

УДК 539.9

© 2000 г. И.П. МИРОШНИЧЕНКО, В.П. СИЗОВ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
В СЛОИСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ
ПРИ МНОГОКРАТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ЛОКАЛЬНЫХ
ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК**

Решены задачи об определении напряженно-деформированного состояния (НДС) в слоистой цилиндрической конструкции с трансверсально-изотропными слоями при многократном воздействии локальной динамической нагрузки.

На основе нового представления упругих полей обобщенного метода скаляризации, предложенного в [1], конкретизированы соотношения для определения НДС в рассматриваемых конструкциях для частных случаев двумерных задач.

Приведен способ устранения особенности решения, получающейся в низкочастотной области при учете высших пространственных гармоник, который позволяет рассчитать на ЭВМ НДС при воздействии нагрузок, приложенных к малым областям на поверхности конструкции.

Показано возникновение концентрации напряжений за счет фокусирующего действия кривизны поверхности рассматриваемой конструкции и интерференции нескольких импульсов нагрузки.

1. Рассмотрим слоистую цилиндрическую конструкцию (фиг. 1), ось которой совпадает с осями материальной симметрии слоев, выполненных из трансверсально-изотропного материала. Конструкция отнесена к цилиндрической системе координат r, θ, z . Слои пронумерованы числами $1, 2, \dots, N$, границы слоев заданы радиусами r_0, r_1, \dots, r_N .

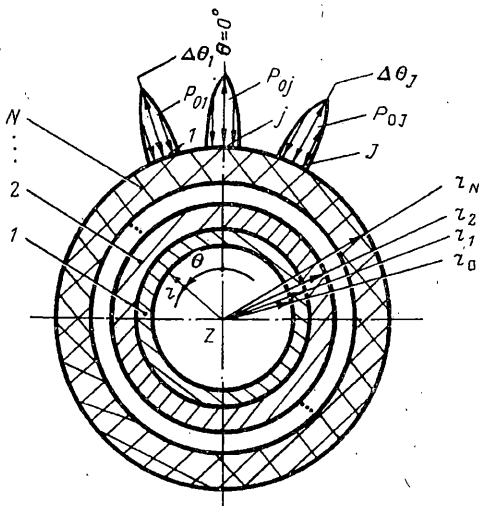
На малые j -е области внешней ($r = r_N$) поверхности конструкции действуют динамические нагрузки $P(\theta, z, t)$. Внутренняя ($r = r_0$) поверхность является свободной, а границы сопряжения слоев соответствуют жесткой склейке. Цилиндрическая конструкция предполагается достаточно длинной, поэтому на торцах поле должно удовлетворять условиям излучения.

Возникающие при этом искомые упругие поля перемещений и напряжений должны удовлетворять приведенным граничным условиям и описываются в каждом слое уравнениями движения:

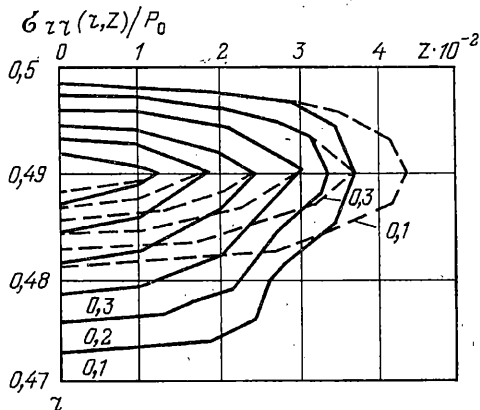
$$\rho \frac{\partial^2 U^i}{\partial t^2} = \nabla_j C^{ijrs} \nabla_{(r} U_{s)} \quad (1.1)$$

где ρ – плотность материала слоя, C^{ijrs} – модули упругости.

Решение будем строить используя обобщенный метод скаляризации динамических упругих полей в трансверсально-изотропных средах [1], который заключается в представлении полей перемещений, напряжений и деформаций через скалярные функции φ, u, w , описывающие соответственно квазипродольные, квазипоперечные и поперечные волны. Так, выражение для перемещений в случае гармонической нагрузки имеет



Фиг. 1



Фиг. 2

вид [1]:

$$U_i = \left(D_1^{(L)} \nabla_i + D_2^{(L)} \nabla_j \delta_i^j \right) \varphi + \left(D_1^{(T)} \frac{1}{g} \nabla_j \nabla_i + \frac{(T)}{g} \delta_i^j \right) w + \sqrt{g} (\delta_i^K \nabla^K - \delta_i^N \nabla^K) v \quad (1.2)$$

где коэффициенты D зависят от физико-механических характеристик материала, частоты воздействия ω и направления распространения волн. Эти коэффициенты, а также выражения для напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} приведены в [1].

