МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2000

УДК 539.3

© 2000 г. О.Н. ЛУЩИК

СИНГУЛЯРНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ: ОБЗОР И КЛАССИФИКАЦИЯ

Предлагаемая вниманию читателя статья – это не справочник по сингулярным конечным (СКЭ) элементам, где можно найти нужную формулу. Цель настоящей работы, ограниченной рамками журнальной статьи, значительно скромнее. Она предназначена сыграть роль своеобразного путеводителя, который должен помочь пользователю не только не заблудиться в зарослях СКЭ и родственных им подходов, но и позволить выбрать среди них наиболее подходящий для конкретной задачи вариант сингулярного элемента.

1. Введение. Почти одновременно, в самом начале семидесятых, было опубликовано несколько работ [1–3], в которых предлагались различные варианты построения специальных конечных элементов, предназначенных для расчета с помощью метода конечных элементов (МКЭ) напряженно-деформированного состояния (НДС) в окрестности особых точек границы. С тех пор парк сингулярных конечных элементов – именно это название закрепилось за ними – разросся необычайно. Причем традиционно подавляющее большинство в нем принадлежит сингулярным элементам "зарубежного происхождения", а русскоязычные работы составляют лишь незначительную часть. С другой стороны, в имеющихся на русском языке переводных монографиях, посвященных, как правило, изложению основ МКЭ, сингулярные конечные элементы представлены очень неполно, что отражает не только дату выхода книги на языке оригинала, но и специфику освещаемых в ней проблем. Поэтому показалось небезынтересным сделать обзорную статью по вышеназванной тематике, тем более что пик новых разработок в области СКЭ, по-видимому, прошел, и наступило время, когда применение сингулярных элементов в конечноэлементных программах прикладного назначения должно стать рядовой операцией для программиста-механика.

2. Обзор. Как известно, линейная теория упругости иногда предсказывает появление бесконечных напряжений в отдельных точках или линиях исследуемого тела. К таким прогнозам особенно чувствительны численные методы решения, в частности ставший очень популярным в последнее время МКЭ. Для обработки сингулярностей с помощью МКЭ было предложено множество альтернативных способов; некоторые из них представлены в обзорах [4–15]. Из всего многообразия подходов можно выделить три основных направления: локальное рафинирование сетки, суперпозицию конечноэлементного решения с известным аналитическим поведением на всей рассчитываемой области или на ее части и, наконец, применение специальных сингулярных элементов.

Первый способ использует только стандартные конечные элементы, уменьшая их размеры или повышая степень полиномиальной аппроксимации в местах больших градиентов. При этом произвольное рафинирование, как правило, работает плохо. Для улучшения сходимости рекомендуется [16] при сгущении сетки учитывать порядок известного сингулярного поведения. Однако – даже если не принимать во внимание сложность написания такого рода программ, – при любом локальном рафинировании сетки, как показали Тонг и Пиан [17], скорость сходимости ограничивается порядком сингулярности и ее нельзя улучшить, оставшись в рамках стандартного МКЭ. Поэтому требуются более радикальные меры, способные объединить известное НДС в окрестности особых точек с конечноэлементной формулировкой, что облегчается, с одной стороны, единообразной аналитической формой сингулярности в линейной теории упругости, а с другой – вариационной природой МКЭ.

Метод суперпозиции – один из способов такого объединения. В семидесятые годы он развивался (работы Ямамото, Морли, Бартоломея и др.) параллельно с подходом, использующим сингулярные конечные элементы, но не выдержал "конкуренции" с последним. Будучи ограниченными рамками и темой статьи, работы вышеназванных авторов не будем включать в список литературы. Отметим только, что суть метода суперпозиции состоит в следующем: на первом этапе с помощью стандартного МКЭ задача решается сначала с заданными граничными условиями, а потом – на той же сетке – еще M задач (где M – число используемых членов сингулярной асимптотики), граничные условия которых модифицированы с учетом этих членов. Полученные конечноэлементные поля, скомбинированные вместе с однородными решениями, дают решение исходной задачи в виде линейной комбинации, неизвестные коэффициенты которой вычисляются – тем или иным способом – на втором этапе метода суперпозиции, и именно способом определения этих коэффициентов отличаются различные варианты последнего.

Таким образом, и локальное рафинирование и суперпозиция конечноэлементного и аналитического решений продолжают работать со стандартными полиномиальными конечными элементами, внося необходимые изменения в МКЭ-программу на сеточном уровне или на уровне граничных условий. Снять проблему сингулярности в МКЭ путем модификации самих конечных элементов, а именно с помощью дополнения стандартных пробных функций известными однородными решениями для клина, попытался в середине 70-х годов Бензли [18]. Он предложил называть такие элементы "обогащенными" и использовать их не во всей области, а только там, где ощутимо влияние сингулярности. И хотя на год раньше него в чем-то похожий подход уже был описан [19], в литературе за обогащенными сингулярными элементами утвердилось название "элементы типа Бензли". Обогащенный элемент Бензли – это четырехугольник, у которого стандартная часть аппроксимации перемещений берется билинейной, а добавочная, аналитическая, принимает нулевые значения в узлах. В результате при стыковке с линейными изопараметрическими элементами только в узлах гарантируется непрерывность поля перемещений. Для получения полной пограничной непрерывности по $\mathbf{u}$ Бензли рекомендует [18] применять специальные B-элементы, расположив их между обогащенными и стандартными и подобрав корректирующий множитель при добавочной, асимптотической, части восполнения таким образом, чтобы он был равен единице на стороне, примыкающей к обогащенному элементу, и нулю – на противоположной. Хотя можно и по-другому: в [20] корректирующий множитель вносится прямо в обогащенный сингулярный элемент, делая тем самым аналитическую составляющую нулевой на границе, примыкающей к стандартным элементам.

