МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2000

УДК 539.3

© 2000 г. А.Н. ДАНИЛИН, В.И. ШАЛАШИЛИН

О ПАРАМЕТРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Проблема сильного нелинейного деформирования твердого тела формулируется с позиции метода продолжения по параметру [1–9]. Рассматриваются статические и динамические задачи, решение которых непрерывно зависит от некоторого параметра или аргумента. Предложен метод получения уравнений продолжения, соответствующих основным группам уравнений нелинейной теории деформирования (деформационным и физическим соотношениям, уравнениям равновесия) с использованием в качестве неизвестных лагранжевых координат точек тела. Уравнения продолжения записаны в недеформированной конфигурации тела с использованием различных тензорных мер деформаций. Физические соотношения представлены в общей дифференциальной форме, соответствующей методу продолжения. Специальным дифференциальным соотношением вводится новый аргумент задачи – параметр длины интегральной кривой множества решений в пространстве, объединяющим одномерное евклидово пространство параметра задачи (нагрузки или времени) и гильбертово пространство лагранжевых координат задачи. Утверждается, что переход к новому аргументу доставляет системе разрешающих уравнений наилучшую обусловленность процесса решения. Обсуждаются методы дискретизации по пространственным координатам и даются аналоги уравнений продолжения в конечномерных случаях для задач сильного статического и динамического деформирования.

1. Постановка проблемы. Систематическое изложение метода продожения по параметру и варианты его использования при решении нелинейных задач механики твердого деформируемого тела опубликованы в книгах [1, 2]. К настоящему времени существенно расширилось понимание возможностей метода и показано, что алгоритм продолжения по параметру может быть эффективно использован для построения любых однопараметрических множеств решений [3–6]. Главным результатом исследований является доказательство факта, что наилучшим (оптимальным) параметром продолжения решения является параметр длины интегральной кривой множества решений [3]. Определение "наилучший" понимается в том смысле, что использование длины интегральной кривой множества решений в качестве нового аргумента задачи доставляет наилучшую обусловленность процессу построения решения.

Метод продолжения по наилучшему параметру для решения нелинейных задач механики деформируемого твердого тела предложен в [1, 2] и базируется на работах [10–13]. Однако окончательное оформление этот метод нашел в [3–9]. В этих работах показано, что переход к наилучшему аргументу осуществляется с помощью универсального аналитического преобразования, имеющего простую геометрическую интерпретацию. Показано также, что метод продолжения по наилучшему параметру имеет гораздо более широкую область применения, чем обычный метод продолжения решения. Его использование значительно расширяет класс задач, для которых становится возможным получить численные решения [7, 8]. Этот метод в наибольшей степени пригоден для решения задач нелинейного деформирования, так как позволяет добиться наилучшей обусловленности системы разрешающих уравнений. Алгоритмы метода наилучшей параметризации нечувствительны к наличию предельных точек на кривой деформирования и дают возможность без затруднений проходить особые точки решения.

Проблема сильного нелинейного статического и динамического деформирования может быть эффективно решена, если она будет поставлена в форме, адекватной методу ее решения. Это предложение положено в основу настоящей работы с целью получения разрешающих уравнений продолжения, соответствующих известным уравнениям механики деформируемого тела и моделирующих процессы сильного нелинейного деформирования. В итоге, поставленная задача должна сводиться к задаче Коши по параметру продолжения в неявной форме.

Ввиду того, что в рассматриваемой постановке проблемы перемещения не являются малыми, их использование для описания геометрии деформаций теряет первоначальный смысл. Поэтому, геометрические соотношения предлагается записывать через лагранжевы координаты деформированного тела с использованием различных мер деформаций.

Предлагаемый подход носит достаточно общий характер и может найти применение не только в механике деформируемых тел, но и в других областях естествознания.

2. Основные геометрические и деформационные соотношения. Движение материальных частиц твердого деформируемого тела будем описывать в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, используя материальный (лагранжев) способ.

Рассматриваются два положения материальной точки тела относительно осей системы $Ox_1x_2x_3$ – начальное и конечное, соответствующее новому состоянию равновесия деформируемого тела для текущего значения параметра времени t. Первое положение будем описывать материальными (лагранжевыми) координатами $x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ$. Они считаются независимыми переменными, однозначно сопоставляемыми точке и сохраняемыми за ней в конечном положении. Пространственными (эйлеровыми) координатами x_1, x_2, x_3 будем описывать новое положение точки, соответствующее конечному состоянию тела. Эти координаты рассматриваются как непрерывные функции материальных координат и времени $x_k = x_k(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ, t)$ $(k = 1, 2, 3)$, дифференцируемыми достаточное число раз по x_k° и t.

В качестве основных неизвестных будем рассматривать сами пространственные координаты x_1, x_2, x_3 деформированного состояния тела. Традиционное использование смещений $u_k = x_k - x_k^\circ$ оправдано только при малых их величинах. В случае больших смещений это может только усложнить уравнения. При желании переход к смещениям может быть без труда осуществлен подстановкой $x_i = x_i^\circ + u_i$. Уравнения, сформулированные относительно координат x_1, x_2, x_3 будем называть позиционными.

Введем радиус-векторы $\mathbf{x}^\circ$ и $\mathbf{x}$, определяющие, соответственно, положение движущейся материальной точки в начальный и текущий моменты времени. Если $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – ортонормированный базис, составленный из координатных ортов, тогда $\mathbf{x}^\circ = x_k^\circ \mathbf{i}_k$ и $\mathbf{x} = x_k \mathbf{i}_k$. Здесь и далее знак суммирования по повторяющемуся индексу будет опускаться.

