МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2000

УДК 531.2

© 2000 г. Н.Н. БОЛОТНИК, С.А. КУМАКШЕВ

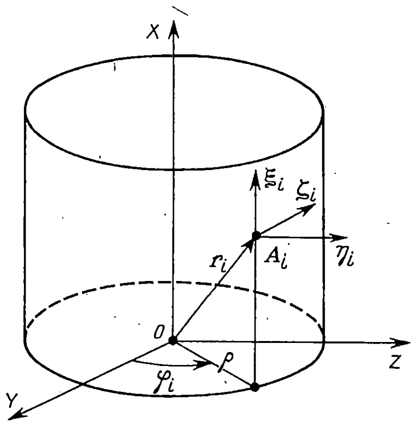
О РАВНОВЕСИИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ОПИРАЮЩЕГОСЯ НА ВНУТРЕННЮЮ ШЕРОХОВАТУЮ ПОВЕРХНОСТЬ ЦИЛИНДРА

Исследуется равновесие абсолютно твердого тела, имеющего конечное число точек контакта с внутренней шероховатой поверхностью цилиндра, под действием активных внешних сил и сил реакции поверхности в точках контакта. Для случая двух точек опоры тела на поверхность получены необходимые и достаточные условия равновесия. Приведен пример. Для случая трех точек опоры найдены необходимые условия равновесия и предложен алгоритм, позволяющий дать ответ на вопрос о возможности обеспечения равновесия тела при заданных активных силах и заданном расположении точек контакта. Интерес авторов к рассматриваемой проблеме возник в связи с исследованием статики и динамики шагающего аппарата, предназначенного для перемещения внутри труб. Некоторые результаты этого анализа изложены в [1–3]. Вопросы статики шагающего аппарата в цилиндрической трубе в отсутствие трения в точках контакта изучены в [4].

1. Описание системы. Уравнения равновесия. Будем исследовать условия равновесия абсолютно твердого тела, опирающегося конечным числом точек на шероховатую внутреннюю поверхность кругового цилиндра (трубы). Предполагается, что на тело действуют заданные внешние активные силы и неизвестные силы реакции поверхности, приложенные в точках контакта. Сила реакции, в свою очередь, подразделяется на нормальную составляющую, направленную внутрь цилиндра по нормали к его поверхности в точке контакта, и касательную составляющую, лежащую в плоскости, касательной к поверхности цилиндра в точке контакта. Касательная составляющая есть сила сухого трения между телом и поверхностью в точке контакта.

Введем прямоугольную правую систему координат $OXYZ$, ось X которой направлена вдоль оси цилиндра (фигура). Свяжем с каждой точкой контакта A_i, $i = 1,\ldots, n$, местную систему координат $A_i\xi_i\eta_i\zeta_i$ так, что ось ξ_i коллинеарна оси X, ось η_i направлена вдоль внешней нормали к цилиндрической поверхности в точке A_i, а ось ζ_i дополняет систему до правой ортогональной тройки. Введем следующие обозначения: $\mathbf{R}$ – главный вектор активных сил, приложенных к телу; R_x, R_y, R_z – компоненты вектора $\mathbf{R}$ в системе координат $OXYZ$; $\mathbf{M}_O$ – главный момент активных сил относительно точки O; M_x, M_y, M_z – компоненты вектора $\mathbf{M}_O$ в системе координат $OXYZ$; $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{OA_i}$ – радиус-вектор точки контакта A_i относительно полюса O системы координат $OXYZ$; $\mathbf{P}_i$ – сила реакции поверхности цилиндра, приложенная к телу в точке A_i; F_i, $-N_i$, Φ_i – проекции вектора $\mathbf{P}_i$ на оси ξ_i, η_i, ζ_i, соответственно, системы координат $A_i\xi_i\eta_i\zeta_i$; ρ – радиус цилиндра; x_i – x-координата точки A_i в системе координат $OXYZ$; φ_i – угол, отсчитываемый против часовой стрелки, между плоскостью OXY и плоскостью, образованной осью x и прямой OA_i; μ – коэффициент трения между телом и поверхностью контакта.

В векторной форме условия равновесия тела представляются в виде



$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i + \mathbf{R} = 0 \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i + \mathbf{M}_O = 0 \tag{1.2}$$

$$(\mathbf{P}_i, \mathbf{e}_{\eta_i}) \leqslant 0 \quad (i = 1,\ldots,n) \tag{1.3}$$

$$\mathbf{P}_i^2 \leqslant (1+\mu^2)(\mathbf{P}_i, \mathbf{e}_{\eta_i})^2 \quad (i = 1,\ldots,n) \tag{1.4}$$

Здесь через $\mathbf{e}_{\eta_i}$ обозначен орт оси η_i системы координат $A_i\xi_i\eta_i\zeta_i$, а через $(\mathbf{P}_i, \mathbf{e}_{\eta_i})$ – скалярное произведение векторов ($\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{e}_{\eta_i}$).

Уравнения (1.1) и (1.2) выражают условия равенства нулю соответственно главного вектора и главного момента всех сил, действующих на тело. Неравенство (1.3) означает, что нормальные составляющие сил реакции поверхности в точках контакта должны быть направлены внутрь цилиндра. Это условие отражает тот факт, что контакт тела с поверхностью реализует одностороннюю (неудерживающую) связь. Условие (1.4) выражает известный закон Кулона для сухого трения, согласно которому величина силы трения не превышает величину силы нормальной реакции, умноженную на коэффициент трения. Действительно, неравенство (1.4) можно переписать в виде

$$\sqrt{\mathbf{P}_i^2 - (\mathbf{P}_i, \mathbf{e}_{\eta_i})^2} \leqslant \mu\,|(\mathbf{P}_i, \mathbf{e}_{\eta_i})| \tag{1.5}$$

Правая часть этого неравенства есть умноженный на μ модуль силы нормальной реакции, а левая часть представляет величину проекции силы $\mathbf{P}_i$ на касательную плоскость в точке A_i, т.е. модуль силы трения.

