi}=\pm\kappa} \sim \left. \frac{\partial \Phi}{\partial |dz/\partial \bar{\zeta}|} \right|_{\dot{\phi}=\pm\kappa}, \quad e^{i\psi_1(\dot{r}, \pm\kappa)} \sim e^{i\psi_2(\dot{r}, \pm\kappa)} \quad (4.9)$$

Подстановка представлений (4.6) в (4.4) дает

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{-\kappa}^{\kappa} \left\{ \Phi - \frac{1}{2} \frac{|dz|}{|\partial \zeta|} \frac{\partial \Phi}{\partial |dz/\partial \zeta|} + \frac{|dz|}{|\partial \bar{\zeta}|} \frac{\partial \Phi}{\partial |dz/\partial \bar{\zeta}|} \right\} e^{i\dot{\phi}} - \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{|dz|}{|\partial \zeta|} \frac{\partial \Phi}{\partial |dz/\partial \zeta|} + \frac{|dz|}{|\partial \bar{\zeta}|} \frac{\partial \Phi}{\partial |dz/\partial \bar{\zeta}|} \right) \times \\ \times \exp \left(i \left[\psi_2(\dot{r}, \dot{\phi}) - \psi_1(\dot{r}, \dot{\phi}) - \dot{\phi} \right] \right) d\dot{\phi} = \frac{X}{\dot{r}} \quad (4.10) \end{aligned}$$

Соотношениям (4.9), (4.10) необходимо должны удовлетворять искомые функции $|dz/\partial \zeta|$, $|dz/\partial \bar{\zeta}|$, $\psi_1(\dot{r}, \dot{\phi})$, $\psi_2(\dot{r}, \dot{\phi})$. Но они недостаточны для полного определения этих функций. Необходимы дополнительные соображения.

Примем простейшие предположения: $\psi_1(\dot{r}, \dot{\phi}) \sim k\dot{\phi} + l$, $\psi_2(\dot{r}, \dot{\phi}) \sim m\dot{\phi} + p$, где k, l, m, p – искомые постоянные. Условию (4.9) удовлетворяют соотношения

$$m \sim k + 1, \quad p \sim l + \pi, \quad \text{т.е.} \quad \psi_2 = \psi_1 + \dot{\phi} + \pi \quad (4.11)$$

Полагая затем, что величины $|dz/\partial \zeta|$, $|dz/\partial \bar{\zeta}|$ в окрестности конца разреза не зависят от $\dot{\phi}$, имеем везде на малой окружности

$$\frac{\partial \Phi}{\partial |dz/\partial \phi|} \sim \frac{\partial \Phi}{\partial |dz/\partial \bar{\zeta}|} \quad (4.12)$$

Отсюда и из соотношений (4.10) и (4.11) находим

$$\left(\frac{|dz|}{|\partial \zeta|} + \frac{|dz|}{|\partial \bar{\zeta}|} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial |dz/\partial \zeta|} \sim \frac{X}{\dot{r}} = \frac{2X}{\pi a} \left(\frac{a}{2\dot{r}} \right)^l \quad (4.13)$$

Наконец, из соотношений (2.10), (1.4), (4.11) и (4.13) имеем

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{rr}^{\circ} \\ \dot{\sigma}_{\phi\phi}^{\circ} \\ \dot{\sigma}_{r\phi}^{\circ} \end{pmatrix} \sim \frac{\partial \Phi}{\partial |dz/\partial \zeta|} \begin{pmatrix} \sin^2 \dot{\phi}/2 \\ \cos^2 \dot{\phi}/2 \\ \sin \dot{\phi}/2 \cos \dot{\phi}/2 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Так, например, для упругих потенциалов с асимптотикой

$$\phi \sim A \left| \frac{dz}{\partial \zeta} \right|^n + B \left| \frac{dz}{\partial \bar{\zeta}} \right|^n \quad (B > A > 0, \quad n=1) \quad (4.15)$$

находим из соотношений (4.14) и (4.15)

$$\left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right| \sim \left(\frac{A}{B} \right)^{1/(n-1)} \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\sigma}_{rr} \\ \ddot{\sigma}_{\phi\phi} \\ \ddot{\sigma}_{r\phi} \end{pmatrix} \sim \frac{n(AB)^{1/n}}{(A^{1/(n-1)} + B^{1/(n-0)})^n} \left(\frac{2X}{\pi na} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{a}{2r} \right)^{\frac{n-1}{n}} \times \begin{pmatrix} \sin^2(\dot{\phi}/2) \\ \cos^2(\dot{\phi}/2) \\ \sin(\dot{\phi}/2) \cos(\dot{\phi}/2) \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Отметим, что при описанной процедуре асимптотика истинных напряжений определяется лишь с точностью до угла поворота ω .

