МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2000

УДК 531.36

© 2000 г. А.В. КАРАПЕТЯН, И.С. ЛАГУТИНА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ВОЛЧКА, ПОДВЕШЕННОГО НА СТРУНЕ, С УЧЕТОМ ДИССИПАТИВНОГО И ПОСТОЯННОГО МОМЕНТОВ

Изучается влияние диссипативного и постоянного моментов на устойчивость вертикальных вращений осесимметричного твердого тела, подвешенного на струне.

1. Рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого динамически симметричного тела, подвешенного к неподвижной точке O с помощью жесткой невесомой струны. Предположим, что точка S крепления струны к телу лежит на его оси симметрии. Расстояние между точкой S и центром масс тела C обозначим через a, а длину струны SO – через b.

Пусть $Cx_1x_2x_3$ – главные центральные оси инерции тела, $\mathbf{k}$ – единичный вектор оси симметрии Cx_3, $\mathbf{e}$ – единичный вектор направления струны, $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор восходящей вертикали, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела, m – масса тела, g – ускорение свободного падения, $\mathbf{J} = \operatorname{diag}(J_1, J_1, J_3)$ – центральный тензор инерции тела. Предположим, что на тело помимо сил тяжести действуют диссипативный момент $\mathbf{M}_d = -f\mathbf{D}\boldsymbol{\omega}$ ($\mathbf{D} = \operatorname{diag}(D_1, D_1, D_3)$; $D_1 > 0$, $D_3 > 0$, $f > 0$ – постоянные) и постоянный момент $\mathbf{M}_p = -fP\boldsymbol{\gamma}$ (P – произвольная постоянная). При $f = 0$ рассматриваемая задача переходит в хорошо изученную задачу о движении симметричного тела, подвешенного на струне, в однородном поле сил тяжести [1] – [4].

Уравнения движения тела отнесем к его главным центральным осям инерции (ср. с [3]):

$$-mb(\ddot{\mathbf{e}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{e}}) - mb\boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) + ma\mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + ma\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\omega}) = -mg\boldsymbol{\gamma} + N\mathbf{e} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = Na\mathbf{k} \times \mathbf{e} + fP\boldsymbol{\gamma} - f\mathbf{D}\boldsymbol{\omega} \quad (1.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0 \quad (1.3)$$

$$(\dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e}) = 0 \quad (1.4)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) выражают теоремы об изменении соответственно импульса и кинетического момента тела (N натяжение струны), уравнение (1.3) – условие постоянства вектора $\boldsymbol{\gamma}$ в инерциальной системе отсчета, а уравнение (1.4) – условие единичности вектора $\mathbf{e}$. Система (1.1)–(1.4) замкнута относительно переменных $\mathbf{e}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$, N.

Эта система допускает тривиальные решения

$$\mathbf{e} = \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}, \quad N = mg \quad \left(\omega = \frac{P}{D_3}\right) \quad (1.5)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{e} = -\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}, \quad N = mg \quad \left(\omega = \frac{P}{D_3}\right) \quad (1.6)$$

которые отвечают вертикальным вращениям тела при условии, что центр масс тела находится ниже (для решения (1.5)) или выше (для решения (1.6)) точки крепления струны к телу. Очевидно, решение (1.6) формально получается из решения (1.5) при замене a на $-a$. Поэтому ограничимся исследованием устойчивости решения (1.5), которое в проекциях на главные центральные оси инерции тела имеет вид

$$e_1 = e_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad e_3 = \gamma_3 = 1, \quad \omega_3 = \omega, \quad N = mg \tag{1.7}$$