Обозначим через $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}^*$ тензор-градиент и сопряженный ему тензор, характеризующие локальное движение точек материальной частицы. В диадном представлении

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_k}{\partial x_s^\circ}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_s, \quad \mathbf{F}^* = \frac{\partial x_k}{\partial x_s^\circ}\mathbf{i}_s\mathbf{i}_k \tag{2.1}$$

Используя (2.1) и дифференциальное соотношение $dx_k = (\partial x_k / \partial x_s^\circ) dx_s^\circ$, легко установить [14, 15], что векторы $d\mathbf{x}^\circ = dx_k^\circ \mathbf{i}_k$ и $d\mathbf{x} = dx_k \mathbf{i}_k$, определяющие положение точки бесконечно малой частицы относительно ее центра в начальной и текущей конфигурации тела, связаны равенством $d\mathbf{x} = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x}^\circ$.

Введем положительно определенный тензор $\mathbf{\Lambda}^\circ = \sqrt{\mathbf{F}^*\cdot\mathbf{F}}$, описывающий изменение расстояния между точками материальной частицы. Тогда, по теореме о полярном разложении тензора (см., например, [15]) $\mathbf{F} = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{\Lambda}^\circ$, где $\mathbf{Q}$ – ортогональный тензор, определяющий поворот частицы.

Пусть

$$\mathbf{E}^\circ = f(\mathbf{\Lambda}^\circ) = E_{ks}^\circ \mathbf{i}_k \mathbf{i}_s \tag{2.2}$$

тензор деформаций произвольного вида из семейства тензорных функций $f(\mathbf{\Lambda}^\circ)$, соосных $\mathbf{\Lambda}^\circ$. В частности, $\mathbf{E}^\circ$ может принимать вид тензоров [14–18]: $\mathbf{\Lambda}^\circ$ – кратностей удлинений, $\mathbf{\Lambda}^{\circ 2}$ – Коши, $\frac{1}{2}(\mathbf{\Lambda}^{\circ 2} - \mathbf{1})$ – Грина, $\frac{1}{2}[\mathbf{1} - (\mathbf{\Lambda}^\circ)^{-2}]$ – Альманси, $\ln\mathbf{\Lambda}^\circ$ – логарифмических деформаций.

Если ввести вектор смещения $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ = u_k(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ, t)\mathbf{i}_k$ и градиент смещений (тензор дисторсии) $\nabla^\circ \mathbf{u} = du_k / \partial x_s^\circ \mathbf{i}_s \mathbf{i}_k$, тогда формулы (2.1) можно записать так

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + (\nabla^\circ \mathbf{u})^* = \left(\delta_{ks} + \frac{\partial u_k}{\partial x_s^\circ}\right)\mathbf{i}_k \mathbf{i}_s, \quad \mathbf{F}^* = \mathbf{1} + \nabla^\circ \mathbf{u} = \left(\delta_{ks} + \frac{\partial u_k}{\partial x_s^\circ}\right)\mathbf{i}_s \mathbf{i}_k$$

где $\mathbf{1} = \delta_{ks}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_s$ – единичный тензор, δ_{ks} – символ Кронекера. В этом случае тензор деформации Грина равен

$$\boldsymbol{\epsilon}^\circ = \tfrac{1}{2}(\mathbf{F}^*\cdot\mathbf{F} - \mathbf{1}) = \mathbf{E} + \tfrac{1}{2}\nabla^\circ \mathbf{u}\cdot(\nabla^\circ \mathbf{u})^*$$

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{F} + \mathbf{F}^*) - \mathbf{1} = \tfrac{1}{2}[\nabla^\circ \mathbf{u} + (\nabla^\circ \mathbf{u})^*]$$

где $\mathbf{E}$ – линейный тензор деформации, играющий фундаментальную роль в линейной теории упругости. Если $\mathbf{E} = e_{ks}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_s$ и $\boldsymbol{\epsilon}^\circ = \varepsilon_{ks}^\circ \mathbf{i}_k \mathbf{i}_s$, то компоненты

$$e_{ks} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_s^\circ} + \frac{\partial u_s}{\partial x_k^\circ}\right), \quad \varepsilon_{ks}^\circ = e_{ks} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_j}{\partial x_k^\circ}\frac{\partial u_j}{\partial x_s^\circ} \tag{2.3}$$

или, с использованием пространственных координат

$$e_{ks} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_s^\circ} + \frac{\partial x_s}{\partial x_k^\circ}\right) - \delta_{ks}, \quad \varepsilon_{ks}^\circ = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_k^\circ}\frac{\partial x_j}{\partial x_s^\circ} - \delta_{ks}\right)$$

Обозначим, далее, объемы элементарной частицы до и после деформации, соответственно, как dv° и dv. Тогда, величина деформационной кратности изменения объема равна (см., например, [15])

$$J = dv / dv^\circ = |\partial x_i / \partial x_j^\circ| \tag{2.4}$$

3. Физические соотношения. Физические соотношения, определяющие свойства деформируемой среды, в самом общем виде могут быть заданы в форме соотношений, связывающих компоненты тензора напряжений

$$\mathbf{\Sigma} = \sigma_{ks}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_s \tag{3.1}$$

и тензора деформаций $\mathbf{E}^\circ$ (2.2).

Введем векторы $\boldsymbol{\epsilon}^\circ$ и $\boldsymbol{\sigma}$, образованные из компонент тензоров $\mathbf{E}^\circ$ и $\mathbf{\Sigma}$. Тогда физические соотношения могут быть записаны в виде

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}^\circ, \boldsymbol{\epsilon}^\circ, \boldsymbol{\sigma}) = 0 \tag{3.2}$$

где $\boldsymbol{\phi}$ представляет собой заданную вектор-функцию или функционал. В дальнейшем $\boldsymbol{\phi}$ будем называть просто функцией.

