МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2000

УДК 531.3

© 2000 г. С.Е. ПЕРЕЛЯЕВ

НОВЫЙ КОМБИНИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматривается и исследуется новый комбинированный алгоритм определения произвольного углового положения твердого тела в трехмерном евклидовом пространстве. Дается описание алгоритма применительно к специализированному цифровому процессору, функционирующему в реальном масштабе времени. Рассматриваемый алгоритм использует двухскоростной режим работы. Высокочастотные конические движения и детерминированные синусоидальные вибрации рассчитываются с помощью высокоскоростного вычислительного цикла, основу которого составляет способ трехмерной параметризации Кэли [1].

Ориентация твердого тела в пространстве рассчитывается с помощью алгоритма, основу которого составляет способ шестимерной параметризации [1]. Эта процедура выполняется с тактовой частотой на порядок меньшей высокоскоростного алгоритма. Новый алгоритм определения произвольного углового положения твердого тела, основанный на алгоритмической интеграции способов трехмерной параметризации Кэли и модифицированной шестимерной параметризации, позволяет рассчитывать с высокой точностью и взаимнооднозначно ориентацию объекта во всем диапазоне изменения углов Эйлера – Крылова (без сингулярностей).

Методом математического моделирования новый алгоритм сравнивается с комбинированным алгоритмом, основанным на интеграции методов трехмерной параметризации Эйлера–Лэнинга–Бортца [2–4] и определения ориентации с помощью матрицы направляющих косинусов [5] или кватернионов единичной длины [6, 7]. Точность предлагаемого алгоритма превышает в два – три раза все известные отечественные и зарубежные алгоритмы, реализованные в современных бескарданных (бесплатформенных) инерциальных системах навигации и наведения (БИНС).

1. Введение. Бескарданные инерциальные системы навигации и наведения (в дальнейшем БИНС) представляют собой разновидность инерциальных систем аналитического типа [5–8]. В БИНС функционирование прецизионного следящего устройства (гиростабилизированной платформы), обеспечивающего измерение вектора кажущегося ускорения в опорной (навигационной) системе координат, заменено решением кинематических дифференциальных уравнений вида Эйлера – Пуассона [3, 7–9]. Эти уравнения описывают вращение твердого тела в инерциальном пространстве.

Очевидно, что непременной принадлежностью аналитической "платформы" является процедура определения параметров ориентации – совокупности кинематических параметров, характеризующих положение в пространстве координатного трехгранника, связанного с твердым телом.

Принцип действия БИНС известен более 60-ти лет [10], хотя в завершенном виде основные аналитические зависимости для обработки данных инерциальных датчиков были представлены в конце 50-х и начале 60-х гг. Возможность построения подвижной и неподвижной аналитической "платформы" достаточно полно и хорошо обоснована в отечественных и зарубежных публикациях и монографиях [5–11]. Однако для реализации этой возможности, наряду с совершенствованием бортовой вычислительной техники, необходима разработка принципиально новых алгоритмов определения ориентации твердого тела. Они должны быть пригодными для использования информации, поступающей в темпе реального времени от инерциальных датчиков БИНС и предъявлять менее жесткие требования к характеристикам бортового вычислителя системы по быстродействию, объему памяти, длине разрядной сетки и т.д. [5, 6].

Реализация основных уравнений БИНС в бортовом вычислителе системы неизменно ограничивалась его вычислительными возможностями и пропускной способностью. В результате многие вычислительные алгоритмы БИНС, появившиеся на первом этапе реализации аналитических ИНС, были недостаточно точными, особенно при действии высокочастотных динамических возмущений (вибраций).

Классическим приемом проверки точности бортового алгоритма является расчет параметров ориентации при циклическом коническом движении основания БИНС с изменением частоты, вплоть до тактовой частоты бортового вычисления [5, 6].

Ошибки, обусловленные вибрацией, коническим и колебательным движениями основания объекта необходимо компенсировать в реальном масштабе времени. Однако если компенсация произведена недостаточно точно, то добавочная угловая скорость конического (coning.) движения (прецессии) даст ошибочный результат в виде вращения или дрейфа относительно оси конического движения [5, 6, 12].

В конце 60-х – начале 70-х годов были сделаны некоторые попытки, направленные на разделение процесса вычисления в БИНС на высоко- и низкоскоростные алгоритмы [4, 13]. Низкоскоростная часть алгоритма содержала самый большой объем вычислений (основные уравнения ориентации и навигации) и была предназначена для определения углового положения объекта с учетом низкочастотных динамических воздействий с большой амплитудой (вызванные маневрированием объекта). Высокоскоростная часть вычислительного процесса содержала относительно небольшой объем простейших алгоритмов. Они предназначались для определения высокочастотных динамических воздействий с малой амплитудой (вызванные вибрацией корпуса, коническими и колебательными движениями объекта).

Разделение вычислительного процесса позволило выполнять довольно сложные алгоритмы с приемлемой тактовой частотой, определяемой ограничением пропускной способности вычислителя [4, 14]. Высокоскоростные алгоритмы на этом этапе развития БИНС были относительно простые, поэтому они реализовывались с помощью специализированных электронных устройств или как высокоскоростной контур основного процессора бескарданной (бесплатформенной) ИНС.

Для определения ориентации объекта можно использовать различные параметры. Чаще всего для этой цели применяются следующие параметры: углы Эйлера, Эйлера – Крылова [3, 7], параметры Родрига – Кэли, Эйлера, кватернионы, Кэли – Клейна [5–9] и направляющие косинусы [7–10].

Совокупность трехмерных параметров – углы Эйлера, их модификации и параметры Родрига – Кэли имеют ограниченную область применения.

Наиболее широкое применение в алгоритмах ориентации современных БИНС нашли направляющие косинусы и кватернионы единичной длины [7–9, 14–16], так как они не имеют особых точек (сингулярностей).

За последние два десятилетия развитие алгоритмов БИНС пришло к классической двухскоростной структуре, а аналитические способы оценки развиты настолько, что известные математические методы можно использовать для предварительной оценки погрешностей каждого конкретного алгоритма [14–16]. При этом имеется возможность выбора вычислительных скоростей бортового процессора необходимых для достижения требуемого уровня точности при заданных динамических возмущениях.