Представим уравнения (1.1), (1.2) и неравенства (1.3), (1.4) в координатной форме, используя переменные R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z, F_i, N_i, Φ_i, x_i, ρ, φ_i. Спроектировав векторы, входящие в соотношения (1.1)–(1.5), на оси системы координат $OXYZ$, получим

$$\mathbf{r}_i = \begin{Vmatrix} x_i \\ \rho\cos\varphi_i \\ \rho\sin\varphi_i \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{P}_i = \begin{Vmatrix} F_i \\ -N_i\cos\varphi_i - \Phi_i\sin\varphi_i \\ -N_i\sin\varphi_i + \Phi_i\cos\varphi_i \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{Vmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{M}_O = \begin{Vmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Vmatrix} \tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) в (1.1)–(1.5), будем иметь следующую систему уравнений и неравенств:

$$\sum F_i + R_x = 0 \tag{1.7}$$

$$\sum (-N_i\cos\varphi_i - \Phi_i\sin\varphi_i) + R_y = 0 \tag{1.8}$$

$$\sum (-N_i\sin\varphi_i + \Phi_i\cos\varphi_i) + R_z = 0 \tag{1.9}$$

$$\rho\sum \Phi_i + M_x = 0 \tag{1.10}$$

$$\sum [\rho F_i\sin\varphi_i + x_i(N_i\sin\varphi_i - \Phi_i\cos\varphi_i)] + M_y = 0 \tag{1.11}$$

$$\sum[-\rho F_i \cos\varphi_i - x_i(N_i \cos\varphi_i + \Phi_i \sin\varphi_i)] + M_z = 0 \qquad (1.12)$$

$$N_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (1.13)$$

$$\Phi_i^2 + F_i^2 \leqslant \mu^2 N_i^2 \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (1.14)$$

Суммирование в (1.7)–(1.12) производится по i от 1 до n.

В данной статье будет исследоваться возможность равновесия тела, опирающегося на внутреннюю поверхность цилиндра, при заданных активных силах и моментах и заданном расположении точек контакта. Математически проблема сводится к исследованию существования решений системы уравнений и неравенств (1.7)–(1.14) относительно F_i, N_i, Φ_i при заданных R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z, x_i, ρ, φ_i.

2. Случай n = 2. Положим $x_1 = 0$ и $\varphi_1 = 0$. Это не ограничивает общности и означает, что система координат $OXYZ$ выбирается таким образом, что точка A_1 лежит на оси OY. Уравнения (1.7)–(1.12) в случае двух точек контакта ($n = 2$) принимают вид

$$F_1 + F_2 = -R_x \qquad (2.1)$$

$$N_1 + N_2 \cos\varphi_2 + \Phi_2 \sin\varphi_2 = R_y \qquad (2.2)$$

$$N_2 \sin\varphi_2 - \Phi_1 - \Phi_2 \cos\varphi_2 = R_z \qquad (2.3)$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = -M_x/\rho \qquad (2.4)$$

$$\rho F_2 \sin\varphi_2 + x_2(N_2 \sin\varphi_2 - \Phi_2 \cos\varphi_2) = -M_y \qquad (2.5)$$

$$\rho(F_1 + F_2 \cos\varphi_2) + x_2(N_2 \cos\varphi_2 + \Phi_2 \sin\varphi_2) = M_z \qquad (2.6)$$

Уравнения (2.1)–(2.6) образуют систему шести линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно шести неизвестных F_i, N_i, Φ_i (i = 1, 2). Непосредственным вычислением устанавливается, что определитель этой системы равен нулю и, следовательно, в общем случае система уравнений (2.1)–(2.6) несовместна. Выясним, при каких соотношениях между известными величинами, входящими в эту систему, она будет совместна, и построим ее общее решение.

Рассмотрим сначала частный случай $\varphi_2 = 0$. Это означает, что точки контакта A_1 и A_2 лежат на одной образующей цилиндра. В этом случае уравнения (2.1)–(2.6) имеют вид

$$F_1 + F_2 = -R_x \qquad (2.7)$$

$$N_1 + N_2 = R_y \qquad (2.8)$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = -R_z \qquad (2.9)$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = -M_x/\rho \qquad (2.10)$$

$$x_2\Phi_2 = M_y \qquad (2.11)$$

$$\rho(F_1 + F_2) + x_2 N_2 = M_z \qquad (2.12)$$

Будем считать, что $x_2 \neq 0$. Случай $x_2 = 0$, $\varphi_2 = 0$ означает, что точки A_1 и A_2 совмещены, т.е. точка контакта всего одна.