Не останавливаясь здесь на всех требованиях, которые должны быть наложены на $\boldsymbol{\phi}$, отметим, что для случая упругопластических деформаций эта функция должна удовлетворять условию, чтобы в любой момент деформирования малые изменения вектора напряжений $d\boldsymbol{\sigma}$ были бы однозначно определены малыми изменениями вектора деформаций $d\boldsymbol{\epsilon}^\circ$. Это означает следующее: если обозначить матрицы Якоби функции $\boldsymbol{\phi}$ по компонентам вектора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и вектора деформаций $\boldsymbol{\epsilon}^\circ$, соответственно, через $\partial\boldsymbol{\phi}/\partial\boldsymbol{\sigma}$ и $\partial\boldsymbol{\phi}/\partial\boldsymbol{\epsilon}^\circ$, то в вытекающем из (3.2) соотношении

$$\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}d\boldsymbol{\sigma}+\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{\epsilon}^\circ}d\boldsymbol{\epsilon}^\circ=0$$

матрица Якоби $\partial\boldsymbol{\phi}/\partial\boldsymbol{\sigma}$ должна иметь обратную матрицу. Последнее соотношение можно однозначно разрешить относительно $d\boldsymbol{\sigma}$ и представить его в форме

$$d\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}_t\cdot d\boldsymbol{\epsilon}^\circ,\quad \mathbf{D}_t=-(\partial\boldsymbol{\phi}/d\boldsymbol{\sigma})^{-1}d\boldsymbol{\phi}/\partial\boldsymbol{\epsilon}^\circ$$

где $\mathbf{D}_t$ – касательная матрица.

4. Уравнения движения. Уравнение движения материальной частицы будем рассматривать в недеформированной конфигурации тела [14–17]:

$$\boldsymbol{\nabla}^\circ\cdot\boldsymbol{\Sigma}_n+\rho^\circ(\mathbf{f}-\ddot{\mathbf{x}})=0 \tag{4.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\nabla}^\circ=\mathbf{i}_s\partial/\partial x_s^\circ$ – набла-оператор, ρ° – плотность материала в недеформированной конфигурации, $\mathbf{f}=f_k\mathbf{i}_k$ – вектор внешней силы, отнесенной к единице массы, $\ddot{\mathbf{x}}=\mathbf{i}_s\partial^2x_s/\partial t^2$ – вектор ускорения. Величина $\boldsymbol{\Sigma}_n=\mathbf{F}^{-1}\cdot J\boldsymbol{\Sigma}$ представляет собой номинальный тензор напряжений; J дается соотношением (2.4). Входящий в это выражение обратный к $\mathbf{F}$ тензор равен

$$\mathbf{F}^{-1}=\frac{1}{2}J^{-1}\in_{spq}\in_{kmn}\frac{\partial x_p}{\partial x_m^\circ}\frac{\partial x_q}{\partial x_n^\circ}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_s \tag{4.2}$$

где $\in_{ijk}$ – символ Леви-Чивита.

Подстановка (4.2) в (4.1) позволяет дать явную запись уравнения движения (4.1) в виде

$$\frac{1}{2}\in_{spq}\in_{kmn}\frac{\partial x_p}{\partial x_m^\circ}\frac{\partial x_q}{\partial x_n^\circ}\left(\mathbf{i}_s\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial x_k^\circ}\right)+\in_{spq}\in_{kmn}\frac{\partial x_q}{\partial x_n^\circ}\frac{\partial^2x_p}{\partial x_k^\circ\partial x_m^\circ}(\mathbf{i}_s\cdot\boldsymbol{\Sigma})+\rho^\circ(\mathbf{f}-\ddot{\mathbf{x}})=0$$

В этом уравнении отдельно рассмотрим второе слагаемое. Вычисляя сумму по индексам k, m и n нетрудно убедиться, что это слагаемое тождественно равно нулю и уравнение движения принимает вид

$$\frac{1}{2}\in_{spq}\in_{kmn}\frac{\partial x_p}{\partial x_m^\circ}\frac{\partial x_q}{\partial x_n^\circ}\left(\mathbf{i}_s\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial x_k^\circ}\right)+\rho^\circ(\mathbf{f}-\ddot{\mathbf{x}})=0 \tag{4.3}$$

или, в компонентном представлении,

$$\frac{1}{2}\in_{spq}\in_{kmn}\frac{\partial x_p}{\partial x_m^\circ}\frac{\partial x_q}{\partial x_n^\circ}\frac{\partial\sigma_{sj}}{\partial x_k^\circ}+\rho^\circ(f_j-\ddot{x}_j)=0 \tag{4.4}$$

Уравнения (4.3), (4.4) нелинейны относительно пространственных координат x_i и истинных напряжений σ_{sj}. Однако, если перемещения малы, то их изменения не учитываются при составлении уравнений равновесия, т.е. считается, что

$$\partial x_i / \partial x_j^\circ \approx \partial x_i / \partial x_j = \delta_{ij} \tag{4.5}$$

Тогда, как видно, уравнения (4.1), (4.4) для декартовых координат принимают традиционную для линейной теории упругости форму

$$\nabla \cdot \Sigma + \rho(\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{x}}) = 0 \text{ или } \frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_k} + \rho(f_j - \ddot{x}_j) = 0$$

Уравнения движения (4.1) или (4.3), (4.4), геометрические (2.2) и физические (3.2) соотношения составляют полную систему уравнений нелинейного деформирования среды, которые должны быть дополнены условиями на границе тела и соотношениями, определяющими состояние тела в начальный момент времени. Простейшими из них будут условия того, что граница тела Г фиксирована во времени и начальное состояние соответствует недеформированному телу:

$$\mathbf{x}\,|_\Gamma = \mathbf{x}_0\,|_\Gamma, \quad \Sigma\,|_\Gamma = 0, \quad \mathbf{E}^\circ\,|_\Gamma = 0 \tag{4.6}$$

$$\mathbf{x}\,|_{t=0} = \mathbf{x}_0, \quad \Sigma\,|_{t=0} = \Sigma_0, \quad \mathbf{E}^\circ\,|_{t=0} = \mathbf{E}_0^\circ \tag{4.7}$$

Необходимыми элементами любого метода численного решения уравнений вида (4.1), (3.2), (2.2) являются дискретизация по пространственным координатам и локальная линеаризация по параметру времени, нагрузки или какому-либо другому параметру. Дискретизация может быть проведена разностными, вариационными или вариационно-разностными методами (например, методом конечных элементов). По мнению авторов, локальная линеаризация наиболее рационально осуществляется в рамках метода продолжения решения по параметру [1, 2].