5. Рассмотрим плоскость, для которой на фиг. 2 показан не разрез, а жесткое линейное включение. В этом случае необходим комплексный инвариантный интеграл, связанный с плотностью дополнительной энергии (материал изотропен).

$$\Psi = \Psi \left[\left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_1, \left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_2, \left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_{33} \right] \quad (5.1)$$

для которой

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} - 1 = \frac{\left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_1}{\left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_1} \frac{\partial \Psi}{\partial \left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_1} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_2}{\left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_2},$$

$$\lambda = \frac{\partial \Psi}{\partial \left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_{33}}$$

При этом

$$\Psi = C - \Phi \quad (5.3)$$

$$C = \frac{1}{2} \left[\left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_1 \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} - 1 \right) + \left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_1 \overline{\left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} - 1 \right)} + \left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_2 \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} + \left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_2 \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} + \left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_{33} \lambda \right] \quad (5.4)$$

Однородному уравнению равновесия (2.4) удовлетворяют выражения

$$\left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_1 = \frac{\partial \chi}{\partial \zeta}, \quad \left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_2 = -\frac{\partial \chi}{\partial \bar{\zeta}} \quad (5.5)$$

где $\chi \left(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3 \right)$ – комплексная функция напряжения.

С помощью этих зависимостей и условий жесткого края (2.6) аналогично проделанному выше находятся следующие выражения на малой окружности:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_1} \sim \frac{\partial \Psi}{\partial \left\{ F^{-1} \cdot J\Sigma \right\}_2} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[F^{-1} \cdot J\Sigma \right]_2 \right\} \frac{\partial \Psi}{\partial \left\{ \left[F^{-1} \cdot J\Sigma \right]_1 \right\}} + \left\{ \left[F^{-1} \cdot J\Sigma \right]_1 \right\} \frac{\partial \Psi}{\partial \left\{ \left[F^{-1} \cdot J\Sigma \right]_2 \right\}} \sim \frac{2X}{\pi a} \left(\frac{a}{2r} \right)^1 \\ -X = & \int_{\dot{r}} \Psi e^{i\dot{\gamma}} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1 \right) e^{i\dot{\gamma}} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\dot{\gamma}} \right] \left\{ \left[F^{-1} \cdot J\Sigma \right]_1 \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1 \right) e^{i\dot{\gamma}} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\dot{\gamma}} \right] \left\{ \left[F^{-1} \cdot J\Sigma \right]_2 \right\} d\dot{s} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{rr} \\ \dot{\sigma}_{\phi\phi} \\ \dot{\sigma}_{r\phi} \end{pmatrix} \sim \frac{1}{2} \left[\left\{ \left[F^{-1} \cdot J\Sigma \right]_1 \right\}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \left[F^{-1} \cdot J\Sigma \right]_2 \right\} \begin{pmatrix} -\cos \dot{\phi} \\ \cos \dot{\phi} \\ \sin \dot{\phi} \end{pmatrix} \right] \quad (5.8)$$

Для потенциала Ψ , отвечающего потенциалу ϕ с асимптотикой (4.15), имеем

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{rr} \\ \dot{\sigma}_{\phi\phi} \\ \dot{\sigma}_{r\phi} \end{pmatrix} \sim \frac{(AB)^{-1/n}}{(A+B)^{(n-1)/n}} \left(\frac{2X}{\pi a} \right)^{n-1} \left(\frac{a}{2r} \right)^{n-1} \left[B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} -\cos \dot{\phi} \\ \cos \dot{\phi} \\ \sin \dot{\phi} \end{pmatrix} \right] \quad (5.9)$$

Сопоставление полученного выражения с (4.16) показывает, что для прямолинейного разреза (трещины) и прямолинейного жесткого включения коэффициенты сингулярности (показатели степени выражения $(a/2r)^\rho$) совпадают

$$\rho = (n-1)/n \quad (5.10)$$

для линейного материала $n=2$ и $\rho=1/2$ (стандартная особенность).