2. Полагая в возмущенном движении $\gamma_3 = 1 + x$, $\omega_3 = \omega + y$, $e_3 = 1 + z$, $N = mg + \nu$ и оставляя для остальных переменных их прежние обозначения, выпишем линеаризованные уравнения возмущенного движения, предварительно исключив из них переменные z и ν с помощью уравнения (1.4) и третьего уравнения подсистемы (1.1). В результате получим

$$\begin{aligned} &mb\ddot{e}_1 + m(g - b\omega^2)e_1 - 2mb\omega\dot{e}_2 + m(a+b)\omega\omega_1 + \\ &\qquad\qquad + m(a+b)\dot{\omega}_2 - mg\gamma_1 = 0 \\ &mb\ddot{e}_2 + m(g - b\omega^2)e_2 + 2mb\omega\dot{e}_1 + m(a+b)\omega\omega_2 - \\ &\qquad\qquad - m(a+b)\dot{\omega}_1 - mg\gamma_2 = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} &J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1)\omega\omega_2 + fD_1\omega_1 + mgae_2 - fP\gamma_1 = 0 \\ &J_1\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega\omega_1 + fD_1\omega_2 - mgae_1 - fP\gamma_2 = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} &\dot{\gamma}_1 + \omega_2 - \omega\gamma_2 = 0 \\ &\dot{\gamma}_2 - \omega_1 + \omega\gamma_1 = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &J_3\dot{y} + fD_3y - fPx = 0 \\ &\dot{x} = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Очевидно, система уравнений (2.1)–(2.3) отделяется от системы (2.4), причем характеристическое уравнение последней $\lambda(J_3\lambda + fD_3) = 0$ имеет один нулевой и один отрицательный корень. Нулевой корень связан с наличием геометрического интеграла $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$, поэтому устойчивость решения (1.5) зависит только от корней характеристического уравнения, отвечающего системе (2.1)–(2.3). Исключая из уравнений (2.1) и (2.2) переменные ω_1 и ω_2 с помощью уравнения (2.3), приведем эту систему к виду (с учетом того, что $P = D_3\omega$):

$$\begin{aligned} &mb\ddot{e}_1 + m(g - b\omega^2)e_1 - 2mb\omega\dot{e}_2 - m(a+b)\ddot{\gamma}_1 + \\ &\qquad\qquad + m[(a+b)\omega^2 - g]\gamma_1 + 2m(a+b)\omega\dot{\gamma}_2 = 0 \\ &mb\ddot{e}_2 + m(g - b\omega^2)e_2 + 2mb\omega\dot{e}_1 - m(a+b)\ddot{\gamma}_2 + \\ &\qquad\qquad + m[(a+b)\omega^2 - g]\gamma_2 - 2m(a+b)\omega\dot{\gamma}_1 = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} &J_1\ddot{\gamma}_1 + fD_1\dot{\gamma}_1 + (J_3 - J_1)\omega^2\gamma_1 + (J_3 - 2J_1)\omega\dot{\gamma}_2 - \\ &\qquad\qquad - f(D_1 - D_3)\omega\gamma_2 + mgae_1 = 0 \\ &J_1\ddot{\gamma}_2 + fD_1\dot{\gamma}_2 + (J_3 - J_1)\omega^2\gamma_2 - (J_3 - 2J_1)\omega\dot{\gamma}_1 + \\ &\qquad\qquad + f(D_1 - D_3)\omega\gamma_1 + mgae_2 = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Заметим, что при $b = 0$ из системы (2.5) следует, что

$$ge_1 = a[\ddot{\gamma}_1 - (\omega^2 - g/a)\gamma_1 - 2\omega\dot{\gamma}_2], \quad ge_2 = a[\ddot{\gamma}_2 - (\omega^2 - g/a)\gamma_2 - 2\omega\dot{\gamma}_1] \tag{2.7}$$

При этом система (2.6) с учетом соотношений (2.7) принимает (с точностью до обозначений) вид, указанный и исследованный в [5].