Функции φ , v , w являются общим решением уравнений Гельмгольца с соответствующими волновыми числами.

Полные поля, возникающие при сложной нагрузке, можно определить используя спектральный метод. В этом случае нагрузка $P(\theta, z, t)$ заменяется ее спектральной плотностью:

$$P(\theta, \xi, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(\theta, z, t) e^{-i\xi z} e^{i\omega t} dz dt \quad (1.3)$$

2. Рассмотрим осесимметричную задачу, когда локализация нагрузки происходит по оси конструкции. Исключая независимый случай чисто поперечных волн, и используя выражения для перемещений U_i из (1.2) и напряжений σ_{ij} [1], запишем в принятой цилиндрической системе координат выражения для компонентов полей, входящих в граничные условия:

$$U_r = D_1^{(L)} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + D_1^{(T)} \frac{1}{g} i \xi \frac{\partial w}{\partial r} \quad (1.4)$$

$$U_z = i \xi \left(D_1^{(L)} \varphi + D_2^{(L)} \varphi \right) - D_1^{(T)} \frac{1}{g} \xi^2 w + \frac{(T)}{g} w \quad (1.5)$$

$$\sigma_{rr} = d_1^{(L)} \varphi + d_4^{(L)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + i \xi \left(d_1^{(T)} w + d_4^{(T)} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \quad (1.6)$$

$$\sigma_{rz} = i \xi \left(\frac{1}{2} d_3^{(L)} + d_4^{(L)} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \left(\frac{1}{2} d_3^{(T)} - \xi^2 d_4^{(T)} \right) \frac{\partial w}{\partial r} \quad (1.7)$$

$$D_1^{(L)} = \frac{(L)g^2 b_4}{b_3 - (L)g^2 - \xi^2(1 - b_4)}, \quad D_2^{(L)} = \frac{(L)g^2}{\xi^2} \cdot \frac{b_3 - (L)g^2 - \xi^2 - b_4 \xi^2}{b_3 - (L)g^2 - \xi^2(1 - b_4)}$$

$$D_1^{(T)} = -\frac{(T)g^2 b_4}{b_3 - (T)g^2 - \xi^2 - b_4 \xi^2}, \quad b_3 = (\omega^2 \rho - \xi^2 C_{44}) / C_{11}$$

$$b_4 = (C_{13} + C_{44}) / C_{11}, \quad d_1 = -g^2 a_1 - \xi^2 a_3 \left(D_1^{(L)} + D_2^{(L)} \right)$$

$$d_3^{(L)} = 2a_2 D_2^{(L)} + 2a_4 \left(2D_1^{(L)} + D_2^{(L)} \right), \quad d_4^{(L)} = 2a_2 D_1^{(L)}$$

$$d_1^{(T)} = a_1 g \left(1 - D_1^{(T)} \right) + a_3 \left(g - \frac{\xi^2}{g} D_1^{(T)} \right), \quad d_3^{(T)} = 2a_2 g + 2a_4 \left(g - 2D_1^{(T)} \frac{\xi^2}{g} \right)$$

$$d_4^{(T)} = 2a_2 D_1^{(T)} \frac{1}{g}, \quad a_1 = C_{12}, \quad a_2 = (C_{11} - C_{12}) / 2$$

$$a_3 = C_{13} - C_{12}, \quad a_4 = C_{44} - (C_{11} - C_{12}) / 2 \quad (1.8)$$

где C_{ij} – элементы матрицы упругих постоянных, записанных по свернутому индексу.

Волновые функции φ и w являются общими решениями волновых уравнений Гельмгольца с волновыми числами, которые определяются из следующих соотношений:

$$g^2 = A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - A_2} \quad (1.9)$$

$$A_1 = \{ (C_{11} + C_{44}) \omega^2 \rho - [C_{11}(C_{33} - 2C_{44}) - C_{13}(C_{13} + 2C_{44})] \xi^2 \} / (2C_{11}C_{44})$$

$$A_2 = \{ [C_{13}(C_{13} + C_{44}) + C_{44}(C_{11} + C_{13}) + C_{33}(C_{44} - C_{11})] \xi^4 - \\ - (C_{33} - C_{11}) \xi^2 \omega^2 \rho + \omega^4 \rho^2 \} / (C_{11}C_{44})$$

Знак $(-)$ в равенстве (1.9) соответствует квазипродольным, а знак $(+)$ – квазиперечным волнам.