Развитие микроэлектроники, появление сверхбыстродействующих специализированных микропроцессоров обработки сигналов и значительное увеличение их производительности позволяет возлагать на высокоскоростную часть алгоритма БИНС более сложные и точные вычислительные процедуры.

В частности, в алгоритмах всех современных БИНС [7, 14–16] реализовано векторное кинематическое дифференциальное уравнение Эйлера – Бортца, которое получено в 1971 г. Дж. Бортцем в работе [7]. Однако следует отметить, что значительно раньше его в 1949 г. это сделал Дж. Лэнинг, а в 1964 г. – Дж. Стьюельпнагель получил матричную форму записи этого кинематического дифференциального уравнения [1].

2. Алгоритм определения элементов матрицы направляющих косинусов. Для математического описания ориентации тела, движущегося относительно центра масс необходимо иметь два множества взаимно ортогональных векторов, или, что одно и то же, систем координат (триэдров).

Одна система координат подвижная, так как связана с движущимся твердым телом, другая "неподвижная" (инерциальная). Подвижный и неподвижный триэдры совпадают только в начальный момент времени ($t = 0$).

Матрицу направляющих косинусов (A) для определения пространственной ориентации объекта при его произвольном вращении можно определить путем обработки сигналов, например, интегрирующих гироскопических датчиков в бортовом вычислителе БИНС по классическому алгоритму вычисления A на рекуррентной основе [8, 14]:

$$C[m+1] = A[m]C[m] \tag{2.1}$$

где $C(m)$ – матрица направляющих косинусов, задающая положение осей объекта относительно навигационных осей во временном цикле "m"; $A(m)$ – матрица направляющих косинусов, соответствующая повороту тела, задаваемому вектором Эйлера $\boldsymbol{\phi}$ в быстром "m"-цикле вычислителя.

Матрица ортогонального преобразования A выражается через вектор $\boldsymbol{\phi}$ и угол эйлерова поворота следующим образом [14–16]:

$$A = \exp(\Phi) = E + [\Phi] + (1/2!)\cdot[\Phi]^2 + (1/3!)\cdot[\Phi]^3 + \ldots \tag{2.2}$$

где E – единичная (3×3) матрица; Φ – кососимметрическая матрица трех вещественных параметров Эйлера.

Рассматривая разложение матричной экспоненты в ряд можно получить следующее выражение [14, 16]:

$$A(m) = \exp[\Phi] = E + (\sin\boldsymbol{\phi}/\boldsymbol{\phi})[\Phi] + (1-\cos\boldsymbol{\phi})/\boldsymbol{\phi}^2[\Phi]^2 \tag{2.3}$$

где $\sin(\boldsymbol{\phi})/\boldsymbol{\phi} = f_1$; $(1-\cos\boldsymbol{\phi})/\boldsymbol{\phi}^2 = f_2$ – переменные трансцендентные функции; $\boldsymbol{\phi} = (\phi_X^2 + \phi_Y^2 + \phi_Z^2)^{1/2}$ – модуль вектора Эйлера; ϕ_X, ϕ_Y, ϕ_Z – компоненты этого вектора.

Вектор ориентации Эйлера $\boldsymbol{\phi}$, который вычисляется при решении кинематического уравнения Эйлера – Лэнинга – Бортца, интересен тем, что по нему можно непосредственно определить кососимметрическую матрицу Φ (3×3) параметров расположения Эйлера [15]:

$$[\Phi] = \phi_X\sigma_1 + \phi_Y\sigma_2 + \phi_Z\sigma_3 \tag{2.4}$$

где σ_i ($i = 1, 3$) – спиновые (3×3) матрицы, след каждой матрицы равен нулю [15, 17].

Вектор ориентации Эйлера ($\boldsymbol{\phi}$) совпадает с осью эйлерова поворота. Величина его такова, что вращение системы координат твердого тела вокруг $\boldsymbol{\phi}$ на угол, равный длине вектора, будет соответствовать вращению системы координат объекта от положения в быстром "m"-цикле до положения в "$m+1$"-цикле вычислителя. Алгоритмы вычисления вектора $\boldsymbol{\phi}$ подробно рассмотрены в [14].

Кососимметрическая матрица параметров ориентации Эйлера равна

$$[\Phi]=\begin{Vmatrix} 0 & \phi_Z & -\phi_Y \\ -\phi_Z & 0 & \phi_X \\ \phi_Y & \phi_X & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.5}$$

Порядок алгоритма, принятого в уравнениях (2.1)–(2.3), определяется числом членов в разложении трансцендентных коэффициентов f_1, f_2.

Алгоритм пятого порядка, например, должен сохранять такое число членов в представлении f_1, f_2, чтобы матрица $A(m)$ содержала все произведения вектора $\boldsymbol{\phi}$ до пятого порядка включительно.

Необходимый порядок алгоритма определяется требованиями к точности системы при максимальной скорости поступления входных данных, то есть когда значение вектора $\boldsymbol{\phi}$ максимально. Поэтому скорость повторения рекуррентных процедур обычно выбирается такой, чтобы величина модуля $\boldsymbol{\phi}$ оставалась относительно небольшой при максимальной угловой скорости вращения объекта. В современных бортовых алгоритмах значение $|\boldsymbol{\phi}|$ обычно не превосходит 0,1 рад. [14]. Последнее означает, что необходимое число членов для получения заданной точности при разложении коэффициентов f_1, f_2 относительно небольшое.

3. Кватернионный алгоритм определения ориентации объекта. Задача преобразования координат успешно может быть решена и с привлечением математического аппарата кватернионов [7–9, 14, 15]. Понятие четырехмерных чисел – кватернионов было введено Гамильтоном в 1843 г. для описания углового движения твердого тела. Однако практическое применение в алгоритмах БИНС кватернионы получили только в конце 50-х, начале 60-х годов. Математический аппарат кватернионов детально исследован в известных отечественных и зарубежных публикациях и монографиях [7–9, 14–16].