Сделаем замену переменных

$$e_1 = \varepsilon_1 + (a/b+1)\gamma_1, \quad e_2 = \varepsilon_2 + (a/b+1)\gamma_2$$

и умножим каждое уравнение системы (2.5) на b. В результате получим

$$\begin{aligned} &mb^2\ddot{\varepsilon}_1 + mb(g-b\omega^2)\varepsilon_1 + 2mb^2\omega\dot{\varepsilon}_2 + mga\gamma_1 = 0 \\ &mb^2\ddot{\varepsilon}_2 + mb(g-b\omega^2)\varepsilon_2 - 2mb^2\omega\dot{\varepsilon}_1 + mga\gamma_2 = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} &J_1\ddot{\gamma}_1 + fD_1\dot{\gamma}_1 + [(J_3 - J_1)\omega^2 + mga(a/b+1)]\gamma_1 + \\ &\qquad + (J_3 - 2J_1)\omega\dot{\gamma}_2 - f(D_1 - D_3)\omega\gamma_2 + mga\varepsilon_1 = 0 \\ &J_1\ddot{\gamma}_2 + fD_1\dot{\gamma}_2 + [(J_3 - J_1)\omega^2 + mga(a/b+1)]\gamma_2 - \\ &\qquad - (J_3 - 2J_1)\omega\dot{\gamma}_1 + f(D_1 - D_3)\omega\gamma_1 + mga\varepsilon_2 = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Уравнения (2.8), (2.9) описывают движение линейной механической системы с четырьмя степенями свободы, находящейся под действием диссипативных, гироскопических, потенциальных и собственно-неконсервативных сил. Последних не будет только при $D_1 = D_3$.

Заметим, что диссипативная функция Релея этой системы имеет вид $\frac{1}{2} fD_1(\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2)$ и не является определенно положительной по всем скоростям $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2$. Тем не менее, диссипация является полной, поскольку при $\dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = 0$ переменные γ_1 и γ_2 постоянны, при этом из системы (2.9) следует, что переменные ε_1 и ε_2 тоже постоянны, т.е. диссипативные силы обращаются в нуль только в положениях равновесия системы (2.8), (2.9). Учитывая, что определитель матрицы позиционных сил, действующих на эту систему

$$\{m^2a^2g^2 + [(J_3 - J_1)\omega^2 + mga(a/b+1)]b(g-b\omega^2)\}^2 + b^2f^2(D_1 - D_3)^2(g-b\omega^2)^2$$

не равен нулю, заключаем, что диссипативные силы обращаются в нуль только на невозмущенном движении.

3. Умножая вторые уравнения систем (2.8) и (2.9) на $i = \sqrt{-1}$, складывая полученные уравнения с соответствующими первыми уравнениями этих систем и вводя новые переменные

$$\mathrm{E} = (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)e^{i\omega t}, \quad \Gamma = (\gamma_1 + i\gamma_2)e^{i\omega t},$$

имеем

$$mb^2\ddot{\mathrm{E}} + mgb\mathrm{E} + mga\Gamma = 0 \tag{3.1}$$

$$J_1\ddot{\Gamma} + (fD_1 - J_3\omega i)\dot{\Gamma} + [mga(a/b+1) - ifD_3\omega]\Gamma + mga\mathrm{E} = 0 \tag{3.2}$$

Характеристическое уравнение системы (3.1), (3.2) имеет вид

$$mga[(b+a)\lambda^2 + g] + (b\lambda^2 + g)[J_1\lambda^2 + (fD_1 - J_3\omega i)\lambda - ifD_3\omega] = 0 \tag{3.3}$$

Если все корни уравнения (3.3) имеют отрицательные вещественные части (по крайней мере один корень уравнения (3.3) имеет положительную вещественную часть), то тем же свойством обладают корни характеристического уравнения, отвечающего системе (2.1)–(2.3).