Из (2.9)–(2.10) вытекает, что система уравнений (2.7)–(2.12) совместна только тогда, когда

$$R_z\rho - M_x = 0 \qquad (2.13)$$

Если это условие выполнено, то из (2.9)–(2.11) однозначно определяются Φ_1 и Φ_2:

$$\Phi_1 = -\frac{M_y}{x_2} - \frac{M_x}{\rho}, \quad \Phi_2 = \frac{M_y}{x_2} \qquad (2.14)$$

Из (2.7) и (2.12) находится N_2

$$N_2 = (M_z + \rho R_x) / x_2 \tag{2.15}$$

Подставляя (2.15) в (2.8), находим N_1:

$$N_1 = R_y - (M_z + \rho R_x) / x_2 \tag{2.16}$$

Неизвестные F_1 и F_2 не определяются однозначно из системы (2.7)–(2.12). Любая пара чисел, удовлетворяющих уравнению (2.7), в совокупности с (2.14)–(2.16), удовлетворяет этой системе. Примем F_1 в качестве независимого параметра. Тогда

$$F_2 = -F_1 - R_x \tag{2.17}$$

Итак, в случае $\varphi_2 = 0$, $x_2 \neq 0$, общее решение системы (2.7)–(2.12) задается соотношением (2.14)–(2.17) при условии выполнения равенства (2.13). Если это равенство не выполнено, то система несовместна.

Рассмотрим теперь общий случай $\varphi_2 \neq 0$. Из уравнений (2.3) и (2.4) неизвестные Φ_1 и Φ_2 выражаются в виде функций неизвестной N_2

$$\Phi_1 = -\frac{1}{1-\cos\varphi_2}\left(R_z - \frac{M_x \cos\varphi_2}{\rho} - N_2 \sin\varphi_2\right) \tag{2.18}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{1-\cos\varphi_2}\left(R_z - \frac{M_x}{\rho} - N_2 \sin\varphi_2\right) \tag{2.19}$$

Подставив (2.19) в (2.2) выразим N_1 через N_2:

$$N_1 = R_y - \frac{\sin\varphi_2}{1-\cos\varphi_2}\left(R_z - \frac{M_x}{\rho}\right) + N_2 \tag{2.20}$$

Сложив уравнение (2.5), умноженное на $\sin\varphi_2$, с уравнением (2.6), умноженным на $\cos\varphi_2$, получим

$$\rho(F_2 + F_1 \cos\varphi_2) = -x_2 N_2 - M_y \sin\varphi_2 + M_z \cos\varphi_2 \tag{2.21}$$

Решив уравнение (2.21) совместно с (2.1) относительно F_1 и F_2, будем иметь

$$F_1 = -\frac{1}{1-\cos\varphi_2}\left(R_x - \frac{N_2 x_2}{\rho} - \frac{M_y \sin\varphi_2}{\rho} + \frac{M_z \cos\varphi_2}{\rho}\right) \tag{2.22}$$

$$F_2 = \frac{1}{1-\cos\varphi_2}\left(R_x \cos\varphi_2 - \frac{N_2 x_2}{\rho} - \frac{M_y \sin\varphi_2}{\rho} + \frac{M_z \cos\varphi_2}{\rho}\right) \tag{2.23}$$

Подставляя выражения (2.18), (2.19), (2.22) и (2.23) в уравнения (2.5) и (2.6), получим соответственно

$$\frac{\cos\varphi_2}{1-\cos\varphi_2}[x_2(M_x - \rho R_z) + M_y\rho(\cos\varphi_2 - 1) + \rho\sin\varphi_2(M_z + \rho R_x)] = 0 \tag{2.24}$$

$$\frac{\sin\varphi_2}{1-\cos\varphi_2}[x_2(M_x - \rho R_z) + M_y\rho(\cos\varphi_2 - 1) + \rho\sin\varphi_2(M_z + \rho R_x)] = 0 \tag{2.25}$$

Равенства (2.24) и (2.25) вытекают из системы уравнений (2.1)–(2.6) и не содержат неизвестных F_i, N_i, Φ_i. Следовательно эти равенства выражают условия совместности указанной системы уравнений. Поскольку выражения в квадратных скобках в (2.24) и (2.25) совпадают, а $\sin\varphi_2$ и $\cos\varphi_2$ не обращаются в нуль одновременно, условие совместности системы уравнений (2.1)–(2.6) сводится к одному равенству

$$x_2(M_x - \rho R_z) + M_y \rho(\cos\varphi_2 - 1) + \rho\sin\varphi_2(M_z + \rho R_x) = 0 \qquad (2.26)$$

Условие (2.26) допускает физическую интерпретацию. Оно означает, что для того, чтобы при двух точках контакта твердое тело находилось в состоянии равновесия, необходимо, чтобы главный момент внешних активных сил, приложенных к телу, относительно оси, проходящей через точки контакта, равнялся нулю. Покажем это.

По определению, момент сил относительно оси есть проекция на эту ось момента данных сил относительно любой точки, лежащей на указанной оси. Приведем главный момент активных сил к точке A_1, пользуясь известной формулой

$$\mathbf{M}_{A_1} = \mathbf{M}_O - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{R} \qquad (2.27)$$

где $\mathbf{M}_O$ – главный момент активных сил относительно начала O системы координат $OXYZ$, $\mathbf{R}$ – главный вектор активных сил, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OA_1}$.