Фундаментальная система решений дифференциального уравнения Гельмгольца для волновых функций φ и w представляется в виде:

$$\varphi = (\varphi^+ H_0^{(1)}(\beta r) + \varphi^- H_0^{(2)}(\beta r)) e^{i\xi z} \quad (1.10)$$

$$w = (w^+ H_0^{(1)}(\beta r) + w^- H_0^{(2)}(\beta r)) e^{i\xi z}$$

где φ^+ , φ^- , w^+ , w^- – подлежащие определению амплитуды соответствующих типов волн, бегущих в противоположных направлениях поперек слоев; β и β – проекции волновых векторов соответственно квазипродольных и квазиперечных волн на направление r ($\beta^2 = g^2 - \xi^2$, $\beta^2 = g^2 - \xi^2$).

Расчетные соотношения для определения полей перемещений и напряжений в n -м слое рассматриваемой конструкции получим путем сшивания решений на границах, что удобно сделать используя матричное представление [2] с последующим переходом

от спектрального представления в реальное пространство путем осуществления обратного преобразования Фурье.

Для устранения особенностей при интегрировании по ξ в точках, соответствующих вырожденным случаям, необходимо учесть поглощение волновой энергии материалами слоев. Для этого к волновым числам добавляются мнимые слагаемые, которые обозначают коэффициенты поглощения соответствующих типов волн.

На фиг. 2 приведены результаты численного определения распределения радиальных напряжений $\sigma_{rr}(r, z)$ в цилиндрической конструкции с $r_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ м и $r_1 = 0,5$ м при $t = 0,6$ мкс для двух материалов из [3], обладающих различной степенью анизотропии.

Материал 1 имел следующие физико-механические характеристики: $\rho = 1650$ кг/м³; $C_{11} = 6,43$ ГПа; $C_{12} = 1,95$ ГПа; $C_{13} = 0,569$ ГПа; $C_{33} = 1,48$ ГПа; $C_{44} = 0,5$ ГПа; $g''^{(L)} = 3$ м⁻¹; $g''^{(T)} = 2$ м⁻¹, где $g''^{(L)}$ и $g''^{(T)}$ – соответственно коэффициенты поглощения квазипродольных и квазипоперечных волн в материале конструкции. Для материала 2 (штриховая линия) перечисленные физико-механические характеристики отличались только значением $C_{11} = 3$ ГПа.

Сравнительный анализ характеристик материалов 1 и 2, проведенный в [3], свидетельствует, что материал 1 обладает более ярко выраженной анизотропией, так как $v^{(L)}(90^\circ)/v^{(L)}(0^\circ) = 2,07$, а для материала 2 это отношение равно 1,42 ($v^{(L)}$ – скорость распространения квазипродольных волн по указанным направлениям).

Нагрузка представляла собой одиночный импульс давления формы в виде функции Гаусса в $z = 0$ ($\tau_z = 0,1$ м; τ_z – протяженность импульса по координате z). Зависимость давления от времени t также устанавливалась в виде гауссовой функции с длительностью $\tau = 1$ мкс.

Анализ распределения $\sigma_{rr}(r, z)$, представленного на фиг. 2, показывает, что распространяясь в материале импульс расширяется, а его амплитуда падает. При этом в материале 2 расширение по оси z больше, чем в материале 1. Это обусловлено проявлением анизотропии свойств данных материалов и находится в полном соответствии с выводами, изложенными в работе [3].

На фиг. 3 приведены результаты расчета зависимости радиальных напряжений $\sigma_{rr}(t)$ на границе сопряжения слоев ($r = r_1$) в двухслойной цилиндрической конструкции с $r_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ м, $r_1 = 6 \cdot 10^{-3}$ м и $r_2 = 1,2 \cdot 10^{-2}$ м при нагрузке, аналогичной описанной выше (верхняя часть графика), а также при последовательном приложении 4 данных импульсов (нижняя часть графика) в моменты времени, заданные в соответствии со способом [4], для достижения максимальных амплитуд.

Длительность каждого из импульсов давления составляла $\tau = 0,5$ мкс.