Суммарная громоздкость этих двух процедур, вообще говоря, зависит от их очередности. Представляется более эффективным проводить дискретизацию после линеаризации.

Отметим здесь также, что решения статических и динамических задач с точки зрения метода продолжения по параметру имеют свои особенности.

5. Статическое деформирование. Рассмотрим сначала задачу статического деформирования. В этом случае инерционные слагаемые в уравнениях движения отсутствуют, а вектор нагрузки $\mathbf{f}$ является функцией параметра нагрузки p, т.е. $\mathbf{f} = \mathbf{f}(p)$.

Рассматривая задачу с точки зрения применения метода продолжения по наилучшему параметру, будем считать неизвестные координаты точек деформированного тела $\mathbf{x}$, тензоры деформаций $\mathbf{E}^\circ$ и напряжений Σ, а также параметр нагрузки p функциями некоторого параметра продолжения l, смысл которого определим ниже, т.е.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(l), \quad \mathbf{E}^\circ = \mathbf{E}^\circ(l), \quad \Sigma = \Sigma(l), \quad p = p(l) \tag{5.1}$$

Сформулируем задачу (4.1), (3.2), (2.2) и (4.6), (4.7) как неявную задачу Коши по параметру l. Для этого продифференцируем уравнения (4.1), (3.2), (2.2) по l, принимая обозначение

$$(\ldots)' = \frac{d}{dl}(\ldots) \tag{5.2}$$

Дифференцируя вытекающее из (4.1) уравнение равновесия (4.3) по l, получим

$$\in_{spq} \in_{kmn} \frac{\partial x_q}{\partial x_n^\circ} \mathbf{i}_s \cdot \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial x_k^\circ} \frac{\partial x_p'}{\partial x_m^\circ} + \frac{1}{2} \frac{\partial x_p}{\partial x_m^\circ} \frac{\partial \Sigma'}{\partial x_k^\circ} \right) + \rho^\circ \mathbf{f}' = 0 \tag{5.3}$$

или

$$\in_{spq} \in_{kmn} \frac{\partial x_q}{\partial x_n^\circ}\left(\frac{\partial \sigma_{sj}}{\partial x_k^\circ}\ \frac{\partial x_p'}{\partial x_m^\circ}+\frac{1}{2}\frac{\partial x_p}{\partial x_m^\circ}\frac{\partial \sigma_{sj}'}{\partial x_k^\circ}\right)+\rho^\circ f_j'=0$$

Дифференцирование по l физических соотношений (3.2) приводит, как видно, к уравнению

$$\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}'+\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^\circ}\boldsymbol{\epsilon}^{\circ\prime}=0 \tag{5.4}$$

Рассмотрим более подробно процедуру дифференцирования по l геометрических соотношений. Ее результат зависит от вида функции $f(\boldsymbol{\Lambda}^\circ)$, определяющий тензор деформации $\mathbf{E}^\circ$.

Обозначим через λ_k и $\mathbf{e}_k^\circ$ ($k = 1, 2, 3$) собственные числа и собственные (ортонормированные) векторы тензора $\boldsymbol{\Lambda}^\circ$. Будем считать, что λ_k и $\mathbf{e}_k^\circ$ являются непрерывными функциями параметра l, дифференцируемыми достаточное число раз по l. Аналогично (5.1) запишем $\lambda_k=\lambda_k(l)$, $\mathbf{e}_k^\circ=\mathbf{e}_k^\circ(l)$. Векторы $\mathbf{e}_1^\circ,\mathbf{e}_2^\circ,\mathbf{e}_3^\circ$ образуют главный базис $\boldsymbol{\Lambda}^\circ$, в котором $\boldsymbol{\Lambda}^\circ=\lambda_k\mathbf{e}_k^\circ\mathbf{e}_k^\circ$. В каноническом представлении [15] $f(\boldsymbol{\Lambda}^\circ)=f(\lambda_k)\mathbf{e}_k^\circ\mathbf{e}_k^\circ$.

В силу принятых допущений о непрерывности по l, при изменении параметра продолжения l на величину dl, тензор деформации $\boldsymbol{\Lambda}^\circ$ получит приращение $d\boldsymbol{\Lambda}^\circ=d\lambda_k\mathbf{g}_k\mathbf{g}_k$, где $\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_3$ – главный (ортонормированный) базис тензора $d\boldsymbol{\Lambda}^\circ$. В свою очередь, тензор $\mathbf{E}^\circ=f(\boldsymbol{\Lambda}^\circ)$ изменится на величину $d\mathbf{E}^\circ=df(\lambda_k)\mathbf{g}_k\mathbf{g}_k=$ $=f_\lambda'(\lambda_k)d\lambda_k\mathbf{g}_k\mathbf{g}_k$ и станет равным $\mathbf{E}_{\text{new}}^\circ=\mathbf{E}^\circ+d\mathbf{E}^\circ$, где $df(\lambda_1)$, $df(\lambda_2)$, $df(\lambda_3)$ – дифференциалы собственных значений тензора $\mathbf{E}^\circ$, одновременно являющиеся собственными значениями тензора $d\mathbf{E}^\circ$; $f_\lambda'(\lambda_k)=df(\lambda_k)/d\lambda_k$.

С учетом равенства $d\boldsymbol{\Lambda}^\circ\cdot\mathbf{g}_k=d\lambda_k\mathbf{g}_k$ тензор $d\mathbf{E}^\circ=f_\lambda'(\lambda_k)d\boldsymbol{\Lambda}^\circ\cdot\mathbf{g}_k\mathbf{g}_k$, откуда следует, что $d\mathbf{E}$ является функцией $d\boldsymbol{\Lambda}^\circ$, т.е. $d\mathbf{E}^\circ=d\mathbf{E}^\circ(d\boldsymbol{\Lambda}^\circ)$.