Условия отрицательности вещественных частей корней уравнения (3.3) определяют область устойчивости решения (1.5). На границе области устойчивости это уравнение имеет чисто мнимый корень $\lambda = i\Omega$. При этом (3.3) переходит в

$$mga[g-(b+a)\Omega^2]+(g-b\Omega^2)\Omega(J_3\omega - J_1\Omega)+if(g-b\Omega^2)(D_1\Omega - D_3\omega)=0 \qquad (3.4)$$

Из мнимой части соотношения (3.4) следует, что $\Omega_1 = D_3/D_1\omega$, $\Omega_{2,3}=\pm\sqrt{g/b}$. Таким образом, граница области устойчивости определяется соотношениями

$$(g-b\omega^2D_3^2/D_1^2)(mga-\omega^2(J_1D_3-J_3D_1)D_3/D_1^2)-mga^2\omega^2D_3^2/D_1^2=0, \quad -mg^2a^2/b=0$$

Учитывая, что при $a>0$, $b>0$ и $\omega=0$ решение (1.5) (равновесие) заведомо устойчиво (см. (3.3)), причем b – длина струны – всегда больше нуля, заключаем, что условие устойчивости решения (1.5) имеет вид

$$I\xi^2-(I+mab+ma^2)\xi+mab>0 \qquad (3.5)$$

Здесь $I=J_1-J_3D_1/D_3$, $\xi=(D_3/D_1)^2\omega^2b/g \geqslant 0$. Итак, равномерные вращения волчка, подвешенного на струне, при условии, что его центр масс занимает наинизшее положение, устойчивы при выполнении условия (3.5), накладывающего ограничения на величину (ω^2) угловой скорости.

Если $I\neq 0$, то левая часть неравенства (3.5) обращается в нуль при $\xi=\xi_{1,2}$, где

$$\xi_{1,2}=\frac{I+ma(a+b)\pm\sqrt{I^2+2Ima(a-b)+[ma(a+b)]^2}}{2I}$$

(знак плюс соответствует величине ξ_1, а знак минус – величине ξ_2). При $I>0$ имеем $\xi_1>\xi_2>0$ и неравенство (3.5) выполняется при $0\leqslant\xi<\xi_2$ и $\xi>\xi_1$. При $I<0$, имеем $\xi_1<0<\xi_2$ и неравенство (3.5) выполняется лишь при $0\leqslant\xi<\xi_2$ (напомним, что $\xi\geqslant 0$). Если же $I=0$, то неравенство (3.5) выполняется только при $0<\xi<b/(a+b)$. Заметим, что $b/(b+a)=\lim\xi_2$ при $I\to 0$.

Как уже отмечалось, для изучения устойчивости решения (1.6) достаточно воспользоваться проведенным исследованием решения (1.5), заменив во всех формулах a на $-a$. Таким образом, равномерные вращения волчка, подвешенного на струне, при условии, что его центр масс находится выше точки крепления струны к телу, устойчивы при выполнении условия

$$I\xi^2-(I+ma^2-mab)\xi-mab>0 \qquad (3.6)$$

Если $I\neq 0$, то левая часть неравенства (3.6) обращается в нуль при $\xi=\xi_{3,4}$, где

$$\xi_{3,4}=\frac{I+ma(a-b)\pm\sqrt{I^2+2Ima(a+b)+[ma(a-b)]^2}}{2I}$$

(знак плюс соответствует величине ξ_3, а знак минус – величине ξ_4). При $I>0$, имеем $\xi_4<0<\xi_3$ и неравенство (3.6) выполняется при $\xi>\xi_3$. При $I<0$ следует различать два случая: если $ma(b-a)-I>2\sqrt{-Imab}$, то $\xi_3>\xi_4>0$ и неравенство (3.6) выполняется при $\xi_3>\xi>\xi_4$; если же $ma(b-a)-I<2\sqrt{-Imab}$, то неравенство (3.6) не выполняется при любом $\xi\geqslant 0$. При $I=0$ также следует различать два случая: если $b>a$ (центр масс волчка находится ниже неподвижной точки), то неравенство (3.6) выполняется при $\xi>b/(b-a)$; если же $b\leqslant a$ (центр масс волчка находится не ниже неподвижной точки), то неравенство (3.6) не выполняется при любом $\xi\geqslant 0$. Заметим, что $b/(b-a)=\lim\xi_3$ при $I\to 0$ ($b>a$).