Внешний слой конструкции был выполнен из материала 1, а внутренний – имел следующие физико-механические характеристики ($\rho = 2700$ кг/м³; $C_{11} = C_{33} = 107$ ГПа;

$C_{12} = C_{13} = 55,3$ ГПа; $C_{44} = 25,9$ ГПа; $g''^{(L)} = 2$ м⁻¹ $g''^{(T)} = 1$ м⁻¹).

Расстояния между импульсами соответствуют динамической концентрации в момент прихода к границе четвертого импульса. Видно, что амплитуда σ_{rr} возрастает до 6 амплитуд исходного импульса.

3. Рассмотрим неосесимметричный случай локализации нагрузки в нескольких областях по координате θ , когда поле не зависит от координаты z ($\xi = 0$).

Здесь квазипоперечные волны w вырождаются в чисто поперечные волны, перпендикулярной сечению конструкции поляризации, которые распространяются независимо от волн ϕ и v . Для последних имеем:

$$U_r = D_1 \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (3.1)$$

$$U_{\theta} = D_1^{(L)} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial r} \quad (3.2)$$

$$\sigma_{rr} = d_1^{(L)} \varphi + d_4^{(L)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + (C_{11} - C_{12}) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (3.3)$$

$$\sigma_{r\theta} = d_4^{(L)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) \quad (3.4)$$

$$D_1^{(L)} = g^2 b_4 / (b_3 - g^2 (1 - b_4)), \quad b_3 = \omega^2 \rho / C_{11}$$

$$b_4 = (C_{13} + C_{44}) / C_{11}, \quad d_1^{(L)} = -g^2 a_1$$

$$d_4^{(L)} = 2a_2 D_1^{(L)}, \quad a_1 = C_{12}, \quad a_2 = (C_{11} - C_{12}) / 2$$

$$a_4 = C_{44} - (C_{11} - C_{12}) / 2 \quad (3.5)$$

Общее решение дифференциальных уравнений для φ и v имеет вид

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} [\varphi_m^+ H_m^{(1)}(g r) + \varphi_m^- H_m^{(2)}(g r)] \cos m\theta$$

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} [v_m^+ H_m^{(1)}(\kappa r) + v_m^- H_m^{(2)}(\kappa r)] \sin m\theta \quad (3.6)$$

где $H_m^{(1)}$ и $H_m^{(2)}$ – функции Ганкеля 1-го и 2-го рода m -го порядка: φ_m^+ , w_m^+ , φ_m^- , w_m^- – амплитуды m -й гармоники соответствующих типов волн.

Каждая спектральная составляющая нагрузки, представляющей импульсы давления, приложенные к j -й области конструкции, записывается в виде разложения по соответствующим собственным функциям. Например, для импульсов давления полусинусоидальной формы по пространству, зависимость во времени у каждого из которых задана в виде функции Гаусса она может быть представлена следующим образом:

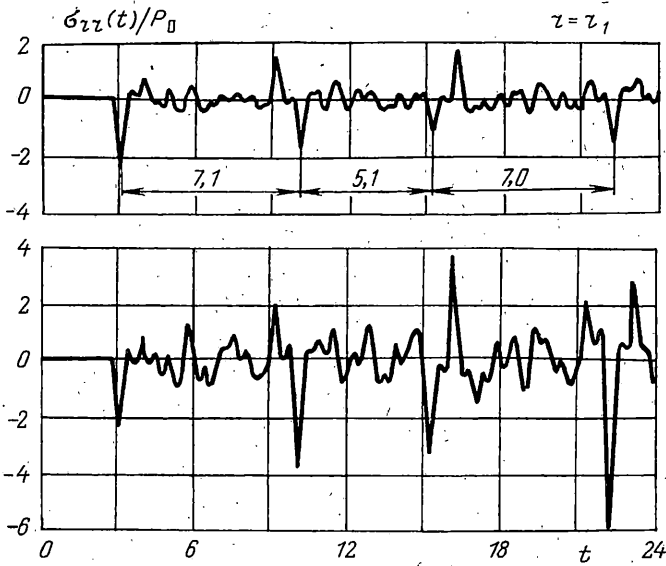
$$P(\theta, \omega) = \sum_{j=1}^J [-p_{0j} \sqrt{\pi / \beta_j} e^{-\omega^2 / 4\beta_j} e^{i\omega j}]$$

$$[a_{0j} + \sum_{m=1}^M a_{mj} \cos\{m(\theta + \Delta\theta_j)\}] \quad (3.7)$$