От дифференциалов перейдем к конечным приращениям. В этом случае [19], если функция Δf имеет ряд Тейлора в начале координат $\Delta f(\Delta\lambda)=\sum\alpha_p(\Delta\lambda)^p$ $(p=0,1,\ldots)$ с кругом сходимости $|\Delta\lambda|=r$, то $\Delta f(\Delta\boldsymbol{\Lambda}^\circ)$ определена и

$$\Delta\mathbf{E}^\circ=\Delta f(\Delta\boldsymbol{\Lambda}^\circ)=\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_p(\Delta\boldsymbol{\Lambda}^\circ)^p=\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_p(\boldsymbol{\Lambda}^{\circ\prime}\Delta l)^p$$

поскольку выбором приращения Δl (как следствие непрерывности решения по параметру продолжения l) обеспечивается условие $|\Delta\lambda_k|<r$. Ораничиваясь первыми двумя слагаемыми, будем иметь

$$\Delta f(\Delta\boldsymbol{\Lambda}^\circ)=\alpha_0\mathbf{1}+\alpha_1\boldsymbol{\Lambda}^{\circ\prime}\Delta l \tag{5.5}$$

Обозначим

$$\mathbf{C}^\circ=\mathbf{F}^*\cdot\mathbf{F}=\frac{\partial x_k}{\partial x_j^\circ}\ \frac{\partial x_k}{\partial x_s^\circ}\mathbf{i}_j\mathbf{i}_s \tag{5.6}$$

тензор деформации Коши. Тогда для значения $l_{\text{new}}=l+\Delta l$:

$$\mathbf{C}_{\text{new}}^\circ=\mathbf{C}^\circ+\mathbf{C}^{\circ\prime}\Delta l \tag{5.7}$$

Поэтому тензор кратностей удлинений, с учетом (5.5):

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\text{new}}^\circ=\boldsymbol{\Lambda}^\circ\cdot\sqrt{\mathbf{1}+(\mathbf{C}^\circ)^{-1}\cdot\mathbf{C}^{\circ\prime}\Delta l}\approx\boldsymbol{\Lambda}^\circ\cdot[\mathbf{1}+\tfrac{1}{2}(\mathbf{C}^\circ)^{-1}\cdot\mathbf{C}^{\circ\prime}\Delta l] \tag{5.8}$$

где, следуя (5.6), $(\mathbf{C}^\circ)^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^*$, а $\mathbf{F}^{-1}$ вычисляется по формуле (4.2).

Тензоры деформаций Грина и Альманси определяются, соответственно, формулами:

$$\boldsymbol{\epsilon}^\circ = \tfrac{1}{2}(\mathbf{C}^\circ - \mathbf{1}), \quad \boldsymbol{\theta}^\circ = \tfrac{1}{2}[\mathbf{1} - (\mathbf{C}^\circ)^{-1}] \tag{5.9}$$

откуда следует, что для нового значения параметра продолжения l_{new}

$$\boldsymbol{\epsilon}^\circ_{new} = \boldsymbol{\epsilon}^\circ + \boldsymbol{\epsilon}^{\circ\prime}\Delta l = \boldsymbol{\epsilon}^\circ + \tfrac{1}{2}\mathbf{C}^{\circ\prime}\Delta l \tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{\theta}^\circ_{new} = \boldsymbol{\theta}^\circ + \boldsymbol{\theta}^{\circ\prime}\Delta l = \boldsymbol{\theta}^\circ - \tfrac{1}{2}(\mathbf{C}^\circ)^{-1\prime}\Delta l \tag{5.11}$$

В последней формуле $(\mathbf{C}^\circ)^{-1\prime} = [\mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^*]'$. Однако, для вычисления $(\mathbf{C}^\circ)^{-1\prime}$ можно предложить иную, более простую, формулу. Для этого нужно воспользоваться представлением (5.7) в форме: $\mathbf{C}^\circ_{new} = \mathbf{C}^\circ \cdot [\mathbf{1} + (\mathbf{C}^\circ)^{-1} \cdot \mathbf{C}^{\circ\prime}\Delta l]$, откуда, на основании (5.5), следует, что

$$(\mathbf{C}^\circ_{new})^{-1} \approx (\mathbf{C}^\circ)^{-1} \cdot [\mathbf{1} - \mathbf{C}^{\circ\prime} \cdot (\mathbf{C}^\circ)^{-1}\Delta l] \tag{5.12}$$

Дифференцируя (5.12) по l, получаем $(\mathbf{C}^\circ)^{-1\prime} = -(\mathbf{C}^\circ)^{-1} \cdot \mathbf{C}^{\circ\prime} \cdot (\mathbf{C}^\circ)^{-1}$, с учетом которого формула (5.11) принимает вид

$$\boldsymbol{\theta}^\circ_{new} = \boldsymbol{\theta}^\circ + \tfrac{1}{2}(\mathbf{C}^\circ)^{-1} \cdot \mathbf{C}^{\circ\prime} \cdot (\mathbf{C}^\circ)^{-1}\Delta l \tag{5.13}$$

Для тензора логарифмической деформации используем (5.5), (5.8). В результате будем иметь

$$\ln \boldsymbol{\Lambda}^\circ_{new} \approx \ln \boldsymbol{\Lambda}^\circ + \ln[\mathbf{1} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{C}^\circ)^{-1} \cdot \mathbf{C}^{\circ\prime}\Delta l] \approx \ln \boldsymbol{\Lambda}^\circ + \tfrac{1}{2}(\mathbf{C}^\circ)^{-1} \cdot \mathbf{C}^{\circ\prime}\Delta l \tag{5.14}$$

Аналогичным образом можно получить выражения и для других конкретных форм тензоров деформаций, соответствующих $l_{new} = l + \Delta l$, через известные значения соответствующих тензоров и их производных по l для текущего значения параметра продолжения.