Поэтому остановимся лишь на прикладных аспектах бортовой реализации кватернионного алгоритма ориентации. Скорость изменения кватерниона, меняющего свою пространственную ориентацию, задается следующим матричным кинематическим дифференциальным уравнением [1]:

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ -\omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Vmatrix} \tag{3.1}$$

В приращениях дифференциальное уравнение (3.1) может быть представлено в следующем рекуррентном виде:

$$q[m+1]=U[m]\cdot q[m] \tag{3.2}$$

где $U[m]$ – кватернионный оператор ориентации, соответствующий повороту тела, задаваемому вектором Эйлера $\boldsymbol{\phi}$ в быстром "m"-цикле вычислений; $\mathbf{q}[m]$ – кватернион, задающий положение осей объекта относительно триэдра выбранной навигационной системы координат в "m"-цикле вычислений.

Кватернионный оператор имеет следующее аналитическое выражение:

$$U[m]=\cos(\phi/2)+(\boldsymbol{\phi}/\phi)\sin(\phi/2) \tag{3.3}$$

где $\boldsymbol{\phi} = 0 + \phi_X i + \phi_Y j + \phi_Z k$ – выходные сигналы интегрирующего гироскопа, представленные в форме кватерниона; $\phi=(\phi_X^2+\phi_Y^2+\phi_Z^2)^{1/2}$ – модуль вектора.

Непосредственная реализация соотношения (3.3) затруднена, так как оно содержит трансцендентные функции. Поэтому при бортовой реализации оператора (3.3) прибегают к различным методам аппроксимации.

В частности, к представлению переменных трансцендентных коэффициентов $f_3 = \sin(\phi/2)$; $f_4 = \cos(\phi/2)$ отрезками ряда Тейлора. Следуя [14, 18], определим введенный выше кватернионный оператор $U[m]$ следующей аналитической зависимостью:

$$U[m] = \begin{Vmatrix} (\phi_X/\phi)\sin(\phi/2) \\ (\phi_Y/\phi)\sin(\phi/2) \\ (\phi_Z/\phi)\sin(\phi/2) \\ 1\cos(\phi/2) \end{Vmatrix} \quad (3.4)$$

где первые три элемента в матрице-столбце $U[m]$ относятся к векторным компонентам оператора U, а четвертый элемент – его скалярная часть.

Обычно при бортовой реализации аналитическое выражение (3.4) заменяют эквивалентным соотношением:

$$U[m] = \begin{Vmatrix} (\phi_X)f_3 \\ (\phi_Y)f_3 \\ (\phi_Z)f_3 \\ (1)f_4 \end{Vmatrix} \quad (3.5)$$

где трансцендентные коэффициенты f_3, f_4 аппроксимируются с помощью отрезков сходящегося ряда Тейлора

$$f_3 = \sin(\phi/2)/\phi = 0,5\{1-(0,5\phi)2/3!+(0,5\phi)4/5!-\ldots\} \quad (3.6)$$

$$f_4 = \cos(\phi/2) = 1-(0,5\phi)2/2!+(0,5\phi)4/4!-\ldots \quad (3.7)$$

Порядок выражений (3.2) и (3.5), определяющих алгоритм ориентации, зависит от степени разложений трансцендентных коэффициентов f_3, f_4.

Рациональность выбора алгоритмического порядка и скорости вычислений аналогична выбору порядка эквивалентного алгоритма направляющих косинусов, рассмотренного ренее.

4. Эквивалентность между направляющими косинусами и кватернионами. Аналитическое выражение ортогональной матрицы преобразования из подвижной системы координат в неподвижную или вращающуюся (с заданной угловой скоростью) через координаты кватерниона хорошо известно [7,9]. Выражения, связывающие направляющие косинусы с параметрами кватернионов, тоже идентичны. Поэтому можно считать эти параметры в некотором смысле эквивалентными [5,6].

Сравнение направляющих косинусов и параметров кватерниона в качестве основных способов определения углового положения твердого тела является предметом обсуждений между исследователями и проектировщиками БИНС последние 30–40 лет.

В начале таких исследований выбор того или иного метода определения ориентации твердого тела концентрировался на сравнительной оценке двух методов при произвольных угловых движениях объекта. Эти методы постоянно совершенствовались и развивались путем проверки точности решения кинематических дифференциальных уравнений, полученных с помощью направляющих косинусов и единичных кватернионов ориентации.

При этом сравнивались точностные характеристики эквивалентных алгоритмов для случая интегрирования этих уравнений в бортовом цифровом вычислителе при гипотетическом угловом движении объекта. Следует отметить, что такое вращение представляет собой коническое движение с частотой, отличающейся от тактовой частоты вычислителя БИНС.

В первых исследованиях было обнаружено, что в сравниваемых интегрирующих алгоритмах метод кватернионов позволяет получать решения уравнений ориентации, которые более точно повторяют действительное коническое движение. Это утверждение справедливо для всех случаев, когда частота конических движений не превышает тактовой частоты вычислителя.

Как уже отмечалось выше, в современных бескарданных системах наведения и навигации 80-х, 90-х годов оба алгоритма (направляющих косинусов и кватернионов единичной длины) основаны на определении пространственного положения объекта с промежуточным определением трех параметров вектора ориентации Эйлера [4,14–16,18].

Данный способ обеспечивает с приемлемой точностью оценку всех форм динамики углового движения твердого тела, включая его коническое движение [4, 14, 19]. При этом оба алгоритма позволяют получать довольно точные решения – определения угловых движений объекта при заданном значении вектора Эйлерова поворота. Следовательно, вопрос точности при различных угловых движениях объекта уже не требует широких исследований, но в то же время и не является окончательно закрытым. Поэтому рассматриваемая здесь задача выбора оптимальных параметров для описания угловой ориентации твердого тела может быть упрощена. Критериями, определяющими выбор тех или иных параметров, являются требования, предъявляемые к памяти и объему вычислений, а также достигаемая при этом точность.