В дальнейшем сингулярный элемент Бензли был расширен на квадратичный [21] и кубический [22] варианты полиномиальной составляющей и применялся как с B-элементами [21, 23–25], так и без них [22, 26–28]. Однако присутствие стандартных изопараметрических слагаемых в функциях формы обогащенных элементов можно рассматривать как своеобразный "рудимент" классического варианта МКЭ для задач плоской теории упругости. Во-первых, потому что добиться конформности, свойственной изопараметрическим элементам, с их помощью все равно не удается. А во-вторых, потому что в настоящее время существует большой выбор известных локальных однородных решений (сингулярных асимптотик), которые, будучи дополненные соответствующими частными решениями, удовлетворяющими ненулевым граничным условиям – если таковые имеются, – могут с достаточной степенью точности описывать поля перемещений и напряжений в окрестности особых точек.

Первые сингулярные элементы только с асимптотической аппроксимацией перемещений в вершине трещины были разработаны Бисковым [1] и Вильсоном [29], а также в серии работ Хилтона и Хатчинсона [3, 30–32]. Они имели форму правильного многоугольника [1, 29] или круга [29–32], в центре которых находилась вершина трещины, и при соединении с обычными элементами обеспечивали непрерывность поля перемещений только в узлах. Помимо формы, основное различие между элементами типа Бискова и типа Вильсона состояло в том, что у первого число узлов, а значит и число членов асимптотики, участвующих в аппроксимации, были изначально заданы, а у второго их можно было произвольно менять. Поэтому элемент типа Вильсона и его модифицикации [33–39] позволяли хоть как-то контролировать межэлементную разрывность поля перемещений, увеличивая число узлов на границе или требуя совпадения в последних не только перемещений, но и их производных.

Еще один способ ослабить негативное влияние несовместности перемещений на границе асимптотического СКЭ – минимизировать расхождения с помощью различных методов: наименьших квадратов [40–42], множителей Лагранжа [42–44] и других [45–47]. Причем численное сравнение жесткого совпадения аппроксимаций в узлах с различными минимизационными способами стыковки показало, что последние дают более точные результаты [48, 49]. Однако для всех некомформных элементов сохраняются сложности в решении вопросов, связанных со сходимостью [50].

Такой проблемы не возникнет, если между сингулярными асимптотическими элементами и стандартными поместить специальные переходные (или буферные) элементы [51–55], которые бы обеспечили необходимую степень непрерывности восполнения, или если применить гибридный вариант МКЭ, основанный на модифицированных вариационных принципах с ослабленными требованиями на непрерывность, гарантирующими, однако, монотонную сходимость [56–58].

Гибридные сингулярные конечные элементы [6, 59, 60] – как и сам гибридный вариант МКЭ – имеют множество разновидностей: в перемещениях, в напряжениях, равновесная модель и т.д. Например, в наиболее популярной гибридной модели № 2 в перемещениях (согласно классификации Пиана [58]) присутствуют три независимо варьируемых поля: поле перемещений внутри сингулярного элемента, так или иначе учитывающее известное сингулярное поведение; поле перемещений на его границе, идентичное соответствующим перемещениям в соседних стандартных элементах; и поле пограничных напряжений, математически интерпретируемое как множители Лагранжа и предназначенное для ликвидации энергетического расхождения между перемещениями внутри и на границе гибридного сингулярного элемента.

Как и в упомянутых ранее "классических" сингулярных элементах, восполнение в гибридном может быть как асимптотическим [61–66], так и обогащенным [67–72]. Характерной чертой обоих вариантов является то, что они учитывают асимптотические слагаемые (одно или несколько) по всем координатам. Однако имеется обширная группа сингулярных элементов, которые отражают лишь доминирующее радиальное изменение искомого решения, полностью игнорируя его зависимость от остальных параметров, даже если аналитичекие выражения последних хорошо известны. Подобное упрощение позволяет превращать обычные изопараметрические элементы в сингулярные с помощью незначительной модификации полиномиальных функций формы, не нарушая при этом конформности, но жертвуя иногда изопараметричностью.

Существуют два пути конструирования таких "радиальных" сингулярных элементов из изопараметрических: необходимую сингулярность степенного вида можно внести, во-первых, через локальные интерполирующие функции, оставив неизменными функции преобразования локальных координат в глобальные, и во-вторых, через Якобиан этого преобразования, сохранив стандартный вид локальной интерполяции. По первому пути пошли Трейси [2, 73], Блэкборн [74, 75] и другие [76, 77], для того, чтобы смоделировать корневую радиальную особенность в вершине трещины. Затем аналогичным образом были построены радиальные сингулярные элементы для произвольного (как действительного, так и комплексного) показателя степенного поведения, конформные с изопараметрическими элементами различных порядков [78–84]. Однако, следует заметить, что в этой группе есть и неконформные сингулярные элементы, которые стыкуются с соседними стандартными элементами только в узлах [85–88]; имеются также и гибридные сингулярные элементы радиального типа, обычно использующиеся для динамического анализа трещин [89–91]. К первому варианту получения сингулярных интерполирующих функций из стандартных полиномиальных можно также отнести и универсальный способ, предложенный [92] и затем усовершенствованный [93] Акиным.

Второй путь превращения изопараметрических конечных элементов в сингулярные был подробно рассмотрен Окабэ с соавторами [94, 95], а затем обобщен им в фундаментальную теорию "безразмерно-радиального сингулярного преобразования" локальных координат в глобальные [96], не получившую, однако, широкого распространения на практике за исключением одного частного случая, завоевавшего необыкновенную популярность. Речь, разумеется, идет об модификации изопараметрического элемента в сингулярный без нарушения его изопараметричности; подобные сингулярные элементы еще называют элементами "quarter-point" (QPE). Геометрически модификация выражается в таком изменении стандартного расположения ряда неугловых узлов, при котором Якобиан преобразования локальных координат в глобальные становится нулевым в сингулярном узле.