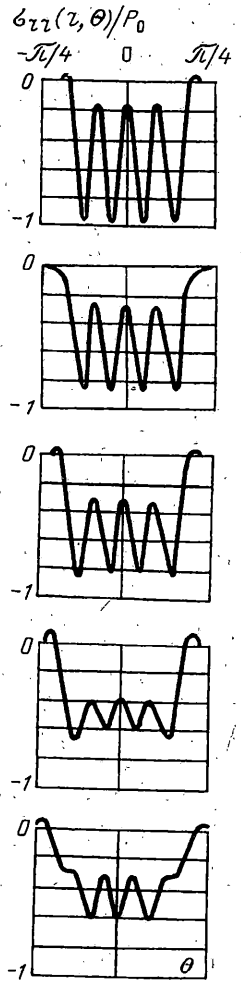
где J – количество импульсов нагрузки, p_{0j} – амплитуда j -го импульса, $\beta_j = (3,035/\tau_j)^2$, τ_j – длительность j -го импульса, t_j – момент начала j -го импульса, $a_{0j} = \tau_{0j}/\pi^2$, $a_{mj} = 2\pi\tau_{0j}(\sin \pi x_{1j} / \pi x_{1j} + \sin \pi x_{2j} / \pi x_{2j})$, $x_{1j} = m\tau_{0j}/2\pi - 0,5$, $x_{2j} = m\tau_{0j}/2\pi + 0,5$, τ_{0j} – протяженность j -го импульса по координате θ , $\Delta\theta_j$ – положение j -го импульса относительно $\theta = 0$.

Решение данной задачи представляется в виде суперпозиции цилиндрических функций. Если области приложения нагрузки малы, то необходимо брать довольно большое количество пространственных гармоник.

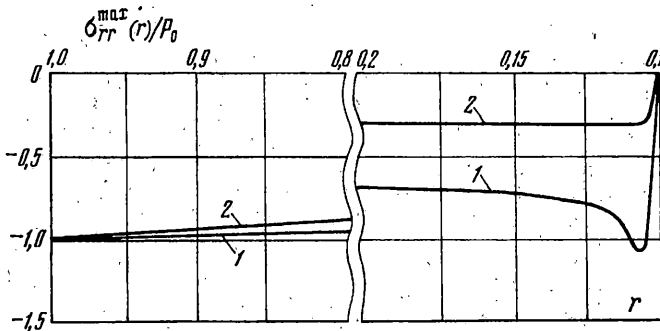
В этом случае при практических расчетах на ЭВМ возникают трудности, связанные с особенностью функций Ганкеля при малом аргументе. Данные точки соответствуют низкочастотной части спектра, когда $r \ll \lambda$ (λ – длина волны). Их можно не учитывать при численном интегрировании в процессе осуществления обратного преобразования Фурье в случае использования небольшого числа пространственных гармоник и малой длительности импульсов нагрузки, когда основной спектр лежит в высокочастотной области. Так поступили, например, авторы работы [2], где произведен расчет для нагрузки длительностью $\tau = 0,5$ мкс, сосредоточенной на довольно большой области ($\theta \cong \pi/4$), когда учитывается всего лишь 7 гармоник.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Однако, если для обеспечения достаточной точности необходимо учитывать большое число гармоник, т.е. использовать функции Ганкеля высокого порядка, то возникают значительные трудности не только для малых аргументов.

Это связано с тем, что чем больше m , тем быстрее происходит увеличение модуля функции Ганкеля.

Для преодоления данного затруднения заметим, что если величиной $(gr)^2$ можно пренебречь по сравнению с m^2 , то решение (3.6) может быть заменено решением уравнения Лапласа. Так, для потенциальных функций имеем:

$$\varphi_m = \left(\varphi_m^+ r^m + \varphi_m^- \frac{1}{r^m} \right) \cos m\theta, \quad v_m = \left(v_m^+ r^m + v_m^- \frac{1}{r^m} \right) \cos m\theta \quad (3.8)$$

Так как обычно $\frac{(L)}{g} > \kappa$, то для использования функций (3.8) вместо функций (3.6) достаточно использовать соотношение:

$$m \gg \frac{(L)}{gr} = \omega r / v_l = 2\pi r / \lambda_l \quad (3.9)$$

где v_l – скорость распространения квазипродольных волн.