Кроме того, необходимо учитывать что, существующие прецизионные инерциальные приборы, которые нашли широкое применение в точных и высокоточных БИНС, дают информацию не о проекциях абсолютной угловой скорости, а о приращениях "кажущихся" углов (псевдоуглов).

В современных публикациях [15, 16, 18, 20] отмечается, что алгоритм определения угловой ориентации на основе кватернионов положения несколько проще, чем подобный алгоритм с использованием матрицы направляющих косинусов. Это говорит о преимуществе по пропускной способности бортового вычислителя, в котором реализован метод кватернионов.

Действительно, при использовании этого способа необходимо постоянно определять только четыре переменные координаты единичного кватерниона, тогда как для матрицы направляющих косинусов в общем случае необходимо вычислять девять переменных параметров ориентации.

В реальных бортовых процедурах постоянно вычисляется только две строки матрицы направляющих косинусов (шесть элементов матрицы А), поскольку третья строка получается путем простого векторного произведения первых двух строк.

Кроме того, процесс ортогонализации и нормализации значительно проще выполнять для кватернионов, чем для направляющих косинусов. Хотя очевидно, что если вычислительные алгоритмы направляющих косинусов или кватернионов выполнены без погрешностей, то процедуры ортогонализации и нормализации вообще не требуются.

Также хорошо известно, что для получения заданной точности алгоритма ориентации БИНС необходимо, чтобы ошибки программно-математического обеспечения не превосходили инструментальных погрешностей инерциальных датчиков самой системы.

Поскольку современные бортовые вычислители общего назначения [14], которые используются в БИНС, способны выполнять алгоритмы определения углового положения объекта в пределах приемлемой пропускной способности и реального объема памяти, то коррекция ошибок нормализации не нужна. Следовательно, данное преимущество параметров кватерниона в сравнении с направляющими косинусами уже не так эффективно.

Кроме того, элементы матрицы направляющих косинусов обычно необходимы в реальном масштабе времени – для преобразования измеренных ускорений и/или скоростей в навигационную систему координат и определения традиционных углов Эйлера – Крылова (рысканья, тангажа и крена).

Поэтому при использовании кватернионного метода снижается пропускная способность и увеличивается загрузка оперативной памяти бортового вычислителя. Более того, для формирования свободного от шумов и помех ускорения объекта, которое необходимо в задачах начальной выставки и калибровки системы, требуется двойная точность вычислений.

В результате все вычислительные процедуры для метода кватернионов в сравнении с выражениями для элементов матрицы направляющих косинусов должны выполняться с двойной частотой. Последнее замечание также не в пользу более сложного алгоритма преобразования кватернионов в матрицу направляющих косинусов.

Исходя из сказанного выше, трудно сделать однозначное заключение о том, чему отдать предпочтение при выполнении расчетов по угловой ориентации в БИНС – направляющим косинусам или кватернионам. Есть много "за" и "против" по каждому из рассмотренному выше методу.

Количественные оценки, анализ реального программного обеспечения и расчета действительной вычислительной загрузки привели к одинаково неубедительным результатам [8, 14].

По этой причине в данной работе синтезирован и исследован новый комбинированный алгоритм вычисления пространственной ориентации твердого тела. Алгоритм построен по классической двухскоростной схеме.

Высокоскоростная часть вычислительных процедур базируется на решении кинематического дифференциального уравнения типа Риккати, матричная форма записи которого представлена в данной работе.

Низкоскоростная часть процедуры определения произвольной ориентации твердого тела базируется на методе модифицированной шестимерной параметризации, который был впервые предложен Дж. Стьюэльпнагелем [1] в 1964 году для описания метода пятимерной параметризации Х. Хопфа [21].

Алгоритмы интегрирования преобразованных ускорений с целью определения скорости и координат объекта в данной работе не рассматриваются, так как хорошо известно [14], что они являются общими для инерциальной системы любого типа и вида.

5. Алгоритмы бескарданного построителя вертикали и углов пространственной ориентации объекта. Свяжем с твердым телом правый ортогональный трехгранник $Oxyz$. Ориентация твердого тела определяется как положение одного трехгранника (триэдра) $Oxyz$ относительно другого $O\xi\eta\zeta$, принимаемого за неподвижный. При вращении происходит поворот подвижного триэдра относительно неподвижного. Поэтому, в большинстве практических случаев необходимо решить кинематическую задачу – определение ориентации твердого тела по известным проекциям вектора абсолютной угловой скорости [1]. Для этих целей применяются различные кинематические дифференциальные уравнения.

Использование несимметричных и нелинейных уравнений Эйлера, содержащих тригонометрические функции, затрудняет аналитические исследования и позволяет решить задачу с определенными ограничениями [7, 9, 22, 23]. В современных публикациях [7, 9, 15, 16, 18] исследуются уравнения, полученные на основании четырех симметричных параметров Эйлера (Гаусса, Родрига, Гамильтона, Кэли, Клейна), которые не имеют особых точек (математических сингулярностей). Однако метод четырех параметров не допускает взаимно-однозначного определения произвольного положения твердого тела, доказательство этого утверждения приведено в [22].

Применение уравнения Пуассона [7, 9, 22, 23], требующего интегрирования как минимум шести скалярных уравнений, позволяет решить кинематическую задачу без наличия сингулярных точек. Действительно уравнения, полученные с использованием направляющих косинусов линейные, не вырождаются при любом повороте твердого тела, но конечный результат представляется в виде направляющих косинусов. Поэтому для перехода к традиционным выходным параметрам (углам Эйлера – Крылова) направляющие косинусы требуют дополнительных преобразований.

Из публикаций [4,14] известно, что при наличии в векторе угловой скорости высокочастотной составляющей определение мгновенной (промежуточной) ориентации твердого тела (с целью компенсации детерминированных вибраций и возмущений) наиболее эффективно для трехмерных параметров.

Применение параметров ориентации, полученных на основе теории конечных поворотов, позволяет повысить полосу пропускания и обеспечивает высокую точность оценивания низкочастотных и высокочастотных возмущений и вибраций [4,14–16]. Поэтому при синтезе методов интегрирования кинематических уравнений оказывается эффективным решать на каждом шаге соотношения для некоторых промежуточных параметров [4], а затем уже непосредственно переходить к уравнению Эйлера, записанному в переменных Родрига-Гамильтона или в направляющих косинусах (в форме Пуассона).