Самые простые изопараметрические сингулярные элементы для расчета трещин в однородном материале – шестиузловой треугольник (как вырожденный, так и "натуральный") и восьмиузловой четырехугольник с двумя сдвинутыми на четверть длины стороны в направлении к особой точке серединными узлами – были получены почти одновременно многими авторами [97–108]. Причем четырехугольный элемент такого вида был сначала признан менее точным, чем треугольный [7, 97–99], но потом "реабилитирован" [109, 110]: некоторые авторы [110] считают его не только геометрически более удобным, но и асимптотически более точным по сравнению с треугольным. Элементы типа QPE полностью совместны с квадратичными изопараметрическими элементами, а их модификации в [111] и в [112] – соответственно со стандартными элементами третьей и произвольной степеней. Имеются также разработки для девятиузлового квадратичного элемента [113, 114] и различные варианты трехмерных сингулярных элементов, аналогичных quarter-point [115–118]. Причем для расширения зоны действия и без того конформных сингулярных элементов этого типа иногда используют специальные переходные элементы [119, 120]: некоторые авторы считают [121], что таким способом повышается точность расчета н.д.с. в окрестности особой точки, хотя есть и противоположное мнение [122].

Все вышеперечисленные изопараметрические сингулярные элементы гарантируют напряжениям $\rho^{-1/2}$ – сингулярность в особой точке. Их расширения на случай произвольного показателя степени описаны в [109, 123–129]; получены также элементы, аналогичные QPE, для ρ^{-1} – сингулярности деформаций [130].

Численное сравнение обоих типов радиальных сингулярных элементов – с сингулярной интерполяцией и с сингулярным отображением – было проведено в [94, 121]. Есть и другие работы [6, 8, 9, 10, 29, 48, 131–134], где сопоставляются различные сингулярные конечные элементы (асимптотические, обогащенные, радиальные, гибридные и т.д.), причем результаты и рекомендации не всегда совпадают. Но, как уже отмечалось, эта проблема – проблема наилучшего в смысле точности и эксплуатации сингулярного элемента – выходит за рамки настоящей статьи.

3. Классификация. Нетрудно заметить, что вышеприведенное описание различных типов сингулярных конечных элементов оперирует в основном только двумя характеристиками последних: способом учета известного асимптотического поведения в окрестности особой точки (т.е. заполнением СКЭ) и способом стыковки сингулярного элемента со стандартными полиномиальными (т.е. его межэлементными связями). Таким образом эти две характеристики намеренно противопоставляются всем остальным, оказывающимся в этом смысле второстепенными. О причинах такого предпочтения скажем чуть позже, а сейчас остановимся подробнее на истории этого вопроса.

Прежде всего напомним, что имеется общепринятое разделение конечных элементов в зависимости от вариационного принципа, полей варьирования и неизвестных, входящих в окончательную систему линейных алгебраических уравнений – см. диаграмму в работе Пиана [58], – но оно является слишком глобальным, поскольку рассчитано на произвольный конечный элемент и не отражает специфики внедрения СКЭ в конкретную конечноэлементную программу. Поэтому, отвлекаясь на время от вариационной принадлежности рассматриваемых элементов и других глобальных различий, будем обращать внимание только на те признаки СКЭ, которые свойственны в большей или меньшей степени именно сингулярным элементам и имеют практическое значение с точки зрения программиста-механика, использующего их.

Вопрос о выборе основных характеристик СКЭ решался разными авторами по-разному. Например, автор [121], учитывая то значение, которое придается точности вычисления коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) в линейной механике разрушения, предложил считать ее определяющей при классификации сингулярных элементов. Поскольку способ определения КИН бывает либо "тривиальным", когда они входят в число обобщенных неизвестных, либо "апостериорным", требующим последующей обработки полученных решений, и поскольку более высокая точность первого не вызывает сомнения, в [121] предлагается разделить все сингулярные элементы на две большие группы: прямые и непрямые (по способу вычисления КИН).

Далее, некоторые авторы [29] акцентируют внимание на количестве СКЭ, окружающих особую точку – сколько их, один или много, – противопоставляя тем самым асимптотическое заполнение СКЭ всем остальным способам. В то же время разделение СКЭ, предложенное в [26], совсем игнорирует асимптотические элементы, объединяя их, по-видимому, с обогащенными.

Окабэ [96] предложил при классификации СКЭ учитывать ту роль, которую играют обычные полиномиальные функции в описании элемента. Возможны три варианта использования последних: (*1*) только для отображающих функций формы, задающих геометрию элемента; (*2*) только для восполняющих функций, определяющих аппроксимацию в элементе; (*3*) для тех и других, т.е. когда сингулярный элемент является изопараметрическим. Тем не менее, Окабэ [96] объединяет вторую и третью группы в одну, исходя из того, что в обоих случаях необходимую сингулярность дает Якобиан преобразования локальных координат в глобальные, а не специально выбранная локальная аппроксимация. Якобиан в качестве классификационного критерия СКЭ применяется также и Акин [9], однако при этом совсем не рассматриваются элементы из второй группы.

Сингулярные элементы, принадлежащие к первой группе, т.е. те, у которых необходимые сингулярные свойства содержатся в аппроксимирующих функциях, также неоднородны по своему составу: они могут быть асимптотическими, обогащенными и радиальными. Фаукес с соавторами [8] разбивает все СКЭ – а точнее, способы учета известного сингулярного поведения, т.к. он включает в свою классификацию и метод суперпозиции – на шесть групп: три вышеназванные плюс изопараметрические, гибридные и суперпозиция. Таким образом, он, во-первых, объединяет качественно различные подходы к решению задач с особенностями (метод суперпозиции и СКЭ); во-вторых, игнорирует элементы с сингулярным отображением и, в-третьих, выделяя в отдельный класс гибридные элементы, смешивает по сути дела две различные характеристики СКЭ: способ внедрения сингулярности и метод стыковки со стандартными элементами.