Подставляя $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{M}_O$ и $\mathbf{R}$ из (1.6) в (2.27), полагая $x_1 = 0$ и $\varphi_1 = 0$, получим

$$\mathbf{M}_{A_1} = \begin{Vmatrix} M_x - \rho R_z \\ M_y \\ M_z + \rho R_x \end{Vmatrix} \qquad (2.28)$$

Единичный вектор $\mathbf{e}_{12}$ оси A_1A_2 определяется формулой

$$\mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \qquad (2.29)$$

Подставляя в (2.29) выражения (1.6) для $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, с учетом соотношений $x_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$, имеем

$$\mathbf{e}_{12} = [x_2^2 + 2\rho^2(1 - \cos\varphi_2)]^{-1/2} \begin{Vmatrix} x_2 \\ \rho(\cos\varphi_2 - 1) \\ \rho\sin\varphi_2 \end{Vmatrix} \qquad (2.30)$$

Умножая скалярно вектор $\mathbf{M}_{A_1}$ из (2.28) на $\mathbf{e}_{12}$ из (2.30), получим

$$M_{\mathbf{e}_{12}} = (\mathbf{M}_{A_1}, \mathbf{e}_{12}) = [x_2^2 + 2\rho^2(1 - \cos\varphi_2)]^{-1/2} \times \qquad (2.31)$$
$$\times \ \{x_2(M_x - \rho R_z) + M_y\rho(\cos\varphi_2 - 1) + \rho\sin\varphi_2(M_z + \rho R_z)\}$$

Сравнивая (2.31) и (2.26), убеждаемся, что равенство (2.26) выполнено тогда и только тогда, когда $M_{\mathbf{e}_{12}} = 0$. Отметим, что при $\varphi_2 = 0$ и $x_2 \neq 0$ условие (2.26) переходит в (2.13). Таким образом, если условие (2.26) выполнено, то система уравнений равновесия (2.1)–(2.6) имеет однопараметрическое семейство решений. Это семейство решений задается равенствами (2.18)–(2.20), (2.22), (2.23), если $\varphi_2 \neq 0$ и равенствами (2.14)–(2.17), если $\varphi_2 = 0$ и $x_2 \neq 0$. Ограничимся далее случаем общего положения $\varphi_2 \neq 0$. Случай $\varphi_2 = 0$ при $x_2 \neq 0$ исследуется аналогично.

Перепишем выражения (2.18)–(2.20), (2.22), (2.23) в более компактном и единообразном виде

$$N_i = \alpha_i N_2 + \beta_i \quad (i = 1, 2) \qquad (2.32)$$

$$F_i = \gamma_i N_2 + \delta_i \quad (i = 1, 2) \qquad (2.33)$$

$$\Phi_i = \nu_i N_2 + \varkappa_i \quad (i = 1, 2) \qquad (2.34)$$

$$\alpha_1 = 1,\ \beta_1 = R_y - \operatorname{ctg}\frac{\varphi_2}{2}\left(R_z - \frac{M_x}{\rho}\right),\ \alpha_2 = 1,\ \beta_2 = 0$$

$$\gamma_1 = -\gamma_2 = \frac{x_2}{\rho(1-\cos\varphi_2)}$$

$$\delta_1 = -\frac{1}{1-\cos\varphi_2}\left(R_x - \frac{M_y \sin\varphi_2}{\rho} + \frac{M_z\cos\varphi_2}{\rho}\right) \tag{2.35}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{1-\cos\varphi_2}\left(R_x \cos\varphi_2 - \frac{M_y \sin\varphi_2}{\rho} + \frac{M_z\cos\varphi_2}{\rho}\right)$$

$$\nu_1 = -\nu_2 = \operatorname{ctg}(\varphi_2/2)$$

$$\varkappa_1 = -\frac{1}{1-\cos\varphi_2}\left(R_z - \frac{M_x\cos\varphi_2}{\rho}\right),\ \varkappa_2 = \frac{1}{1-\cos\varphi_2}\left(R_z - \frac{M_x}{\rho}\right)$$

Подстановка (2.32)–(2.34) в (1.13) и (1.14) приводит неравенства (1.13), (1.14) к виду

$$\alpha_i N_2 + \beta_i \geqslant 0\ \ (i=1,2) \tag{2.36}$$

$$\psi_i N_2^2 + 2\chi_i N_2 + \omega_i \leqslant 0\ \ (i=1,2) \tag{2.37}$$

$$\psi_i = \gamma_i^2 + \nu_i^2 - \mu^2\alpha_i^2$$

$$\chi_i = \gamma_i\delta_i + \nu_i\varkappa_i - \mu^2\alpha_i\beta_i \tag{2.38}$$

$$\omega_i = \delta_i^2 + \varkappa_i^2 - \mu^2\beta_i^2$$

Если выполнено соотношение (2.26) и система неравенств (2.36), (2.37) совместна, то равновесие твердого тела, опирающегося на внутреннюю шероховатую поверхность цилиндра, при заданных двух точках контакта и заданных активных силах возможно.

Таким образом, для ответа на вопрос о возможности равновесия в случае двух точек контакта тела с цилиндрической поверхностью нужно проделать следующие действия:

1. Проверить выполнение соотношения (2.26). Если это соотношение не выполнено, то равновесие невозможно.

2. Решить линейные неравенства (2.36) и квадратные неравенства (2.37). Если множество решений хотя бы одного из этих неравенств пусто, то равновесие невозможно.

3. Найти пересечение решений неравенств (2.36) и (2.37). Если это пересечение не пусто, то равновесие возможно, в противном случае равновесие невозможно.