Таким образом, при численном интегрировании, когда определяется поле в точках r необходимо для каждой гармоники m и для частоты ω проверять выполнение соотношения $\omega \ll v_m/r$ и по его результату использовать соответствующие функции.

Как показали расчеты, приведенные ниже, приемлемая точность достигается при использовании соотношения: $\omega \leq 2v_m/r$.

В качестве примера на фиг. 4 приведены результаты расчета радиальных напряжений $\sigma_{rr}(r, \theta)$ в моменты времени t , соответствующие максимальной амплитуде для заданного значения r в цилиндрической конструкции с $r_0 = 0,1$ м и $r_1 = 1$ м, выполненной из материала внутреннего слоя описанной выше двухслойной конструкции.

Коэффициенты поглощения $g''^{(L)}$ и κ'' соответственно квазипродольных и поперечных волн в материале принимались равными $g''^{(L)} = 0,5 \text{ м}^{-1}$ и $\kappa'' = 1 \text{ м}^{-1}$.

Нагрузка представляла собой 4 импульса давления, одновременно приложенных к внешней поверхности рассматриваемой конструкции.

Для каждого из импульсов распределение давления по координате θ и зависимость во времени t устанавливались в виде (3.7). Длительность τ и протяженность τ_θ для всех импульсов принимались соответственно равными 2 мкс и $\pi/12$.

Интегрирование проводилось с использованием метода быстрого преобразования Фурье при $K = 12$ ($2^k = 4096$ участков разбиения интервала интегрирования).

Взаимосвязь шага h_ω по частоте ω с шагом h_t по времени t , который принимался равным 0,1 мкс, также как и в п. 2, осуществлялась в соответствии с рекомендациями [5]:

$$h_\omega = 2\pi / (2^k h_t) \quad (3.10)$$

Как видно из фиг. 4, первоначально отдельные импульсы по мере удаления от места приложения нагрузки сливаются, т.к. происходит их расширение за счет дифракции.

На фиг. 5 изображена зависимость (1) изменения максимальных радиальных напряжений $\sigma_{rr}^{max}(r)$ в $\theta = 0$, рассчитанная для описанной выше конструкции, при действии одиночного импульса давления.

Для сравнения там же представлена аналогичная зависимость (2) для пластины с равнозначной толщиной. Как видно, в случае цилиндрической конструкции у внутренней поверхности происходит некоторое увеличение напряжения σ_{rr}^{max} . Расчеты показали, что величина данного роста зависит от относительной толщины конструкции, характеризующей кривизну ее поверхности [4], и увеличивается с увеличением последней. Это, по всей видимости, объясняется фокусирующим действием цилиндрической поверхности. Положение экстремума $\sigma_{rr}^{max}(r)$ определяется длительностью нагрузки τ и скоростью v распространения волн в материале конструкции – чем больше τ и v , тем дальше от внутренней поверхности расположен максимум σ_{rr}^{max} .

В области внешней поверхности (где относительная толщина, а соответственно, и влияние кривизны малы) характер изменения σ_{rr}^{max} такой же как в пластине и связан с поглощением волн в материале конструкции.

Представленные материалы позволяют сделать вывод, что описанные методики позволяют производить анализ НДС в слоистых цилиндрических конструкциях при многократном воздействии локальных динамических нагрузок с высокой точностью и учетом особенностей волновых процессов, возникающих в рассматриваемых конструкциях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сизов В.П.* О скаляризации динамических упругих полей в трансверсально-изотропных средах // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 5. С. 55–58.
2. *Петров А.М., Сизов В.П.* Определение напряженно-деформированного состояния в многослойной цилиндрической трубе при динамических нагрузках // Изв. АН СССР. МТТ. 1994. № 5. С. 69–75.
3. *Наследышев А.Г., Сизов В.П., Чернов А.А.* Возбуждение трансверсально-изотропного упругого полупространства импульсным давлением // Волны и дифракция. 90. М.: Физическое общество, 1990. Т. 1. С. 359–362.
4. *Петров А.М., Сизов В.П.* Влияние кривизны слоистой трубы на динамическую концентрацию напряжений при импульсных нагрузках // Изв. вузов. Машиностроение. 1991. № 7–9. С. 33–37.
5. *Отнес Р., Эноксон Л.* Прикладной анализ временных рядов. М.: Мир, 1982. 428 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
21.07.1998