Подход к концепции гибридных сингулярных элементов с точки зрения их соединения с соседними стандартными элементами не нов. Например, Спиеринг и Патер

[48] рассматривают и сравнивают три способа стыковки с ослабленными требованиями на непрерывность: узловой, минимизационный и гибридный. Для первого характерно точное выполнение условий совпадения соответствующих величин только в узлах, в то время как в интервалах между ними не накладывается никаких ограничений. Увеличение числа узлов при таком соединении дает некоторое улучшение результатов, но не во всех случаях: иногда может наблюдаться так называемое явление Рунге, которое приводит к расходимости в целом, несмотря на точное совпадение в узлах [135].

Для второго способа стыковки условия непрерывности выполняются в минимизационном смысле с помощью методов наименьших квадратов, штрафных функций и других [136, 137], т.е. внимание акцентируется на поведении соответствующих величин вдоль всей границы элемента в среднем, а не в отдельных точках. Более высокая эффективность минимизационных способов стыковки по сравнению с узловыми не раз иллюстрировалась численно [48, 49], однако и здесь имеются свои "минусы", более подробную информацию о которых можно найти, например, в [136, 137].

Что касается третьего способа стыковки, гибридного, то в литературе встречаются диаметрально противоположные мнения о его практическом использовании: одни авторы, например [9], предпочитают его всем остальным, отмечая превосходную точность получаемых результатов, а другие [8] относят гибридные СКЭ к числу самых неточных и подчеркивают трудоемкость подготовительного этапа и сложности, связанные с внедрением гибридных СКЭ в стандартные МКЭ-программы.

Альтернативой перечисленным выше способам стыковки сингулярных элементов со стандартными может служить непрерывное соединение разнотипных конечных элементов, которое, как видно из предыдущего описания, бывает или непосредственным, или нуждающимся в помощи специальных переходных элементов, размещаемых между сингулярными и стандартными с целью получения необходимой степени непрерывности аппроксимационного поля. Поэтому первый вариант можно назвать просто непрерывным, а второй – буферно-непрерывным.

Таким образом, все сингулярные конечные элементы с точки зрения стыковки с соседними элементами можно разбить на пять групп: непрерывные (*a*), буферно-непрерывные (*b*), гибридные (*c*), минимизационные (*d*) и узловые (*e*) – и, выбирая тот или иной тип СКЭ, руководствоваться структурой конкретной конечноэлементной программы, видом использующихся в ней стандартных элементов, ресурсами ЭВМ и т.п. Что касается способов учета сингулярности в СКЭ, то их тоже пять: асимптотический (*1*), обогащенный (*2*), сингулярно-восполняющий или радиальный (*3*), сингулярно-отображающий (*4*) и, наконец, изопараметрический или QPE (*5*). Причем, следует заметить, что данная характеристика, в отличие от способа стыковки, более автономна, и ее внедрение не столь зависит от возможностей и структуры конкретной программы.

В результате классификационная сетка оказывается состоящей формально из 25 ячеек, среди которых, однако, – по причине недопустимости сочетания или отсутствия в литературе – имеется несколько пустых (например, *1a*, *2a*, *3b*, *3d*). Если теперь вспомнить приведенное ранее описание сингулярных конечных элементов, то окажется, что оно было построено таким образом, чтобы не составило труда каждую из упомянутых в нем работ отнести к конкретной ячейке классификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Byskov E.* The calculation of stress intensity factors using the finite element method with cracked elements // Intern. J. Fract. Mech. 1970. V. 6. № 2. P. 159–167.
2. *Tracey D.M.* Finite elements for determination of crack tip elastic stress intensity factors // Eng. Fract. Mech. 1971. V. 3. № 3. P. 255–265.
3. *Hilton P.D., Hutchinson J.W.* Plastic intensity factors for cracked plates // Eng. Fract. Mech. 1971. V. 3. № 4. P. 435–451.
4. Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. С. Атлури. М.: Мир, 1990. 391 с.
5. *Rice J.R., Tracey D.M.* Computational fracture mechanics // Numerical Computer Methods in Structural Mechanics.: Proc. Symp. Urbana, 1971. N.Y.: Acad. Press, 1973. P. 585–623.
6. *Pian T.H.H.* Crack elements // Finite Element Methods in Structural Mechanics: Proc. Word Congr. Dorset, England, 1975. London: Acad. Press, 1975. P. F1-F39.
7. *Gallagher R.H.* A review of finite element techniques in fracture mechanics // Numerical Methods in Fracture Mechanis // Eds A.R. Luxmoore and D.R.J. Owen. Swansea: Pinerige press, 1978. P. 1–25.
8. *Fawkes A.J., Owen D.R.J., Luxmoore A.R.* An assessment of crack tip singularity models for use with isoparametric elements // Eng. Fract. Mech. 1979. V. 11. № 1. P. 143–159.
9. *Akin J.E.* Computational methods for local singularities // Comput. Meth. Nonlinear Mech.: Proc. TICOM 2nd Intern. Conf. Austin, Tex., 1979. Amsterdam: North-Holland, 1980. P. 1–12.
10. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Применение метода конечных элементов в механике разрушения // Физ.-хим. механика материалов. 1982. Т. 18. № 4. С. 13–29.
11. *Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х.* Вычислительная механика разрушения. М.: Мир, 1986. 334 с.
12. *Parton V.Z., Boriskovsky V.G.* The development of fracture mechanics numerical methods in the USSR // Computional Mechanics. 86: Theory and Appl. Proc. Intern. Conf. Tokyo, 1986. Tokyo, 1986. V. 1. Berlin: Springer, 1986. V. 1. P. 319–326.
13. *Blum H.* Numerical treament of corner and crack singularities // Cours. and Lect. CISM. // Intern. Cent. Mech. Sci. 1988. № 301. P. 171–212.
14. *Liebowitz H., Moyer E.T., Jr.* Finite element methods in fracture mechanics // Comput. and Struct. 1989. V. 31. № 1. P. 1–9.
15. *Liebowitz H., Sandhu J.S., Lee J.D., Menandro F.C.M.* Computational fracture mechanics. Research and application // Eng. Fract. Mech. 1995. V. 50. № 5–6. P. 653–670.
16. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
17. *Tong P., Pian T.H.H.* On the convergence of the finite element method for problems with singularity // Intern. J. Solids. and Struct. 1973. V. 9. № 3. P. 313–321.
18. *Benzley S.E.* Representation of singularities with isoparametric finite elements // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1974. V. 8. № 3. P. 537–545.
19. *Fix G.J., Gulati S., Wakoff G.I.* On the use of singular functions with finite element approximations // J. Comput. Physics. 1973. V. 13. № 2. P. 209–228.
20. *Li Y.-C.* The finite element method by employing the singular element with concordant displacement at the crack tip // Eng. Fract. Mech. 1984. V. 19. № 5. P. 959–972.
21. *Foschi R.O., Barrett J.D.* Stress intensity factors in anisotropic plates using singular isoparametric elements // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1976. V. 10. № 6. P. 1281–1287.
22. *Gifford L.N., Hilton P.D.* Stress intensity factors by enriched finite elements // Eng. Fract. Mech. 1978. V. 10. № 3. P. 485–496.
23. *Glazik J.L.* Dynamic finite element analysis of cracked bodies // Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol. 1980. V. 102. № 1. P. 2–7.
24. *Матвеенко В.П.* Решение смешанной задачи теории упругости методом конечных элементов с использованием сингулярного элемента // Аннот. докл. 5-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Алма-Ата, 1981 // Алма-Ата: Наука, 1981. С. 251.
25. *Платонов А.Д., Кравец П.Я.* Специальный конечный элемент для расчета коэффициентов интенсивности в плоских телах с трещинами: Препр. // Киев: Ин-т проблем прочности, 1983. 33 с.
26. *Hilton P.D., Kierfer B.V.* The enriched element for finite element analysis of three-dimentional elastic crack problems // Trans. ASME. J. Pressure Vessel Thechnol. 1980. V. 102. № 4. P. 347–352.