Позиционные уравнения продолжения для деформационных соотношений представляют собой выражения для производных тензоров деформаций по параметру продолжения l через производные пространственных координат x_1, x_2, x_3 по l. Эти уравнения можно получить дифференцированием по l выражений для $\mathbf{E}^\circ_{new}$, таких как (5.7), (5.8), (5.10), (5.11) или (5.13), (5.14). В результате будем иметь:

для тензора кратностей удлинений

$$\boldsymbol{\Lambda}^\circ = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}^\circ \cdot (\mathbf{C}^\circ)^{-1} \cdot \mathbf{C}^{\circ\prime} \tag{5.15}$$

для тензора деформации Грина

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\circ\prime} = \tfrac{1}{2}\mathbf{C}^{\circ\prime} \tag{5.16}$$

для тензора деформации Альманси

$$\boldsymbol{\theta}^{\circ\prime} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{C}^\circ)^{-1} \cdot \mathbf{C}^{\circ\prime} \cdot (\mathbf{C}^\circ)^{-1} \tag{5.17}$$

и для тензора логарифмических деформаций

$$(\ln \boldsymbol{\Lambda}^\circ)' = \tfrac{1}{2}(\mathbf{C}^\circ)^{-1} : \mathbf{C}^{\circ\prime} \tag{5.18}$$

Выражение для производной тензора Коши (5.6) по l имеет вид

$$\mathbf{C}^{\circ\prime} = \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j^\circ}\frac{\partial x_k'}{\partial x_s^\circ} + \frac{\partial x_k}{\partial x_s^\circ}\frac{\partial x_k'}{\partial x_j^\circ}\right)\mathbf{i}_j\mathbf{i}_s \tag{5.19}$$

и, как видно из (5.15)–(5.19), является основным для построения позиционных уравнений продолжения для деформационных соотношений.

Заметим, что в случае малых деформаций из (5.16) сразу следуют традиционные для линейной теории упругости деформационные соотношения (2.3) (отбрасывая здесь квадратичные слагаемые). Действительно, поскольку $u_k = x'_k \Delta l$, из (5.16) с учетом (4.5) получаем

$$\varepsilon_{js} = \frac{1}{2}\left(\delta_{kj}\frac{\partial u_k}{\partial x_s} + \delta_{ks}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right)$$

В результате, обозначение (5.2) вместе с начальными условиями (4.7) можно трактовать как запись задачи Коши по параметру продолжения l следующего вида:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dl} = \mathbf{x}', \quad \frac{d\mathbf{\Sigma}}{dl} = \mathbf{\Sigma}', \quad \frac{d\mathbf{E}}{dl} = \mathbf{E}' \tag{5.20}$$

$$\mathbf{x}\,|_{l=0} = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{\Sigma}\,|_{l=0} = \overset{\circ}{\mathbf{\Sigma}}_0, \mathbf{E}\,|_{l=0} = \overset{\circ}{\mathbf{E}}_0 \tag{5.21}$$

Правые части в уравнениях (5.20) определяются для каждого значения параметра l из решения следующей линеаризованной краевой задачи

$$\in_{spq}\in_{kmn}\frac{\partial x_q}{\partial x_n^\circ}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_s}{\partial x_k^\circ}\frac{\partial x'_p}{\partial x_m^\circ} + \frac{1}{2}\frac{\partial x_p}{\partial x_m^\circ}\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'_s}{\partial x_k^\circ}\right) + \rho^\circ \mathbf{f}' = 0$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\circ\prime} = \tfrac{1}{2}\mathbf{C}^{\circ\prime} \tag{5.22}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}' + \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^\circ}\boldsymbol{\epsilon}^{\circ\prime} = 0$$

$$\mathbf{x}'\,|_\Gamma = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}'\,|_\Gamma = 0, \quad \boldsymbol{\epsilon}^{\circ\prime}\,|_\Gamma = 0$$

Граничные условия здесь получены дифференцированием условий (4.6), $\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{i}_s \cdot \mathbf{\Sigma} = \sigma_{sk}\boldsymbol{i}_k$, а векторы $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}^\circ$ образованы, как отмечалось выше, из компонент тензоров $\mathbf{\Sigma}$ (3.1) и $\boldsymbol{\epsilon}^\circ$ (5.9). Геометрические соотношения в данной записи (5.22) взяты для тензора деформаций Грина. Но в зависимости от постановки задачи они могут быть взяты для тензора деформаций Альманси, тензора логарифмических деформаций или других.

Задача (5.22) должна быть дополнена соотношением, определяющим параметр продолжения l. Для нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений вопрос о выборе параметра продолжения подробно обсуждался в [1, 2, 5]. Там отмечено, что обусловленность линеаризованной задачи существенно зависит от выбора параметра продолжения и показано, что наилучшую обусловленность обеспечивает параметр длины кривой множества решений в евклидовом пространстве, образованном неизвестными и параметром задачи (параметром нагрузки).

В данном случае множество решений принадлежит пространству, объединяющему одномерное евклидово пространство параметра нагрузки p и гильбертово пространство неизвестных лагранжевых координат $\mathbf{x}(\mathbf{x}^\circ)$ деформированного тела. Основываясь на аналогии между евклидовой и гильбертовой нормах и учитывая обобщения результатов работы [5], сделанные в [20] для гильбертового пространства, можно утверждать, что наилучшую обусловленность линеаризованной задачи (5.22) обеспечивает параметр l, удовлетворяющий в каждый момент продолжения решения следующему соотношению

$$(dl)^2 = (dp)^2 + \frac{1}{v^\circ}\int_{v^\circ} d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}\,dv^\circ$$

или, после деления на $(dl)^2$:

$$1 = (p')^2 + \frac{1}{v^\circ}\int\limits_{v^\circ} \mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}' dv^\circ$$

Процедура дискретизации по пространственным координатам, независимо от ее конкретной формы, сводится к отображению вектор функции $\mathbf{x}(\mathbf{x}^\circ)$, определяющей деформированное состояние тела и принадлежащей гильбертовому пространству, на вектор обобщенных координат $\overline{\mathbf{x}}(\overline{\mathbf{x}}^\circ)$ в конечномерном евклидовом пространстве (здесь $\overline{\mathbf{x}}^\circ$ – вектор, определяющий начальное состояние тела). Тогда задача Коши (5.20), (5.21) принимает форму

$$d\overline{\mathbf{x}} / dl = \overline{\mathbf{x}}', \quad \overline{\mathbf{x}}\,|_{l=0} = \overline{\mathbf{x}}_0$$

А задаче (5.22) соответствует определяющая $\overline{\mathbf{x}}'$ система линейных алгебраических уравнений $\mathbf{A}(\overline{\mathbf{x}})\overline{\mathbf{x}}' + (d\mathbf{F}(p)/dp)p' = 0$.