Отметим, что знак выражения I совпадает со знаком выражения $J_1D_3-J_3D_1$, причем от последнего существенно зависит устойчивость вертикальных вращений волчка Лагранжа (случай $b=0$) при наличии диссипативного и постоянного моментов [5], а случай $l = 0$ соответствует предположению о пропорциональности диссипативной функции Релея и кинетической энергии вращательных движений волчка.

4. Итак, равномерные вращения волчка, подвешенного на струне, вокруг вертикально расположенной оси симметрии при вертикальном расположении струны в случае, когда центр масс волчка находится ниже точки крепления струны к телу (решение (1.5)) всегда устойчивы, если угловая скорость достаточно мала ($\omega^2 < \omega_*^2$). Кроме того, эти вращения устойчивы при условии, что $J_1D_3 - J_3D_1 > 0$, если угловая скорость достаточно велика ($\omega^2 > \omega^{*^2}$). Во всех остальных случаях ($\omega^2 \in (\omega_*^2; \omega^{*^2})$ для $J_1D_3 - J_3D_1 > 0$ или $\omega^2 > \omega_*^2$ для $J_1D_3 - J_3D_1 \leqslant 0$) эти вращения неустойчивы.

Равномерные вращения волчка в случае, когда центр масс волчка находится выше точки крепления струны к телу (решение (1.6)) устойчивы при условии, что $J_1D_3 - J_3D_1 > 0$ или $J_1D_3 - J_3D_1 = 0$ и $b > a$, если угловая скорость достаточно велика ($\omega^2 > \omega^{**^2}$), а также при условии, что $(J_1D_3 - J_3D_1) < -D_3ma(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ или $-D_3ma(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 < (J_1D_3 - J_3D_1) < 0$ и $a < b$, если угловая скорость ограничена как снизу, так и сверху ($\omega_{**}^2 < \omega^2 < \omega^{**^2}$).

Здесь $\omega_*^2 = \xi_2 G, \omega^{*^2} = \xi_1 G, \omega_{**}^2 = \xi_4 G, \omega^{**^2} = \xi_3 G, G = (g/b)(D_1/D_3)^2$.

Будем говорить, что при $J_1D_3 - J_3D_1 > 0$ рассмотренные диссипативный и постоянный моменты обладают восстанавливающим свойством, а при $J_1D_3 - J_3D_1 < 0$ – опрокидывающим. Любопытно, что даже в случае восстанавливающего свойства этих моментов, существует интервал угловых скоростей $(\omega_*^2; \omega^{*^2})$, для которых вертикальные вращения волчка с наинизшим положением центра масс неустойчивы, а в случае опрокидывающего свойства этих моментов существует интервал угловых скоростей $(\omega_{**}^2; \omega^{**^2})$, для которых вращения волчка с наивысшим (по отношению к точке крепления струны к телу) положением центра масс устойчивы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 96-15-96051 и 98-01-00041).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю., Малашенко С.В., Стороженко В.А., Темченко М.Е., Шишкин П.Г.* О стационарных движениях подвешенного на струне твердого тела при вертикальном расположении одной из его главных центральных осей инерции // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 2. С. 34–45.
2. *Румянцев В.В.* К динамике твердого тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 5–15.
3. *Рубановский В.Н.* Об устойчивости вертикального вращения твердого тела, подвешенного на стержне // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1985. С. 40–53.
4. *Рубановский В.Н.* Перманентные вращения и относительные равновесия тела, подвешенного на стержне, их ветвление и устойчивость // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1986. С. 19–34.
5. *Карапетян А.В., Лагутина И.С.* О влиянии диссипативного и постоянного моментов на вид и устойчивость стационарных движений волчка Лагранжа // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 5. С. 29–33.

Москва

Поступила в редакцию
1.12.1998