27. *Heppler G., Hansen J.S.* Mixed mode fracture analysis of rectilinear anisotropic plates by high order finite elements // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1981. V. 17. № 3. P. 445–464.
28. *Adda G., Charras T., Lafore P., Tibi H.* Determination of stress intensity factors K_{I}, K_{II} and K_{III} by use of special three dimentional finite elements // Trans. 8th Intern. Conf. Struct. Mech. React. Technol. Brussels, 1985. Amsterdam, 1985. V. G. P. 56–70.
29. *Wilson W.K.* Finite element methods for elastic bodies containing cracks // Mech. Fracture. Leyden: Nordhoff, 1973. V. 17. P. 484–515.
30. *Hilton P.D., Sih G.C.* Applications of the finite element method to the calculations of stress intensity factors // Mech. Fracture. Leyden: Nordhoff, 1973. V. 1. P. 426–483.
31. *Papaioannou S.G., Hilton P.D., Lucas R.A.* A finite element method for calculating stress intensity factors and its application to composites // Eng. Fract. Mech. 1974. V. 6. № 4. P. 807–823.
32. *Shih C.F., Hutchinson J.W.* Filly plastic solution and large scale yielding estimates for plane stress crack problems // Trans. ASME. Ser. H. J. Eng. Mater. and Technol. 1976. V. 98. № 4. P. 289–295.
33. *Хархурим И.Я.* Специальный конечный элемент с трещиной для решения задач линейной механики разрушения // Метод конечных элементов в строительной механике. Горький, Изд. Горьк. ун-та, 1975. С. 31–40.
34. *Дашевский Е.М., Борисковский В.Г.* Определение поля напряжений у сквозных трещин в изгибаемых пластинах // Проблемы прочности. 1976. № 10. С. 42–44.
35. *Борисковский В.Г.* Анализ коэффициентов интенсивности напряжений в колеблющейся пластине с трещиной методом конечных элементов // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 764–768.
36. *Зейлигер В.А., Храпков А.А.* Специальный элемент с надрезом для решения задачи об упругом равновесии тел с трещинами // Изв. ВНИИ гидротехники. 1980. Т. 136. С. 27–32.
37. *Hu K.K., Huang C.-M.J., Swartz S.E.* Finite element model to determine K_{I} // J. Eng. Mech. 1983. V. 109. № 4. P. 1103–1113.
38. *Li Z.C.* Nonconforming combined method of Ritz–Galerkin and finite element methods // Innovative Numer. Meth. Eng.: Proc. 4th Intern. Symp. Atlanta, Ga, 1986. Berlin: Springer, 1986. P. 93–95.
39. *Jones R., Callinan R.J.* On the use of special crack tip elements in cracked elastic sheets // Intern. J. Fract. 1977. V. 13. № 1. P. 51–64.
40. *Nishioka T., Stonesifer R.B., Atluri S.N.* An evaluation of several moving singularity finite element model for fast fracture analysis // Eng. Fract. Mech. 1981. V. 15. № 1–2. P. 205–218.
41. *Piltner R.* Special finite elements for an appropriate treatment of local effects // Local Eff. Anal. Struct. Amsterdam, 1985. P. 299–314.
42. *Holston A., Jr.* A mixed mode crack tip finite element // Intern. J. Fract. 1976. V. 12. № 6. P. 887–899.
43. *Richards T.N., Robertson A.W.* The determination of single and mixed mode stress intensity factors for engineering components of practical interest // Fract. Mech. Eng. Pract. Pap. Annu. Conf. Stress Anal. Croup. Inst. Phys. Sheffield, 1976. London, 1977. P. 1–32.
44. *Nishioka T., Alturi S.N.* Stress analysis of holes in angle-ply laminates: an effeciet assumed stress "special-hole-element" approach and a simple estimation method // Comput. and Struct. 1982. V. 15. № 2. P. 135–147.
45. *Souchet R.* Solution of two-dimensional elastic crack problems using a localized finite element method // Eng. Fract. Mech. 1984. V. 20. № 1. P. 169–177.
46. *Jirousek J.* Implementation of local effects into conventional and non conventional finite element formulations // Local Eff. Anal. Struct. Amsterdam, 1985. P. 279–298.
47. *Zhong F., Yuqiu L.* Sub-region mixed finite element analysis of V-notched plates // Intern. J. Fract. 1992. V. 56. № 4. P. 333–344.
48. *Spiering R.M.E.J., de Pater C.* On the cracked element apporoach for the computation of stress in intensity factors // Trans. 4th Intern. Conf. Structural Mechanics in React. Technol. San Francisco, Calif., 1977 Amsterdam, 1977. V. G. P. 5.7/1–57/12.
49. *Li Z.C., Bui T.D.* Six combinations of the Ritz–Galerkin and finite element methods for elliptic boundary value probiems // Numer. Meth. Part. Differ. Equations. 1988. V. 4. № 3. P. 197–218.
50. *Lesaint P.* On the convergence of Wilson's nonconforming element for solving the elastic problems // Comput. Meth. Appl. Mach. and Eng. 1976. V. 7. № 1. P. 1–16.
51. *Лущик О.Н.* Модификация метода конечных элементов для областей с особыми точками // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 87–93.