При таком способе вычислений имеется реальная возможность выполнения основной части операций на шаге с малой разрядностью. Последнее утверждение связано с тем, что в качестве промежуточных, как правило, используются векторные параметры ориентации Эйлера [4, 5, 7, 9], у которых диапазон изменения переменных на шаге имеет тот же порядок, что и приращение квазикоординат (псевдоуглов) [14].

Действительно для однозначного определения положения в трехмерном пространстве достаточно трех независимых параметров, так как твердое тело с одной неподвижной точкой имеет три степени свободы.

При этом любая совокупность трехмерных параметров не требует дополнительных уравнений связи. Однако, уравнения определения ориентации, полученные на основе метода трех параметров, разрушаются в особых (сингулярных) точках [5, 6, 7, 9]. Информация об угловом положении в бескарданных системах навигации и наведения обычно формируется в виде направляющих косинусов и/или кватерниона углового положения.

Матрица направляющих косинусов – матрица (3 × 3), элементы которой представляют проекции навигационных осей на связанные оси объекта.

Переменные параметры такой матрицы можно непосредственно определять в бортовом вычислителе БИНС путем обработки сигналов инерциальных датчиков – гироскопов или разнесенных акселерометров [6].

Алгоритм, основанный на решении уравнения Пуассона, а также рекуррентная процедура определения элементов матрицы направляющих косинусов подробно рассмотрены в [14]. В этой же публикации исследованы особенности реализации в бортовых алгоритмах кватернионов единичной длины для определения ориентации объекта.

Отметим, что оба алгоритма базируются на промежуточной процедуре вычисления компонент трехмерного вектора Эйлера путем рекуррентного решения кинематического уравнения Бортца [14]. Данная процедура используется как при определении быстроменяющейся ориентации жестко связанной с объектом системы координат, так и при расчете текущего положения выбранной навигационной системы координат.

Матрицу углового положения объекта можно определить путем обработки сигналов ИЧЭ по классическому алгоритму, который рассмотрен выше. Таким образом, для функционирования БИНС необходимо решать кинематическое уравнение Пуассона, универсальная матричная форма записи которого имеет следующий вид [1]:

$$d/dt\,[X(t)] = [\Omega(t)][X(t)] \tag{5.1}$$

где $X(t_0) = X_0$ – начальная матрица ориентации твердого тела, а кососимметрическая матрица угловых скоростей объекта имеет вид

$$[\Omega(t)] = \begin{Vmatrix} 0 & \omega_Z(t) & -\omega_Y(t) \\ -\omega_Z(t) & 0 & \omega_X(t) \\ \omega_Y(t) & -\omega_X(t) & 0 \end{Vmatrix} \tag{5.2}$$

Так как для общего случая проинтегрировать в квадратурах уравнение (5.1) не представляется возможным, приходится использовать те или иные численные методы [5, 6, 15, 16].

Особенности решения уравнения (5.1) при функционировании БИНС заключаются в том, что они должны определяться в реальном масштабе времени. Поэтому при задании требований, предъявляемых к быстродействию бортового вычислителя, приоритетную роль играет алгоритм решения кинематического дифференциального уравнения вида (5.1).

Основные численные методы, учитывающие конкретную структуру кинематических дифференциальных уравнений, приведены в периодических публикациях и монографиях [5, 6, 15, 16]. Основной альтернативой численных методов являются рекуррентные процедуры решения уравнения (5.1).

В работах [5, 6, 14–16, 18, 20] предлагаются сравнительно экономичные (с точки зрения числа операций на шаге) рекуррентные процедуры, которые значительно эффективнее стандартных численных методов решения дифференциальных уравнений. Например, универсальное кинематическое уравнение (5.1) в приращениях записывается в следующем виде:

$$[X(m+1)] = [\Phi_m(\theta)][X(m)] \tag{5.3}$$

где $\Phi_m(\theta_k)$ – фундаментальная или переходная матрица, которая в случае нестационарных систем является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}[\Phi(t,t_m)] = [\Omega(t)]\cdot[\Phi(t,t_0)],\ [\Phi(t,t_0)] = E \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) является объединением системы n-уравнений $(n=\overline{1,6})$. Если $d/dt[\Phi(t,t_m)] = 0$, тогда определено следующее известное соотношение $[\Phi(t - t_m)] = \exp[\Omega\,(t - t_m)]$, где матричная экспонента

$$\exp[\Omega(t-t_m)] = E + (t-t_m)[\Omega] + ((t-t_m)^2/2!)[\Omega]^2 + \ldots$$

Можно проверить, что для фиксированных (постоянных) моментов квантования $t = 1, 2, 3, \ldots, m, \ldots$ имеем дискретную систему и кинематическое дифференциальное уравнение (5.4) запишем в разностном виде

$$[X(m+1)] = [\Phi(m)]\ [X(m)] \tag{5.5}$$

Заметим, что при интервалах $(t_{m+1} - t_m) = \text{const}$ переходная матрица $\Phi(t_{m+1}, t_m) = \text{const}$. При этом $\Phi(t_{m+1}, t_m) \equiv \Phi(\theta_T)$. В свою очередь матрица $[\theta]$ (3×3) равна:

$$[\theta] = \begin{Vmatrix} 0 & +\theta_Z & -\theta_Y \\ -\theta_Z & 0 & +\theta_X \\ +\theta_Y & -\theta_X & 0 \end{Vmatrix} \tag{5.6}$$

Величины квазикоординат (псевдоуглов) $\theta_X, \theta_Y, \theta_Z$ интерпретируются, как приращения выходных сигналов интегрирующих гироскопов.

Разложение в степенной ряд Тейлора матричной экспоненты $\exp[\Omega(t - t_m)]$ приводит к алгоритмам от первого до шестого и выше порядка точности включительно [5, 6, 14–16]. При этом хорошо известно, что с ростом порядка происходит не только существенное усложнение самого алгоритма, но увеличивается его точность. Отметим, что в общем случае для определения матричной экспоненты может быть использован ряд Ли [22].