6. Для плоскости с клиновым вырезом, берега которого, верхний (+) и нижний (-), свободны от нагрузки (фиг. 3) имеем

$$\dot{\gamma}^\pm = \mp(\pi/2 + \dot{\beta}), \quad e^{i\dot{\gamma}^\pm} = \mp i e^{\mp i\dot{\beta}}, \quad e^{-i\dot{\gamma}^\pm} = \pm i e^{\pm i\dot{\beta}} \quad (6.1)$$

$$\sigma_{v_1}^\pm (\dot{s}^\pm) = \sigma_{v_2}^\pm (\dot{s}^\pm) = 0, \quad d\dot{s}^\pm = \pm d\dot{x}_1 / \cos \dot{\beta}$$

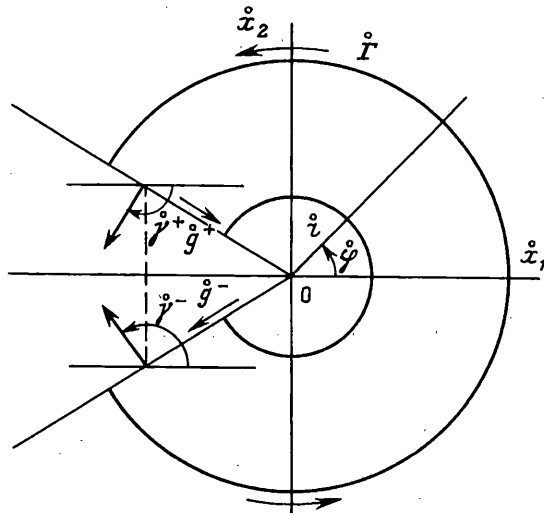
С учетом этого из (3.2) и фиг. 3 следует

$$\int_{\dot{s}^\pm} \left\{ \Phi e^{i\dot{\gamma}} - \left(\sigma_{v_1}^\pm + i\sigma_{v_2}^\pm \right) \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} - \left(\sigma_{v_1}^\pm + i\sigma_{v_2}^\pm \right) \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right\} d\dot{s}^\pm = \mp \frac{e^{\mp i\dot{\beta}}}{\cos \dot{\beta}} \int_{-\infty}^0 \Phi^\pm(\dot{x}_1) d\dot{x}_1$$

$$\int_{\dot{s}^+ + \dot{s}^-} \left\{ \Phi e^{i\dot{\gamma}} - \left(\sigma_{v_1}^\pm + i\sigma_{v_2}^\pm \right) \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} - \left(\sigma_{v_1}^\pm + i\sigma_{v_2}^\pm \right) \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right\} d\dot{s} =$$

$$= i \int_{-\infty}^0 (\Phi^+ + \Phi^-) d\dot{x}_1 - \operatorname{tg} \dot{\beta} \int_{-\infty}^0 (\Phi^+ + \Phi^-) d\dot{x}_1$$

Отсюда следует, что при значениях упругого потенциала, равных в симметричных



Фиг. 3

относительно оси абсцисс точках контура (т.е. при $\Phi^+(\dot{x}_1) = \Phi^-(\dot{x}_1)$):

$$\operatorname{Re} \int_{\dot{g}^+ + \dot{g}^-} \left\{ \Phi e^{i\dot{\varphi}} - \left(\sigma_{v_1} + i\sigma_{v_2} \right) \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} - \left(\overline{\sigma_{v_1} + i\sigma_{v_2}} \right) \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right\} d\dot{s} = 0$$

сформулированное (дополнительное) условие заведомо выполняется при напряженно-деформированном состоянии, симметричном относительно оси абсцисс.