52. *Лущик О.Н.* Влияние частоты на поля сингулярных напряжений в составном волноводе // Изв. РАН. 1996. № 3. С. 27–33.
53. *Astiz M.A.* An incompatible singular elastic element for two- and three-dimensional crack problems // Intern. J. Fract. 1986. V. 31. № 2. P. 105–124.
54. *Матвеенко В.П.* О построении сингулярных элементов для различных вариантов особых точек // Численные методы в исследовании напряжений и деформаций в конструкциях. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. С. 4–7.
55. *Martinez Esnaola J.M., Miranda I., Bastero J.M.* Application of a global-local blended type finite element in thermal fracture // Fract. Contr. Eng. Struct.: Proc. 6th Bienn Eur. Conf. Amsterdam, 1986. Warley, 1986. V. 1. P. 655–665.
56. *Pian T.H.H., Tong P.* Finite element methods in continuum mechanics // Advances in Applied Mechanics. N.Y., L.: Acad. Press, 1972. V. 12. P. 1–58.
57. Pian T.H.H. Finite element methods by variational principles with relaxed continuity requirements // Variational Meth. Eng.: Proc. Intern. Conf. at the Univ. of Southampton., 1972. Southampton Univ. Press, 1973. V. 1. P. 3/1–3/24.
58. *Pian T.H.H.* Variational and finite element methods in structural analysis // Israel J. Technol. 1978. V. 16. № 1–2. P. 23–33.
59. *Tong P., Atluri S.N.* On hybrid finite element technique for crack analysis // Fract. Mech. and Technol: Proc. Intern. Conf., Hong Kong, 1977. Alphen an den Rijn, 1977. V. 2. P. 1445–1466.
60. *Oden J.T., O'Leary J.* Some remarks on finite element approximations of crack pronlems and an analysis of hybrid methods // J. Struct. Mech. 1978. V. 6. № 4. P. 415–436.
61. *Tong P., Pian T.H.H., Lasry S.J.* A hybrid-element approach to crack problems in plane elasticity // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1973. V. 7. № 3. P. 297–308.
62. *Lin K.Y., Mar J.W.* Finite element analysis of stress intensity factors for ctacks at a bi-material interface // Intern. J. Fract. 1976. V. 12. № 4. P. 521–531.
63. *Apostal M.C., Lee G.C., Braun F.W., Jordan S.* Anisotropic hybrid displacement singularity element // J. Struct. Div. Proc. ASME. 1977. V. 103. № 2. P. 335–354.
64. *Hrydey T.M., Hrabok M.M.* Stress singularity finite elements for plate bending problems // Comp. Civ. Eng.: Proc. 2nd Intern. Conf. Hangzhou, 1985. Amsterdam, 1985. P. 869–884.
65. *Kuna M., Zwicke M.* A mixed hybrid finite element for three-dimentional elastic crack analysis // Intern. J. Fract. 1990. V. 45. № 1. P. 65–79.
66. *Chen W.* On the equivalent of the Wilson element with the generalized hybrid element // Acta Mech. Sin. 1990. V. 22. № 1. P. 60–64.
67. *Pian T.H.H., Tong P., Luk C.H.* Elastic crack analysis by a finite element hybrid method // Matrix Meth. in Struct. Mech.: Proc. 3rd Air Force Conf. Dayton, Ohio, 1971. N.Y., 1973. P. 661–682.
68. *Atluri S.N., Kobayashi A.S., Nakagaki M.* An assumed displacement hybrid finite element model for linear fracture mechanics // Intern. J. Fract. 1975. V. 11. № 2. P. 257–271.
69. *Pian T.H.H., Moriya K.* Three-dimentional fracture analysis by assumed strees hybrid elements // Numerical Methods in Fracture Mechanics / Eds A.R. Luxmoore, D.R.J. Owen. Swansea, 1978. P. 363–373.
70. *Wang S.S., Yuan F.G.* A hibrid finite element approach to composite laminate elasticity problems with singularities // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1983. V. 50. № 4 A. P. 835–844.
71. *Chen W.-H., Chen P.-Y.* A hibrid-displacement finite element model for the bending analysis of thin cracked plates // Intern. J. Fract. 1984. V. 24. № 2. P. 83–106.
72. *Chen W.-H., Hwu C.-B.* Hibrid singular element design for the bending analysis of bimaterial thin cracked plates // AIAA Journal. 1986. V. 24. № 8. P. 1399–1402.
73. *Tracey D.M.* Discussion on the use of isoparametric finite elements in linear-fracture mechanice // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1977. V. 11. № 3. P. 401–402.
74. *Blackburn W.S.* Calculation of stress intensity factors at crack tips using special finite elements // The Mathematics of Finite Elements and Applications / Ed. J.R. Whiteman, London: Acad. Press, 1973. V. 1. P. 327–336.
75. *Blackburn W.S., Hellen T.K.* Calculation of stress intensity factors in three dimensions by finite-element methods // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1977. V. 11. № 2. P. 211–229.
76. *Stern M., Becker E.B.* A conforming crack tip element with quadratic variation in the singular fields // Inten. J. Numer. Meth. Eng. 1978. V. 12. № 2. P. 279–288.