3. Равновесие стержня в вертикальном цилиндре. В качестве примера исследуем равновесие однородного стержня массой m в вертикальном цилиндре. Центр масс такого стержня расположен посередине между его концами. Предположим, что из активных сил на тело действует только сила тяжести. Выберем систему $OXYZ$ (см. п. 1) так, что ось x, совпадающая с осью цилиндра, направлена вертикально вверх. В этом случае главный вектор $\mathbf{R}$ и главный момент $\mathbf{M}_O$ активных сил (сил тяжести) имеет вид

$$\mathbf{R} = \begin{Vmatrix} -mg \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix},\ \mathbf{M}_O = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)\times\mathbf{R} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 \\ -mg\rho\sin\varphi_2 \\ mg\rho(1+\cos\varphi_2) \end{Vmatrix}$$

и, следовательно,

$$R_x = -mg, \;\; R_y = 0, \;\; R_z = 0$$

$$M_x = 0, \;\; M_y = -\frac{mg\rho \sin\varphi_2}{2}, \;\; M_z = \frac{mg\rho(1+\cos\varphi_2)}{2} \tag{3.1}$$

где g – ускорение силы тяжести. Подставляя (3.1) в (2.26), убеждаемся, что необходимое условие равновесия (2.26) выполнено.

Подставляя (3.1) в (2.35) получим

$$\alpha_1 = 1, \;\; \beta_1 = 0, \;\; \alpha_2 = 1, \;\; \beta_2 = 0$$

$$\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma_0, \;\; \gamma_0 = \frac{x_2}{\rho(1-\cos\varphi_2)}, \;\; \delta_1 = \delta_2 = \frac{mg}{2} \tag{3.2}$$

$$\nu_1 = -\nu_2 = \operatorname{ctg}(\tfrac{1}{2}\varphi_2), \;\; \varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$$

В соответствии с (3.2) и (2.38) имеем

$$\psi_1 = \psi_2 = \gamma_0^2 + \operatorname{ctg}(\tfrac{1}{2}\varphi_2) - \mu^2$$

$$\chi_1 = -\chi_2 = \tfrac{1}{2} mg\gamma_0 \tag{3.3}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \tfrac{1}{4} m^2 g^2$$

В этом случае неравенства (2.36) сводятся к условию $N_2 \geqslant 0$. Обозначим через Q_i множество неотрицательных значений N_2, удовлетворяющих неравенству (2.37) при соответствующем значении i.

Анализ неравенств (2.37), где ψ_i, χ_i, ω_i определяются соотношениями (3.3), приводит к следующим результатам:

если $\mu < |\operatorname{ctg}(\tfrac{1}{2}\varphi_2)|$, то множества Q_1 и Q_2 пусты;

если $\mu = |\operatorname{ctg}(\tfrac{1}{2}\varphi_2)|$ и $x_2 = 0$, то множества Q_1 и Q_2 пусты;

если $\mu = |\operatorname{ctg}(\tfrac{1}{2}\varphi_2)|$ и $x_2 > 0$, то $Q_1 = \varnothing$, $Q_2 = \{N_2 : N_2 = mg/(2\gamma_0)\}$;

если $\mu = |\operatorname{ctg}(\tfrac{1}{2}\varphi_2)|$ и $x_2 < 0$, то $Q_1 = \{N_2 : N_2 = -mg/(2\gamma_0)\}$, $Q_2 = \varnothing$;

если $|\operatorname{ctg}(\tfrac{1}{2}\varphi_2)| < \mu < [\gamma_0^2 + \operatorname{ctg}^2(\tfrac{1}{2}\varphi_2)]^{1/2}$ и $x_2 > 0$, то $Q_1 = \varnothing$, $Q_2 = \{N_2 : \lambda_- \leqslant N_2 \leqslant \lambda_+\}$,

$$\lambda_\pm = \tfrac{1}{2} mg\left[|\gamma_0| \mp \sqrt{\mu^2 - \operatorname{ctg}^2(\tfrac{1}{2}\varphi_2)}\right]\left[\gamma_0^2 + \operatorname{ctg}^2(\tfrac{1}{2}\varphi_2) - \mu^2\right]^{-1};$$

если $|\operatorname{ctg}(\tfrac{1}{2}\varphi_2)| < \mu < [\gamma_0^2 + \operatorname{ctg}^2(\tfrac{1}{2}\varphi_2)]^{1/2}$ и $x_2 < 0$, то

$Q_1 = \{N_2 : \lambda_- \leqslant N_2 \leqslant \lambda_+\}$, $Q_2 = \varnothing$;

если $\mu = [\gamma_0^2 + \operatorname{ctg}^2(\tfrac{1}{2}\varphi_2)]^{1/2}$ и $x_2 > 0$, то

$Q_1 = \varnothing$, $Q_2 = \{N_2 : N_2 \geqslant mg/(4\gamma_0)\}$;

если $\mu = [\gamma_0^2 + \operatorname{ctg}^2(\tfrac{1}{2}\varphi_2)]^{1/2}$ и $x_2 < 0$, то

$Q_1 = \{N_2 : N_2 \geqslant -mg/(4\gamma_0)\}$; $Q_2 = \varnothing$;

если $\mu > [\gamma_0^2 + \operatorname{ctg}^2(\tfrac{1}{2}\varphi_2)]^{1/2}$, то

$$Q_1 = \left\{ N_2 : N_2 \geqslant \frac{mg}{2} \frac{\sqrt{\mu^2 - \operatorname{ctg}^2(\tfrac{1}{2}\varphi_2)} + \gamma_0}{\mu^2 - \operatorname{ctg}^2(\tfrac{1}{2}\varphi_2) - \gamma_0^2} \right\}$$

$$Q_2 = \left\{ N_2 : N_2 \geqslant \frac{mg}{2} \frac{\sqrt{\mu^2 - \operatorname{ctg}^2(\tfrac{1}{2}\varphi_2)} - \gamma_0}{\mu^2 - \operatorname{ctg}^2(\tfrac{1}{2}\varphi_2) - \gamma_0^2} \right\}$$