Разностное уравнение (5.5) довольно точно описывает поведение системы (5.1) в дискретные (фиксированные) моменты квантования. Важно отметить, что если моменты дискретизации изменяются со временем ($T = T(t)$), то соотношение (5.5) имеет следующий вид:

$$[X(t_{m+1})] = [\Phi(t_{m+1}, t_m)][X(t_m)] \tag{5.7}$$

При использовании любого из рассмотренных выше методов определения матрицы ориентации X ортогональность этой матрицы нарушается. Поэтому в бортовых алгоритмах используются специальные процедуры ортогонализации вычисленной матрицы направляющих косинусов [14].

В работе [24] Олбергом предложен метод вычисления ортогональной матрицы X. При условии, что за время (T) цикла решения кинематического уравнения вектор угловой скорости ω не изменит своего направления, можно получить следующее аналитическое выражение:

$$[X(t_{m+1})] = \left[E + \frac{\sin(\omega T)}{\omega}[\Omega] + \frac{(1-\cos(\omega T))}{\omega^2}[\Omega]^2\right][X(t_m)] \tag{5.8}$$

где величина вектора абсолютной угловой скорости равна

$$\omega = (\omega_X^2 + \omega_Y^2 + \omega_Z^2)^{1/2}$$

Таким образом, если вычислять матрицу ориентации X по формуле (5.8), то ее ортогональность не нарушается. На основании формулы (5.8) можно представить эквивалентную для интегрирующих гироскопов

$$[X(t_{m+1})] = \left[E + \frac{\sin(\theta)}{\theta}[\Phi] + \frac{(1-\cos(\theta))}{\theta^2}[\Phi]^2\right][X(t_m)] \tag{5.9}$$

где величина угла поворота $\theta = (\theta_X^2 + \theta_Y^2 + \theta_Z^2)^{1/2}$, а кососимметрическая матрица мгновенной ориентации $\Phi(3 \times 3)$ равна выражению (5.6).

В [25] приводится аналитическое выражение для вычисления кватернионной матрицы ориентации, реализация которого также не нарушает ортогональности искомой матрицы поворота

$$[X(t_{m+1})] = \left[\cos\left(T\frac{\omega}{2}\right)E + \left(\frac{1}{2}T\right)\frac{\sin(T\omega/2)}{(T\omega/2)}[\Omega]\right][X(t_m)] \tag{5.10}$$

где $[X]$ – кватернионная (4×1) матрица ориентации; $[\Omega]$ – кватернионная (4×4) кососимметрическая матрица угловых скоростей объекта (см. уравнение (3.1)) такая, что $[\Omega][\Omega] = -\omega^2 E$; E – единичная (4×4) матрица.

Следует отметить, что формулы (5.8)–(5.10) имеют методическую погрешность из-за того, что вектор угловой скорости ω непрерывно меняет свое направление, так как всегда имеют место угловые ускорения объекта. По этой причине в последних публикациях, посвященных бескарданным алгоритмам ориентации, учитываются не только угловые ускорения, но и первые, вторые и даже третьи производные этих ускорений [14, 18, 26].

Такой подход позволяет синтезировать прецизионные алгоритмы ориентации, которые реализуются в вычислителях высокоточных БИНС.

Кроме того, учет углового ускорения в современных бортовых вычислителях позволяет увеличить шаг интегрирования, повышается точность алгоритма ориентации и снижаются требования к быстродействию бортового процессора. Следует отметить, что довольно оригинальный рекуррентный способ вычисления матрицы ориентации с учетом углового ускорения объекта предложен в [14]. В этом алгоритме принимается во внимание наличие переменного углового ускорения $\dot{\omega} = d/dt(\omega)$ объекта.

Необходимый "порядок" алгоритма опрделяется требованиями к точности системы при максимальной скорости поступления входных данных, то есть, когда вектор Эйлера ϕ имеет максимальное значение. Скорость повторения вычислений обычно выбирается такой, чтобы величина вектора ϕ оставалась небольшой (как правило не более 5–6 угл. град) даже при максимальной угловой скорости объекта. Отметим, что сверхманевренный самолет пятого поколения F-22 имеет предельные значения $\omega \geqslant 400$ град/с.

Задачи преобразования координат и определения ориентации могут успешно решаться с помощью математического аппарата кватернионов. Особенности бортовой реализации кватернионных преобразований достаточно подробно рассмотрены в [14]. Поэтому эти процедуры будут упоминаться только для сравнительной оценки точности и объема требуемых для достижения заданной точности вычислений. В [14] показана эквивалентность между матрицей направляющих косинусов и кватернионами ориентации.

Вектор ориентации Эйлера ϕ твердого тела обычно определяется путем обработки сигналов, поступающих с гироскопов, жестко связанных с корпусом объекта. В настоящее время имеется достаточно много публикаций, в которых рассматривается задача вычисления вектора ϕ как и для случаев, когда ϕ не меняет положения в пространстве ($d/dt(\omega) = 0$), так и для случаев, когда вектор непрерывно меняет величину и направление: $d/dt(\omega) \neq 0$; $d^2/dt^2(\omega) \neq 0$; $d^3/dt^3(\omega) \neq 0$; $d^4/dt^4(\omega) \neq 0$ [26].

Подобный алгоритм реализован в лазерной БИНС военного назначения LN-100G, которая устанавливается на вертолеты, самолеты и крылатые ракеты [27]. Математическое моделирование и результаты летных испытаний системы подтверждают достаточно высокую точность ее программно-математического обеспечения [26].