77. *Tseng A.A., Berry J.T.* The calculation of stress intensity factors using special three-dimensional elements // Nucl. Eng. and Des. 1979. V. 54. № 1. P. 91–95.
78. *Tracey D.M., Cook T.S.* Analysis of power type singularities using finite elements // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1977. V. 11. № 8. P. 1225–1233.
79. *Askar H.G.* Special elements for point singularities // Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. 1987. V. 63. № 3. P. 271–280.
80. *Kwon Y.W.* Development of finite element shape functions with derivative singularity // Comput. and Struct. 1988. V. 30. № 5. P. 1159–1163.
81. *Stern M.* Families of consistent conforming elements with singular derivative fields // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1979. V. 14. № 3. P. 409–421.
82. *Игнатюк Н.Н., Никишков Г.П.* Сингулярный конечный элемент с произвольной степенью асимптотики // Исследование прочности материалов и конструкций атомн. техн. М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 8–12.
83. *Борзенков С.М., Матвеенко В.П.* Полуаналитический вариант сингулярного элемента для различных типов особых точек // Численное моделирование статич. и динамич. деформир. конструкций. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. С. 46–54.
84. *Борзенков С.М., Матвеенко В.П.* Полуаналитические сингулярные элементы для плоских и пространственных задач теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 48–61.
85. *Yu. I.W., Wilson W.K.* Generation of singular elements for the analysis of cracked bodies // Computer Technology in Fusion Energy Research / Eds J.E. Akin. W.H. Cray. N.Y.: ASME, 1978. P. 99–114.
86. *Kelley J.W., Sun C.T.* A singular finite element for computing time dependent stress intensity factors // Eng. Fract. Mech. 1979. V. 12. № 1. P. 13–22.
87. *Staab G.H., Sun C.T.* Singular finite element efficiency in estimating stress intensity factors // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1981. V. 17. № 4. P. 557–572.
88. *Staab G.H.*, A variable power singular element for analysis of fracture mechanics problems // Comput. and Struct. 1983. V. 17. № 3. P. 449–457.
89. *Chen W.-H., Wu C.-W.* On elastodynamic fracture mechanics analysis of bi-material structures using finite element method // Eng. Fract. Mech. 1981. V. 15. № 1–2. P. 155–168.
90. *Chen W.-H., Wang C.-H.* An assumed hybrid displacement finite element model for elastodynamic cracked problems // Eng. Struct. 1981. V. 3. № 4. P. 249–255.
91. *Zhang J.Y., Hsu T.R.* A hybrid finite element algorithm by virtual work principle and its application in fracture mechanics // Comput. Mech.'86: Theory and Appl. Proc. Intern. Conf. Tokyo, 1986. V. 1. P. V/17–V/23.
92. *Akin J.E.* The generation of elements with singularities // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1976. V. 10. № 6. P. 1249–1259.
93. *Hughes T.J.R., Akin J.E.* Techniques for developing "special" finite element shape functions with particular reference to singularities // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1980. V. 15. № 5. P. 733–751.
94. *Yamada Y., Ezawa Y., Nishiguchi I., Okabe M.* Reconsideration on singularity or crack tip elements // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1979. V. 14. № 10. P. 1525–1544.
95. *Okabe M., Yamada Y., Nishiguchi I.* Basis transformation of trial function space in Lagrange interpolation // Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. 1980. V. 23. № I. P. 85–99.
96. *Okade M.* Fundamental theory of the semi-radial singularity mapping with applications to fracture mechanics // Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. 1981. V. 26. № 1. P. 53–73.
97. *Barsoum R.S.* On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1976. V. 10. № 1. P. 25–37.
98. *Hibbitt H.D.* Some properties for singular isoparametric elements // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1977. V. 11. № 1. P. 180–184.
99. *Wait R.* A note on quarter-point triangular elements // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1978. V. 12. № 8. P. 1333–1336.
100. *Barsoum R.S.* Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mechanics // Intern. J. Fract. 1974. V. 10. № 4. P. 603–605.
101. *Barsoum R.S.* Further application of quadratic isoparametric finite elements to linear fracture mechanics of plate bending and general shells // Intern. J. Fract. 1975. V. 11. № 1. P. 167–169.
102. *Barsoum R.S.* Application of triangular quarter–point elements as crack tip elements of power law hardening material // Intern. J. Fract. 1976. V. 12. № 3. P. 463–466.