На основе выписанных соотношений заключаем, что равновесие стержня внутри вертикальной трубы возможно только при выполнении неравенства

$$\mu > [\gamma_0^2 + \operatorname{ctg}^2(\tfrac{1}{2}\varphi_2)]^{1/2} \tag{3.4}$$

так как только в этом случае пересечение множеств Q_1 и Q_2 непусто; при этом нормальные реакции N_1 и N_2 должны удовлетворять соотношениям

$$N_1 = N_2 \geqslant \frac{mg}{2} \frac{\sqrt{\mu^2 - \operatorname{ctg}^2(\tfrac{1}{2}\varphi_2)} + |\gamma_0|}{\mu^2 - \operatorname{ctg}^2(\tfrac{1}{2}\varphi_2) - \gamma_0^2} \tag{3.5}$$

В соответствии с (2.32)–(2.34) и (3.2) компоненты сил трения, действующих в точках контакта, суть

$$F_1 = \gamma_0 N_2 + mg/2, \quad \Phi_1 = N_2 \operatorname{ctg}(\tfrac{1}{2}\varphi_2) \tag{3.6}$$

$$F_2 = -\gamma_0 N_2 + mg/2, \quad \Phi_2 = -N_2 \operatorname{ctg}(\tfrac{1}{2}\varphi_2) \tag{3.7}$$

4. Случай n = 3. Для равновесия тела в этом случае необходимо, чтобы момент силы реакции поверхности в каждой точке контакта, относительно оси, проходящей через две другие точки контакта, компенсировал главный момент активных сил относительно указанной оси. Из этого условия вытекает, что компоненты силы реакции Φ_i, F_i и N_i в i-й точке контакта связаны линейным соотношением

$$a_i F_i + b_i N_i + c_i \Phi_i = d_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{4.1}$$

где коэффициенты a_i, b_i, c_i зависят только от взаимного расположения точек контакта, а свободный член d_i зависит также от компонент главного вектора и главного момента активных сил.

Приведем схему вывода формулы (4.1), положив для определенности $i = 1$. Вычислим момент активных сил относительно оси A_2A_3. Главный момент активных сил приводится к точке A_2 по формуле (аналогичной (2.27))

$$\mathbf{M}_{A_2} = \mathbf{M}_O - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{R} \tag{4.2}$$

где векторы $\mathbf{M}_O$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{R}$ определяются согласно (1.6). Орт оси A_2A_3 есть

$$\mathbf{e}_{23} = \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|} \tag{4.3}$$

Здесь предполагается, что $\mathbf{r}_2 \neq \mathbf{r}_3$ и, следовательно, $|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2| \neq 0$. В противном случае точек контакта было бы не три, а две. Момент активных сил относительно оси A_2A_3 определяется соотношением

$$M_{\mathbf{e}_{23}} = (\mathbf{M}_{A_2}, \mathbf{e}_{23}) \tag{4.4}$$

Аналогично находится момент силы реакции $\mathbf{P}_1$ относительно оси A_2A_3. Момент силы $\mathbf{P}_1$ относительно точки A_2 есть

$$\mathbf{M}_{A_2}(\mathbf{P}_1) = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{P}_1 \tag{4.5}$$

где $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{P}_1$ определяются в соответствии с (1.6). Момент силы $\mathbf{P}_1$ относительно оси A_2A_3 вычисляется по формуле

$$M_{\mathbf{e}_{23}}(\mathbf{P}_1) = (\mathbf{M}_{A_2}(\mathbf{P}_1), \mathbf{e}_{23}) \tag{4.6}$$

Условие равенства нулю главного момента всех сил, действующих на тело, относительно оси A_2A_3 дает

$$M_{\mathbf{e}_{23}} + M_{\mathbf{e}_{23}}(\mathbf{P}_1) = 0 \tag{4.7}$$

Произведя вычисления по формулам (1.6), (4.2)–(4.7), получим равенство вида (4.1) для $i = 1$, где

$$\begin{aligned}
a_1 &= \rho^2[\sin(\varphi_1-\varphi_3)+\sin(\varphi_3-\varphi_2)+\sin(\varphi_2-\varphi_1)]\\
b_1 &= \rho[(x_1-x_2)\sin(\varphi_1-\varphi_3)+(x_1-x_3)\sin(\varphi_2-\varphi_1)]\\
c_1 &= \rho[x_3-x_2+(x_1-x_3)\cos(\varphi_2-\varphi_1)+(x_2-x_1)\cos(\varphi_3-\varphi_1)]\\
d_1 &= M_x(x_2-x_3)+M_y\rho(\cos\varphi_2-\cos\varphi_3)+M_z\rho(\sin\varphi_2-\sin\varphi_3)+\\
&+\ R_x\rho^2\sin(\varphi_2-\varphi_3)+R_y\rho(x_2\sin\varphi_3-x_3\sin\varphi_2)+R_z\rho(x_3\cos\varphi_2-x_2\sin\varphi_3)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Выражение для коэффициентов и свободного члена уравнения (4.1) для $i = 2, 3$ получаются из равенств (4.8) заменой индекса 1 на соответствующий индекс i и наоборот.

Отметим, что равенства (4.1) и (4.8) могут быть получены формально из уравнений равновесия (1.7)–(1.12) для случая $n = 3$. Однако приведенная выше схема вывода этих соотношений более прозрачна с точки зрения статики.