6. Алгоритм определения ориентации объекта на основе способа шестимерной параметризации. В работе [1] Дж. Стьюэльпнагелем для описания способа пятимерной параметризации Х. Хопфа [21] впервые достаточно кратко рассмотрен модифицированный метод шестимерной параметризации. Этот способ определения ориентации объекта достаточно подробно исследован автором. В случае применения совокупности любых шестимерных параметров расположения для записи алгоритма определения ориентации твердого тела представим уравнение (5.1) в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_6 x(t), \quad A_6 = \begin{Vmatrix} \Omega_3 & O_3 \\ O_3 & \Omega_3 \end{Vmatrix} \tag{6.1}$$

где x – шестимерный вектор параметров расположения; A_6 – кососимметрическая матрица (6×6); Ω_3 – кососимметрическая (3×3) "гироскопическая" матрица (формируется по сигналам гироскопических датчиков).

В развернутом (координатном) виде матричное дифференциальное уравнение (6.1) имеет следующую форму записи [28]:

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Vmatrix} = \left\Vert \begin{array}{ccc|ccc} 0 & \omega_z & -\omega_y & & & \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & & O_{3\times3} & \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & & & \\ \hline & & & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ & O_{3\times3} & & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ & & & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{array} \right\Vert \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Vmatrix} \tag{6.2}$$

где $\overline{x_1, x_6}$ – параметры ориентации твердого тела (перенормированные элементы матрицы направляющих косинусов). Для рассматриваемого здесь вектора $x(6 \times 1)$ скалярное произведение $x^T x = 1$. Однако в общем случае для вектора $x(6 \times 1)$ с нормой, отличной от единицы, скалярное произведение равно заранее выбранной (произвольной) константе:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = (\text{const})^2 \tag{6.3}$$

Шесть скалярных кинематических уравнений, которые могут быть получены на основании (6.1) или (6.2), требуют трех уравнений связи [28]:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 1$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) = 0 \tag{6.4}$$
$$x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0$$

которые используются для контроля погрешностей, имеющихся при определении шести переменных $x_i (i = \overline{1,6})$ по дифференциальному уравнению (6.2).

В рекуррентном виде решение кинематического уравнения (6.2) может быть представлено следующим соотношением:

$$[X(m+1)] = [\Phi^*(m)][X(m)] \tag{6.5}$$

где первый интеграл от матрицы угловых скоростей $A_6(\omega)$ равен

$$[\Phi^*(m)] = \int_0^\tau A_6 d\tau \tag{6.6}$$

Предлагается при вычислении интеграла от "гироскопической" матрицы использовать алгоритм, основанный на трехмерной параметризации Кэли [1,17]. Основная теория данного способа параметризации достаточно кратко изложена в [1]. В данной публикации представим конечные результаты метода трехмерной параметризации Кэли, которые необходимы для получения рекуррентных соотношений и синтеза нового комбинированного алгоритма.

В частности, на основании трехмерной параметризации Кэли, фундаментальную матрицу $[\Phi^*(m)]$ системы вычисляют используя следующее рекуррентное соотношение, которое получено на основании работы [1]:

$$[\Phi^*(m)] = \left[E - \frac{2}{(1+\theta_k^2)}[K(m)] + \frac{2}{(1+\theta_k^2)}[K(m)]^2 \right] \tag{6.7}$$

где $[K(m)]$ – кососимметрическая (3×3) матрица трех вещественных переменных (параметров Кэли), которая только в одном частном случае (при ω = const) равна интегралу

$$[K(m)] = \int_0^\tau \Gamma(\omega) d\tau \tag{6.8}$$

В общем случае, когда вектор угловой скорости (измеряемый инерциальными датчиками) постоянно меняет величину и направление (вращается в инерциальном пространстве) выражение (6.8) имеет более сложный вид, который получен в [1]. Изменение во времени трехмерного вектора Кэли подчиняется кинематическому дифференциальному уравнению типа Риккати. Матричная форма записи этого уравнения имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}[K(m)] = \frac{1}{2}[K\Omega K + \Omega K - K\Omega - \Omega] \tag{6.9}$$

Приемы решения кинематического дифференциального уравнения (6.9) в зависимости от частотных характеристик угловой скорости (Ω) объекта и условий его применения ($d/dt[\Omega] \neq 0$; $d^2/dt^2\,[\Omega] \neq 0$; и т.д.) известны. Поэтому в данной публикации они не рассматриваются. В качестве примера покажем решение уравнения (6.9) для случая $\Omega = A + B(t - t_k)$, при A, B = const:

$$[K(k+1)] = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{c} \alpha(k) - \Delta\alpha(k) + \delta\alpha(k) + \Delta\alpha(k)K(k) - \\ -K(k)\Delta\alpha(k) + \delta\beta(k) + K(k)\Delta\alpha(k)K(k) \end{array} \right\| \tag{6.10}$$

$$\alpha(k) = \tfrac{1}{2}\{\alpha(k) - \Delta\alpha(k)\}$$

$$\delta\alpha(k+1) = \tfrac{1}{2}\{\Delta\alpha(k)K(k) - K(k)\Delta\alpha(k)\}$$

$$\delta\beta(k+1) = \tfrac{1}{2}\{\delta\beta(k) + K(k)\Delta\alpha(k)K(k)\}$$

где $\Delta\alpha = \Sigma_k^{k+1}\delta\alpha$ – сумма отдельных (одиночных) импульсов интегрирующего гироскопа, $[\Delta\alpha(k)]$ – кососимметрическая матрица

$$[\Delta\alpha(k)] = \begin{bmatrix} 0 & \Delta\alpha_Z & -\Delta\alpha_Y \\ -\Delta\alpha_Z & 0 & \Delta\alpha_X \\ \Delta\alpha_Y & -\Delta\alpha_X & 0 \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

В этом случае инерциальные датчики осуществляют интегрирование и квантование скорости изменения трехмерного вектора ориентации Кэли с высокой точностью, присущей прецизионным интегрирующим инерциальным датчикам (разнесенным акселерометрам, КЛГ и ВТГ).

В бортовом процессоре суммируются поступающие, например, от интегрирующих гироскопов, одиночные импульсы, а вычисление ортогональной матрицы ориентации $[\Phi^*]$ по формуле (6.7) выполняется только в те моменты времени, когда это необходимо. При таком подходе к решению задачи ориентации роль бортового вычислителя БИНС изменяется.