103. *Henshell R.D., Shaw K.G.* Crack tip finite elements are unnecessary // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1975. V. 9. № 3. P. 495–507.
104. *Bloom K.M.* An evaluation of a new crack tip element – the distorted 8-node isoparametric element // Intern. J. Fract. 1975. V. 11. № 4. P. 705–707.
105. *Hellen T.K.* On the method of virtual crack extensions // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1975. V. 9. № 1. P. 187–207.
106. *Shih C.F., deLorenzi H.G., German M.D.* Crack extension modelling with singular quadratic isoparametric elements // Intern. J. Fract. 1976. V. 12. № 4. P. 647–651.
107. *Freese C.E., Tracey D.M.* The natural isoparametric triangular versus collapsed quadrilateral for elastic crack analysis // Intern. J. Fract. 1976. V. 12. № 5. P. 767–770.
108. *Harrop L.P.* Linear elastic strees intensity factors using a distorted finite element // Numerical Methods in Fracture Mechanics / Eds A.R. Luxmoore, D.R.J. Owen. Swansea, 1978. P. 302–314.
109. *Ying L.-A.* A note on the singularity and the strain energy of singular elements // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1982. V. 18. № 1. P. 31–39.
110. *Banks-Sills L., Bortman Y.* Reappraisal of the quarter-point quadrilateral element in linear elastic fracture mechanics // Intern. J. Fract. 1984. V. 25. № 3. P. 169–180.
111. *Pu S.L., Hussain M.A., Lorensen W.E.* The collapsed cubic isoparametric element as a singular element for crack problems // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1978. V. 12. № 11. P. 1727–1742.
112. *Nayfeh A.H., Nassar E.-A.-A.M.* Mathematical simulation of singularities for isoparametric elements of arbitrary orders // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1981. V. 17. № 3. P. 465–470.
113. *Manu C.* Complete quadratic isoparametric finite elements in fracture mechanics analysis // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1985. V. 21. № 8. P. 1547–1553.
114. *Banks-Sills L., Einav O.* On singular nine-noded distorted isoparametric elements in linear elastic fracture mechanics // Comput. and Struct. 1987. V. 25. № 3. P. 445–449.
115. *Barsoum R.S.* A degeneral solid element for linear fracture analysis of plate bending and general shells // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1976. V. 10. № 3. P. 551–564.
116. *Bloom J.M., van Fossen D.B.* An evaluation of the 20-node quadratic isoparametric singularity brick element // Intern. J. Fract. 1976. V. 12. № 1. P. 161–163.
117. *Hussain M.A., Coffin L.F., Zaleski K.A.* Three-dimensional singular element // Comput. and Struct. 1981. V. 13. № 5–6. P. 595–599.
118. *Manu C.* Quarter-point elements for curved crack fronts // Comput. and Struct. 1983. V. 17. № 2. P. 227–231.
119. *Lynn P.P., Ingraffea A.R.* Transition elements to be used with quarter-point crack-tip elements // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1978. V. 12. № 6. P. 1031–1036.
120. *Lim I.L., Johnston I.W., Choi S.K.* The use of transition elements // Eng. Fract. Mech. 1991. V. 40. № 6. P. 975–983.
121. *Wahba N.N.* On the use of singular displacement finite elements for cracked plate in bending // Intern. J. Fract. 1985. V. 27. № 1. P. 3–30.
122. *Saouma V.E., Schwemmer D.* Numerical evaluation of the quarter-point crack tip element // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1984. V. 20. № 9. P. 1629–1641.
123. *Wait R.* Singular isoparametric finite elements // J. Inst. Math. Applics. 1977. V. 20. № 1. P. 133–141.
124. *Wait R.* Finite elements methods for elliptic problems with singularities // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1978. V. 13. № 2. P. 141–150.
125. *Morris J.L., Wait R.* Crack-tip elements with curved boundaries and variable nodes // Appl. Math. Modell. 1979. V. 3. № 4. P. 259–262.
126. *Gavete L., Michavila F., de las Heras F.* A general singular finite element for plane elasticity problems // Numer. Meth. Eng.: Proc. 5th Intern. Symp. Lausanne, 1989. Berlin, 1989. V. 2. P. 157–162.
127. *Kwon Y.W., Akin J.E.* Development of a derivative singular element for application to crack propagation problems // Comput. and Struct. 1989. V. 31. № 3. P. 467–471.
128. *El Abdi R.* A special finite element for the analysis of the singularity in a bimaterial containing a crack perpendiculas to the interfase // Eng. Fract. Mech. 1991. V. 39. № 6. P. 1061–1065.
129. *Lim W.-K., Kim S.-C.* Further study to obtain a variable power singularity using quadratic isoparametric elements // Eng. Fract. Mech. 1994. V. 47. № 2. P. 223–228.
130. *Banthia V.* Singularity of collapsed Q-8 finite element // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1985. V. 21. № 5. P. 959–965.

131. *Zhu B., Chen Y.* Numerical computation on a singularity in fracture // Adv. Fract. Res.: Proc. 6th Intern. Conf. New Delhi, 1984. Oxford, 1984. V. 2. P. 897–904.
132. *Murti V., Valliappan S., Lee I.K.* Stress intersity factor using quarter-point element // J. Eng. Mech. 1985. V. 111. № 2. P. 203–217.
133. *Michavila F., Gavete L.* Some results in two- and three-dimensional singular finite elements with applications to fracture mechanics // Innovative Numer. Meth. Eng.: Proc. 4th Intern. Symp. Atlanta, Ga, 1986. Berlin: Springer, 1986. P. 411–416.
134. *Furgiuele F.M., Luchi M.L.* A note on some crack tip elements empoyed in two-dimentional elasto-plastic fracture mechanics // Eng. Fract. Mech. 1989. V. 33. № 5. P. 831–837.
135. *Gao Pei–Qing*. Stress intensity factors for a rectangular plate with a point-loaded edge crack by a boundary collocation procedure, and an investigation into the convergence of the solutions // Eng. Fract. Mech. 1985. V. 22. № 2. P. 295–305.
136. *Fix G.J., Liang G., Lee D.N.* Penalty-hybrid finite element method // Comput. and math. 1982. V. 8. № 5. P. 393–399.
137. *Barlow J.* Constraint relationships in linear and nonlinear finite element analysis // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1982. V. 18. № 4. P. 521–533.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
19.02.1998