Из соотношений (4.1), (1.13) и (1.14) вытекают простые легко проверяемые необходимые условия равновесия и достаточные условия невозможности равновесия. Неравенства (1.13) и (1.14) определяют в пространстве переменных F_i, Φ_i и N_i полость конуса вращения K_i с вершиной в начале координат и осью, направленной вдоль координатной оси N_i, причем указанная полость расположена в полупространстве $N_i \geqslant 0$. Тангенс угла полураствора конуса K_i равен μ. Уравнение (4.1) представляет плоскость Π_i в пространстве переменных F_i, Φ_i и N_i. Так как при равновесии условия (1.13), (1.14) и (4.1) должны быть выполнены одновременно, непустота пересечения конуса K_i с плоскостью Π_i есть необходимое условие равновесия. Из геометрических соображений вытекает, что $K_i \cap \Pi_i \neq \varnothing$ только тогда, когда (1) плоскость Π_i пересекает ось N_i в точке $N_i \geqslant 0$ или (2) угол между плоскостью Π_i и осью N_i меньше угла полураствора конуса. Условие (1) аналитически выражается неравенством

$$b_i d_i \geqslant 0 \tag{4.9}$$

Косинус угла θ_i между плоскостью Π_i и осью N_i определяется равенством

$$\cos\theta_i = \sqrt{\frac{a_i^2+c_i^2}{a_i^2+b_i^2+c_i^2}} \tag{4.10}$$

Косинус угла ε_i полураствора конуса K_i есть

$$\cos\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \tag{4.11}$$

Поскольку косинус монотонно убывает на отрезке $[0, \pi/2]$, условие (2) эквивалентно неравенству $\cos\theta_i > \cos\varepsilon_i$. Подставляя в это неравенство выражения (4.10) и (4.11), получим

$$\mu\sqrt{a_i^2+c_i^2} > |b_i| \tag{4.12}$$

Если неравенства (4.9) и (4.12) одновременно невыполнены, т.е.

$$b_i d_i < 0, \quad \mu\sqrt{a_i^2+c_i^2} \leqslant |b_i| \tag{4.13}$$

то равновесие тела невозможно.

Неравенство (4.12) допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Оно означает, что модуль тангенса угла между плоскостью, проходящей через три точки контакта A_1, A_2, A_3, и нормалью к поверхности цилиндра в точке контакта A_i, меньше коэффициента трения μ.

Докажем это утверждение, для определенности, для точки A_1, положив без ограничения общности $x_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$. Из аналитической геометрии известно, что синус угла φ между плоскостью и прямой определяется соотношением $\sin\varphi = (\mathbf{n}, \mathbf{e})/|\mathbf{n}|$, где $\mathbf{n}$ – произвольный вектор, направленный по нормали к плоскости, а $\mathbf{e}$ – единичный направляющий вектор прямой. Соответственно, модуль тангенса угла φ равен

$$|\operatorname{tg}\varphi| = \frac{|\sin\varphi|}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \frac{|\mathbf{n}||\mathbf{e}|}{\sqrt{\mathbf{n}^2 - (\mathbf{n},\mathbf{e})^2}} \tag{4.14}$$

В качестве вектора $\mathbf{n}$ для плоскости, проходящей через точки A_1, A_2 и A_3, можно взять векторное произведение $(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)$, где $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$ – радиусы-векторы соответствующих точек, определенные в (1.6). Вычислив это векторное произведение в системе координат $OXYZ$, будем иметь

$$\mathbf{n} = \begin{Vmatrix} a \\ b \\ c \end{Vmatrix} = \rho \begin{Vmatrix} \rho(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_3 + \sin(\varphi_3 - \varphi_2)) \\ x_3\sin\varphi_2 - x_2\sin\varphi_3 \\ x_3 - x_2 + x_2\cos\varphi_3 - x_3\cos\varphi_2 \end{Vmatrix} \tag{4.15}$$

Единичный вектор нормали к цилиндрической поверхности в точке A_1 есть

$$\mathbf{e} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \tag{4.16}$$

Сравнивая выражения (4.15) и (4.8) при $x_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$, получим соотношения

$$a = a_1,\ \ b = -b_1,\ \ c = c_1 \tag{4.17}$$

Подстановка (4.15) и (4.16) в (4.14) с учетом равенств (4.17) дает

$$|\operatorname{tg}\varphi| = \frac{|b_1|}{\sqrt{a_1^2 + c_1^2}} \tag{4.18}$$

Из (4.18) и (4.12) вытекает неравенство $|\operatorname{tg}\varphi| < \mu$. Утверждение доказано.

На основе необходимых условий равновесия в форме неравенств (4.9) или (4.12) и результатов п. 2 можно построить алгоритм исследования возможности равновесия тела при трех точках контакта с поверхностью цилиндра. При изложении алгоритма будем без ограничения общности считать, что одна из точек контакта (для определенности, A_1) лежит на оси OY, т.е. $x_1 = 0$ и $\varphi_1 = 0$. Сначала нужно проверить выполнение неравенств (4.9) или (4.12) для всех трех точек контакта. Если хотя бы для одной точки эти неравенства невыполнены, т.е. имеют место неравенства (4.13), то равновесие невозможно.