Итак, полученный комплексный инвариантный интеграл распадается на два, и вместо соотношений (4.5)–(4.10) имеем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial |dz/\partial \zeta|} \right|_{\dot{\varphi} = \pm(\pi - \dot{\beta})} &\sim \left. \frac{\partial \Phi}{\partial |dz/\partial \bar{\zeta}|} \right|_{\dot{\varphi} = \pm(\pi - \dot{\beta})} & (6.2) \\ \exp \left[i \left\{ \psi_1 \left[\dot{r}, \pm(\pi - \dot{\beta}) \right] \mp \dot{\beta} \right\} \right] &\sim \exp \left[i \left\{ \psi_2 \left[\dot{r} \pm (\pi - \dot{\beta}) \right] \pm \dot{\beta} \right\} \right] \\ \operatorname{Re} \int_{(\pi - \dot{\beta})}^{\pi - \dot{\beta}} \left\{ \Phi - \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| \frac{\partial \Phi}{\partial |dz/\partial \zeta|} + \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right| \frac{\partial \Phi}{\partial |dz/\partial \bar{\zeta}|} \right) e^{i\dot{\varphi}} - \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right| \frac{\partial \Phi}{\partial |dz/\partial \zeta|} + \right. \right. & \\ \left. \left. + \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| \frac{\partial \Phi}{\partial |dz/\partial \bar{\zeta}|} \right) \exp i \left[\psi_2(\dot{r}, \dot{\varphi}) - \psi_1(\dot{r}, \dot{\varphi}) - \dot{\varphi} \right] \right\} d\dot{\varphi} &= \frac{X(\dot{\beta})}{\dot{r}}. & (6.3) \end{aligned}$$

Соотношению (6.2) удовлетворяет равенство

$$\psi_2 = \psi_1 + \frac{\pi - 2\dot{\beta}}{\pi - \dot{\beta}} \dot{\varphi} + \pi$$

так что

$$\exp \left[i(\psi_2 - \psi_1 - \dot{\varphi}) \right] - i \exp \left[-i\dot{\beta} \dot{\varphi} / (\pi - \dot{\beta}) \right] \quad (6.4)$$

Как и выше, считаем $|\partial z/\partial \zeta|$ и $|\partial z/\partial \bar{\zeta}|$ независимыми от ϕ в окрестности угловой точки. Тогда, согласно (6.2), везде на малой окружности

$$\frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z/\partial \zeta|} \sim \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z/\partial \bar{\zeta}|} \quad (6.5)$$

и уравнение (6.3) приводится к виду

$$\sin \dot{\beta} \left[2\Phi + \frac{\pi - \dot{\beta}}{\dot{\beta}} \left(\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| + \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right| \right) \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z/\partial \zeta|} \right] = \frac{X(\dot{\beta})}{\dot{\beta}} \quad (6.6)$$

Наконец, соотношение (4.14) заменяется следующим:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\sigma}_{rr} \\ \ddot{\sigma}_{\phi\phi} \\ \ddot{\sigma}_{r\phi} \end{pmatrix} \sim \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial \bar{z}/\partial \zeta|} \begin{pmatrix} \sin^2 \frac{\pi + \dot{\beta}}{\pi - \dot{\beta}} \frac{\dot{\phi}}{2} \\ \cos^2 \frac{\pi - \dot{\beta}}{\pi - \dot{\beta}} \frac{\dot{\phi}}{2} \\ \sin \frac{\pi - \dot{\beta}}{\pi - \dot{\beta}} \frac{\dot{\phi}}{2} \cos \frac{\pi + \dot{\beta}}{\pi - \dot{\beta}} \frac{\dot{\phi}}{2} \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

Для упругих потенциалов с асимптотикой (4.15) имеем

$$\begin{pmatrix} \ddot{\sigma}_{rr} \\ \ddot{\sigma}_{\phi\phi} \\ \ddot{\sigma}_{r\phi} \end{pmatrix} \sim C(\dot{\beta}, n) \begin{pmatrix} \sin^2 \frac{\pi + \dot{\beta}}{\pi - \dot{\beta}} \frac{\dot{\phi}}{2} \\ \cos^2 \frac{\pi - \dot{\beta}}{\pi - \dot{\beta}} \frac{\dot{\phi}}{2} \\ \sin \frac{\pi + \dot{\beta}}{\pi - \dot{\beta}} \frac{\dot{\phi}}{2} \cos \frac{\pi + \dot{\beta}}{\pi - \dot{\beta}} \frac{\dot{\phi}}{2} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

$$C(\dot{\beta}, n) = \frac{n(AB)^{1/n}}{(A^{1/(n-1)} + B^{1/(n-1)})^{(n-1)/n}} \left[\frac{2X(\dot{\beta}, n)}{a \sin \dot{\beta} \left(2 + (\pi - \dot{\beta})n/\dot{\beta} \right)} \right]^{(n-1)/n}$$