Здесь $\boldsymbol{F}(p)$ – вектор обобщенных сил, соответствующих вектору обобщенных координат $\overline{\mathbf{x}}$. Матрица коэффициентов $\mathbf{A}(\overline{\mathbf{x}})$ в случае дискретизации методом конечных элементов является касательной матрицей жесткости. Поэтому ее можно назвать обобщенной касательной матрицей жесткости.

Соотношение, определяющее наилучший параметр продолжения как длину вдоль кривой множества решений в евклидовом пространстве $\mathbf{R}: \{p, \overline{\mathbf{x}}\}$, имеет вид $(dl)^2 = (dp)^2 + d\overline{\mathbf{x}}\cdot d\overline{\mathbf{x}}$.

Примеры алгоритмов и результаты решения некоторых задач статического нелинейного деформирования при использвании метода конечных элементов для дискретизации по пространственным координатам рассмотрены в [7,8].

6. Динамическое деформирование. Уравнение движения (4.1) линейно относительно вектора ускорений $\ddot{\mathbf{x}}$, а сама система уравнений (4.1), (3.2), (2.2) является дифференциально-алгебраической системой. Сформулируем для нее уравнения продолжения в форме задачи Коши по параметру. Для этого предположим, как и ранее, что все искомые величины, а также время являются функциями некоторого параметра продолжения l, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(l)$, $\mathbf{E}^\circ = \mathbf{E}^\circ(l)$, $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(l)$, $t = t(l)$.

Продифференцируем геометрические (2.2) и физические (3.2) соотношения по l, а в уравнениях движения перейдем от времени t к параметру l. Для этого обозначим скорость изменения координат $d\mathbf{x}/dt$ через $\mathbf{u}$. В результате придем к следующей задаче Коши по параметру l:

$$\rho^\circ\mathbf{u}' = t'(\boldsymbol{\nabla}^\circ\cdot\boldsymbol{\Sigma}_n + \rho^\circ\mathbf{f}), \quad \mathbf{x}' = t'\mathbf{u} \tag{6.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}_t\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{\circ\prime}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^{\circ\prime} = \tfrac{1}{2}\mathbf{C}^{\circ\prime}$$

$$\mathbf{x}\,|_{l=0} = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{u}\,|_{l=0} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}\,|_{l=0} = \boldsymbol{\sigma}_0, \quad \boldsymbol{\epsilon}^\circ\,|_{l=0} = \boldsymbol{\epsilon}_0^\circ \tag{6.2}$$

Здесь так же, как и для статического деформирования, геометрические соотношения записаны для тензора деформаций Грина.

Эту задачу необходимо дополнить соотношением, определяющим параметр продолжения l. Будем рассматривать задачу в пространстве, объединяющем одномерное евклидово пространство времени t и гильбертово пространство неизвестных лагранжевых координат. Тогда, как и в статическом случае, наилучший параметр продолжения определится соотношением

$$(dl)^2 = (dt)^2 + \frac{1}{v^\circ}\int\limits_{v^\circ} d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} dv^\circ \tag{6.3}$$

отсюда будем иметь

$$t' = \left(1 - \frac{1}{v^\circ} \int_{v^\circ} \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' dv^\circ \right)^{1/2}$$

Учитывая второе уравнение (6.1), получим

$$t' = \left(1 + \frac{1}{v^\circ} \int_{v^\circ} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dv^\circ \right)^{-1/2}$$

Это уравнение вместе с условием $t\,|_{l=0} = 0$, согласующим начало отсчета времени t и параметра продолжения l, дополняет задачу Коши (6.1), (6.2).

Окончательно, описание движения твердого тела можно свести к задаче Коши по наилучшему параметру в форме

$$\mathbf{x}' = \mathbf{u} \left(1 + \frac{1}{v^\circ} \int_{v^\circ} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dv^\circ \right)^{-1/2}$$

$$\rho^\circ \mathbf{u}' = (\nabla^\circ \cdot \Sigma_n + \rho^\circ \mathbf{f}) \left(1 + \frac{1}{v^\circ} \int_{v^\circ} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dv^\circ \right)^{-1/2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}_t \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{\circ\prime}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^{\circ\prime} = \tfrac{1}{2} \mathbf{C}^{\circ\prime} \tag{6.4}$$

$$t' = \left(1 + \frac{1}{v^\circ} \int_{v^\circ} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dv^\circ \right)^{-1/2}$$

$$\mathbf{x}\,|_{l=0} = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{u}\,|_{l=0} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}\,|_{l=0} = \boldsymbol{\sigma}_0, \quad \boldsymbol{\epsilon}^\circ\,|_{l=0} = \boldsymbol{\epsilon}_0^\circ, \quad t\,|_{l=0} = 0 \tag{6.5}$$

Возможно также введение наилучшего параметра продолжения l в пространстве t, $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ с помощью соотношения

$$(dl)^2 = (dt)^2 + \frac{1}{v^\circ} \int_{v^\circ} (d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} + d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}) dv^\circ$$

Это приводит к аналогичной (6.4), (6.5) задаче Коши с несколько более сложной структурой уравнения для t'.