Пусть необходимые условия равновесия выполнены. Выделим одну из точек контакта (для определенности, A_3) и зададим совокупность компонент F_3, N_3 и Φ_3 силы реакции, удовлетворяющих равенству (4.1) и неравенствам (1.13) и (1.14). Такая совокупность существует в силу необходимых условий равновесия. Перепишем уравнения равновесия (1.7)–(1.12) для $n = 3$ в виде

$$F_1 + F_2 = -\tilde{R}_x$$

$$N_1 + N_2\cos\varphi_2 + \Phi_2\sin\varphi_2 = \tilde{R}_y$$

$$N_2\sin\varphi_2 - \Phi_1 - \Phi_2\cos\varphi_2 = \tilde{R}_z \tag{4.19}$$

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1 + \Phi_2 = -\tilde{M}_x / \rho \\
&\rho F_2 \sin\varphi_2 + x_2(N_2 \sin\varphi_2 - \Phi_2 \cos\varphi_2) = -\tilde{M}_y \\
&\rho(F_1 + F_2 \cos\varphi_2) + x_2(N_2 \cos\varphi_2 + \Phi_2 \sin\varphi_2) = \tilde{M}_z \\
&\tilde{R}_x = R_x + F_3 \\
&\tilde{R}_y = R_y - N_3 \cos\varphi_3 - \Phi_3 \sin\varphi_3 \\
&\tilde{R}_z = R_z - N_3 \sin\varphi_3 + \Phi_3 \cos\varphi_3 \\
&\tilde{M}_x = M_x + \rho\Phi_3 \\
&\tilde{M}_y = M_y + \rho F_3 \sin\varphi_3 + x_3(N_3 \sin\varphi_3 - \Phi_3 \cos\varphi_3) \\
&\tilde{M}_z = M_z - \rho F_3 \cos\varphi_3 - x_3(N_3 \cos\varphi_3 + \Phi_3 \sin\varphi_3)
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Уравнения (4.19) отличаются от уравнений (2.1)–(2.6), отвечающих равновесию тела при двух точках контакта с поверхностью цилиндра, только тем, что вместо компонент главного вектора и главного момента активных сил в правых частях уравнений (4.19) стоят величины $\tilde{R}_x, \tilde{R}_y, \tilde{R}_z, \tilde{M}_x, \tilde{M}_y, \tilde{M}_z$, определяемые соотношениями (4.20). Указанные величины суть компоненты главного вектора и главного момента системы сил, состоящей из активных сил и заданной силы реакции в точке A_3.

Применим к уравнениям (4.19) алгоритм исследования возможности равновесия при двух точках контакта тела с поверхностью цилиндра, описанный в п. 2. Если окажется, что при заданных F_3, N_3 и Φ_3 существуют F_i, N_i и Φ_i, удовлетворяющие для $i = 1,2$ системе уравнений (4.19) и неравенств (1.13) и (1.14), то возможность равновесия при данном расположении точек контакта установлена. В противном случае нужно взять другие значения допустимых (удовлетворяющих равенству (4.1) и неравенствам (1.13) и (1.14)) F_3, N_3 и Φ_3 и повторить анализ возможности равновесия при двух точках контакта. Если окажется, что при всех допустимых значениях F_3, N_3 и Φ_3 не существует значений F_i, N_i и Φ_i, удовлетворяющих для $i = 1, 2$ системе уравнений (4.19) и неравенств (1.13) и (1.14), то равновесие тела при данном расположении точек контакта невозможно. Отметим, что при применении алгоритма, описанного в п. 2, к системе уравнений (4.19) не нужно проверять условия вида (2.26), обеспечивающие совместность указанных уравнений. Так как величины F_3, N_3 и Φ_3 удовлетворяют равенству (4.1) при $n = 3$, момент, создаваемый активными силами и силой реакции $\mathbf{P}_3$ относительно оси A_1A_2, равен нулю, а это и есть условие совместности системы уравнений (4.19).

Отметим также, что организация рационального перебора допустимых значений F_3, N_3 и Φ_3 требует отдельного рассмотрения и в данной статье не обсуждается.

5. Заключение. В данной статье получены необходимые и достаточные условия возможности равновесия абсолютно твердого тела, опирающегося двумя точками на шероховатую внутреннюю поверхность цилиндра, а также необходимые условия равновесия при трех точках контакта. Кроме того, предложена схема полного анализа возможности равновесия при трех точках контакта, заданным образом расположенных на поверхности цилиндра. Если для заданных активных сил равновесие тела возможно при некотором числе n точек контакта, определенным образом расположенных на поверхности цилиндра, то оно возможно и при любом числе точек контакта, превышающем n, при условии, что расположение указанных n точек не меняется. Это вытекает из того, что в частности равновесие имеет место при нулевых силах реакции в "новых" точках контакта. Отмеченный факт обусловливает важность исследования равновесия твердого тела, опирающегося на шероховатую внутреннюю поверхность цилиндра, при малом числе точек контакта, в частности при $n = 2$ и $n = 3$. В этих случаях схема исследования сравнительно проста. С увеличением числа точек контакта сложность полного исследования сильно возрастает.

При $n = 2$ равновесие возможно только тогда, когда момент активных сил относительно прямой, проходящей через точки контакта, равен нулю. Это означает, что равновесие при двух точках контакта неустойчиво по отношению к возмущениям активных сил. Отмеченную неустойчивость можно устранить, введя соответствующим образом расположенную третью точку контакта.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-01142).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л.* Оптимизация параметров шагающего робота для движения в трубах // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 27–41.
2. *Болотник Н.Н., Костин Г.В., Черноусько Ф.Л.* Моделирование и оптимизация движения шагающего робота в трубе // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 3. С. 176–191.
3. *Болотник Н.Н., Кумакшев С.А.* О максимизации статической силы, развиваемой двузвенной ногой шагающего аппарата // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 5. С. 53–71.
4. *Голубев Ю.Ф., Мелкумова Е.В.* Условия статической устойчивости шагающего аппарата в горизонтальном цилиндре и на двух плоскостях // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 2. С. 116–122.

Москва

Поступила в редакцию
2.12.1998