Нетрудно видеть, что при $\dot{\beta} \rightarrow 0$ соотношения этого раздела совпадают с полученными в п. 4. При этом величину

$$\chi(\dot{\beta}, n) = \left[\frac{\sin \dot{\beta} \left[2 + (\pi - \dot{\beta})n/\dot{\beta} \right]}{\pi n} \right]^{n/(n-1)} \quad (6.9)$$

можно рассматривать как коэффициент угла раствора выреза для упругих потенциалов с асимптотикой (4.15).

Соотношения (6.8) могут создать впечатление, что порядок сингулярности полученного решения не зависит от угла $\dot{\beta}$. Но это не так, поскольку порядок сингулярности корректирует функция $X(\dot{\beta}, n)$. Сказанное было проверено применительно к случаю

редуцированного стандартного материала ($n = 2$), для которого было получено точное решение [12]. И там и здесь было получено одно и то же значение порядка сингулярности

$$\rho(\beta) = \frac{1/2 - \beta/\pi}{1 - \beta/\pi}$$

7. Вывод комплексных интегралов непосредственно из комплексных зависимостей позволил уточнить их вид, несколько расширить область применимости, выяснить вопрос о применимости полученных ранее инвариантных интегралов при нелинейном подходе и получить новые результаты. К последним можно отнести рассмотрение жестких линейных включений и клинового выреза. Из сказанного выше следует также, что проблема использования метода инвариантных интегралов распадается на четыре части:

- вывод интеграла и установление области его применимости,
- расчленение интеграла на два,
- получение полезных асимптотических зависимостей и
- уточнение полученных асимптотических формул.

Большинство известных публикаций относится к первой, более простой части проблемы. Применительно к нелинейной проблеме результаты по остальным трем также можно считать новыми [13].

Изложенное в статье было получено при финансовой поддержке гранта РФФИ (99-01-00686) и гранта поддержки ведущих научных школ РФ (96-15-96066).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Budiansky B., Rice J.R.* Conservation laws and energy-release rates // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1973. V. 40. № 1. P. 201–203.
2. *Eshelby J.D.* The continuum theory of lattice defects // *Solid State Physics. N.Y.: Acad. Press, 1956. V. 3. P. 79–144.*
3. *Knowles J.K., Sternberg E.* On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics // *Arch. Ration. Mech. and Analysis*, 1972. V. 44. № 3. P. 187–211.
4. *Rice J.R.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1968. V. 35. № 2. P. 379–386.
5. *Sanders J.L.* On the Griffith-Irwin fracture theory // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1960. V. 27. № 2. P. 352–353.
6. *Черепанов Г.П.* О распространении трещин в сплошной среде // *ПММ.* 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 476–488.
7. *Черепанов Г.П.* Инвариантные Г-интегралы и их приложения // *ПММ.* 1977. Т. 41. Вып. 3. С. 399–412.
8. *Зубов Л.М.* О дислокациях Вольтерра в нелинейно-упругих телах // *Докл. АН СССР.* 1986. Т. 287. № 3. С. 579–582.
9. *Зубов Л.М.* Теория дислокаций Вольтерра в нелинейно-упругих телах // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1987. № 5. С. 140–147.
10. *Новожилов В.В., Черных К.Ф.* Об "истинных" мерах напряжений и деформаций в нелинейной механике деформируемого тела // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1987. № 5. С. 73–79.
11. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
12. *Черных К.Ф.* Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М.: Наука, Физматлит, 1996. 287 с.
13. *Черных К.Ф.* Сингулярная нелинейная упругость. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 1998. 45 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
11.03.1998