При дискретизации задачи движения по пространственным координатам вектор-функции перемещений $\mathbf{x}$, напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и нагрузки $\mathbf{f}$ из гильбертова пространства отображаются на соответствующие им обобщенные векторы $\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\overline{\mathbf{f}}$ в конечномерном евклидовом пространстве. При этом задача Коши по параметру продолжения l отобразится на задачу следующей структуры

$$\overline{\mathbf{x}}' = t' \overline{\mathbf{u}}, \quad \overline{\mathbf{u}}' = t' \mathbf{F}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}}, \overline{\boldsymbol{\sigma}}, \overline{\mathbf{f}})$$

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}' = \overline{\mathbf{D}}_t \cdot \overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\circ\prime}, \quad \overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\circ\prime} = \tfrac{1}{2} \overline{\mathbf{C}}^{\circ\prime} \tag{6.6}$$

$$\overline{\mathbf{x}}\,|_{l=0} = \overline{\mathbf{x}}_0, \quad \overline{\mathbf{u}}\,|_{l=0} = 0, \quad \overline{\boldsymbol{\sigma}}\,|_{l=0} = \overline{\boldsymbol{\sigma}}\,|_0, \quad \overline{\boldsymbol{\epsilon}}^\circ\,|_{l=0} = \overline{\boldsymbol{\epsilon}}_0^\circ \tag{6.7}$$

Наилучший параметр продолжения в евклидовом пространстве $\mathbf{R}$: $\{t, \overline{\mathbf{x}}\}$ введем соотношением $(dl)^2 = (dt)^2 + d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}$. Отсюда, с учетом первого уравнения (6.6), $t' = (1 + \overline{\mathbf{u}} \cdot \overline{\mathbf{u}})^{-1/2}$. Это уравнение вместе с условием $t\,|_{l=0} = 0$, согласующим начальные точки по t и по l, дополняет задачу Коши (6.6), (6.7), которая принимает вид

$$\overline{\mathbf{x}}' = \overline{\mathbf{u}}(1 + \overline{\mathbf{u}} \cdot \overline{\mathbf{u}})^{-1/2}$$

$$\overline{\mathbf{u}}' = \mathbf{F}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}}, \overline{\boldsymbol{\sigma}}, \overline{\mathbf{f}})(1 + \overline{\mathbf{u}} \cdot \overline{\mathbf{u}})^{-1/2}, \quad \overline{\boldsymbol{\sigma}}' = \overline{\mathbf{D}}_t \cdot \overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\circ\prime}$$

$$\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\circ\prime} = \tfrac{1}{2}\overline{\mathbf{C}}^{\circ\prime}, \;\; t' = (1+\overline{\mathbf{u}}\cdot\overline{\mathbf{u}})^{-1/2}$$

$$\overline{\mathbf{x}}\,|_{l=0} = \overline{\mathbf{x}}_0, \;\; \overline{\mathbf{u}}\,|_{l=0} = 0, \;\; \overline{\boldsymbol{\sigma}}\,|_{l=0} = \overline{\boldsymbol{\sigma}}_0, \;\; \overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\circ}\,|_{l=0} = \overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{\circ}_0, \;\; t\,|_{l=0} = 0$$

Такой подход к уравнениям движения позволяет решить проблемы, связанные с сильной нелинейностью систем, а также смягчить проблемы, порождаемые жесткостью систем дифференциально-алгебраических уравнений. Подробно эти проблемы обсуждались в [3–6,9].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00091).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григолюк Э.И., Шалашилин В.И.* Проблемы нелинейного деформирования. М.: Наука, 1988. 232 с.
2. *Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I.* Problems of Nonlinear Deformation. Dordrecht et al.; Kluwer, 1991. 262 p.
3. *Шалашилин Е.Б., Кузнецов Е.Б.* Задача Коши для нелинейно деформируемых систем как задача продолжения решения по параметру // Докл. РАН. 1993. Т. 329. № 4. С. 426–428.
4. *Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И.* Задача Коши как задача продолжения решения по параметру // Журнал вычислит. матем. и мат. физики. 1993. Т. 33. № 12. С. 1792–1805.
5. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Наилучший параметр продолжения решения // Докл. РАН. 1994. Т. 334. № 5. С. 566–568.
6. *Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И.* Задача Коши для механических систем с конечным числом степеней свободы как задача продолжения по наилучшему параметру // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 14–21.
7. *Зуев Н.Н., Князев Э.Н., Костриченко А.Б., Шалашилин В.И.* Реализация продолжения по наилучшему параметру в геометрически и физически нелинейных статических задачах метода конечных элементов // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 136–147.
8. *Шалашилин В.И., Костриченко А.Б., Князев Э.Н., Зуев Н.Н.* Продолжение по наилучшему параметру в нелинейных задачах, решаемых методом конечных элементов // Изв. вузов. Авиационная техника. 1997. № 4. С. 18–24.
9. *Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И.* Решение дифференциально-алгебраических уравнений с выбором наилучшего аргумента // Журнал вычислит. матем. и мат. физики. 1997. Т. 37. № 6. С. 711–722.
10. *Давиденко Д.Ф.* Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 4. С. 601–602.
11. *Riks E.* The application of Newton's method to the problem of elastic stability // Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech. 1972. V. 39. № 4. P. 1060–1065.
12. *Lahaye M.E.* Une metode de resolution categorie d'équation transcendantes // C.r. Sci. 1934. V. 198. № 21. P. 1840–1842.
13. *Ворович И.И., Зипалова В.Ф.* К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 5. С. 894–901.
14. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
15. *Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н.* Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во Ленингр. университета, 1988. 254 с.
16. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
17. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970, 939 с.
18. *Сьярле Ф.* Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 471 с.
19. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982. 272 с.
20. *Треногин В.А.* Теорема Люстерника и наилучшая параметризация решений нелинейных уравнений // Функциональный анализ и его применения. 1998. Т. 32. № 1. С. 87–90.

Москва

Поступила в редакцию 23.03.1999