Если раньше процессор системы выполнял интегрирование матричного дифференциального уравнения Пуассона с весьма малым шагом, то теперь его роль состоит в вычислении матричной функции через относительно большие промежутки времени [14]. Что касается непосредственно процедуры вычисления промежуточных параметров ориентации Кэли, то в простейшем случае, когда вектор угловой скорости (Ω) не меняет своей ориентации, вектор Кэли равен первому интегралу от Ω.

В общем случае, при вычислении вектора $K(t)$ по уравнению Риккати (6.9) решение должно учитывать первую, вторую, третью и другие старшие производные Ω. Последнее условие зависит от требований точности, предъявляемых к бортовому алгоритму ориентации и характеристик объекта применения, на котором установлена бескарданная система.

Решение уравнения типа Риккати в бортовом цифровом вычислителе использует наличие более высокой скорости операции суммирования, чем скорость обновления информации об угловом положении твердого тела в течение одного вычислительного цикла. Вычислительная процедура для интегрирования уравнения Риккати получается путем перезаписи формулы (6.9) в следующем виде:

$$[K(t)] = \frac{1}{2}\left[\int_{t_m}^{t} (K\Omega K)dt + \int_{t_m}^{t} (\Omega K - K\Omega)dt - \int_{t_m}^{t} \Omega dt\right] \tag{6.12}$$

Более простое выражение для $[K(t)]$ получается следующей подстановкой:

$$\alpha(t) = -\frac{1}{2}\left[\int_{t_k}^{t} \Omega(t)dt\right] \tag{6.13}$$

$$\delta\alpha(t) = \frac{1}{2}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} (\Omega K - K\Omega)dt\right] \tag{6.14}$$

$$\delta\beta(t) = \frac{1}{2}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} (K\Omega K)dt\right] \tag{6.15}$$

$$[K] = \alpha(t = t_{m+1}) + \delta\alpha(t = t_{m+1}) + \delta\beta(t = t_{m+1}) \tag{6.16}$$

Выражения (6.12)–(6.15) и (6.16) это система уравнений, которая может быть реализована в программно-математическом обеспечении (ПМО) современных БИНС для вычисления трех вещественных параметров Кэли.

Можно подтвердить аналитическими исследованиями и математическим моделированием, что эти процедуры позволяют вычислять вектор Эйлера–Кэли с заданным уровнем точности при произвольных угловых движениях и вибрациях основания БИНС.

Только в случае, когда вектор Ω не меняет своего направления в пространстве, добавочные члены $\delta\alpha$ и $\delta\beta$ в этих уравнениях равны нулю, а вектор Кэли равен простому интегралу от Ω в течение быстрого "m" вычислительного цикла. Расчетная процедура получается путем перезаписи уравнения (6.12) в эквивалентной дифференциальной форме

$$\alpha(t) = \alpha(k) - \frac{1}{2}\left[\int\limits_{t_k}^{t} \Omega(t)dt\right], \qquad \delta\alpha(t) = \delta\alpha(k) + \frac{1}{2}\left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} (\Omega K - K\Omega)dt\right] \tag{6.17}$$

$$\delta\beta(t) = \delta\beta(k) + \frac{1}{2}\left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} (K\Omega K)dt\right] \tag{6.18}$$

$$\alpha(k) = \alpha \ (t = t_k), \qquad \delta\alpha(k+1) = \delta\alpha \ (t = t_{k+1}), \qquad \delta\beta(k+1) = \delta\beta \ (t = t_{k+1})$$

Отметим, что "k" – высокоскоростной вычислительный цикл внутри быстрого "m" – цикла определения углового положения твердого тела. Соответственно окончательно имеем следующую рекуррентную процедуру:

$$[K] = \alpha(t = t_{m+1}) + \delta\alpha(t = t_{m+1}) + \delta\beta(t = t_{m+1}) \tag{6.19}$$

При заданных начальных условиях: $\alpha(t = t_m) = 0, \delta\alpha(t = t_m) = 0, \delta\beta(t = t_m) = 0$.

Интегралы в уравнениях (6.17)–(6.18) можно представить аналитическими зависимостями, в которых совмещается процесс обработки выходных данных, если Ω заменить известным разложением гармонической функции в степенную последовательность. Один пример (при $d/dt(\Omega) \neq 0$) рассмотрен выше.

Алгоритм (6.17)–(6.19) позволяет на рекурсивной основе вычислять вектор ориентации Эйлера – Кэли (K) в каждом быстром "m"-цикле. После вычисления K на сверхбыстром "k"-цикле алгоритм возвращается в исходную позицию для определения этого вектора в следующем "m + 1"-цикле.

Скорость повторения сверхбыстрого вычислительного "k"-цикла выбирается, как правило, на порядок выше быстрого "m"-цикла, чтобы особенности дискретного счета не создавали нежелательных динамических возмущений по параметрам входной угловой скорости объекта Ω.

7. Оценка точности синтезированного алгоритма ориентации. Основные свойства бортового алгоритма – вычислительная устойчивость, чувствительность к входным возмущениям, простота счета и потенциальная точность проверяются как путем математического моделирования, так и способом аналитических исследований. В обоих случаях необходимо задание гипотетического (конического) углового движения твердого тела.

Можно продемонстрировать с помощью аналитических зависимостей или методом математического моделирования, что при угловом движении и вибрации корпуса объекта уравнение (6.9) помогает вычислить трехмерный вектор ориентации Эйлера – Кэли с таким уровнем точности, который отвечает требованиям определения основных параметров современных БИНС.

Важно отметить, что точность, с которой выражения (6.16) или (6.19) приближают дифференциальное уравнение (6.9) типа Риккати (в отличие от уравнения Эйлера–Лэнинга–Бортца [4]) зависит уже не от малости вектора ориентации Эйлера ($\mathbf{\Phi} \leqslant 0{,}1$ рад), а от конкретного ограничения, которое заложено в фундаментальной теореме Эйлера. Поэтому угол плоского поворота не должен превышать значения 180 угл. град. Последнее хорошо согласуется с ограничениями ($K \leqslant \pi$ рад) на применение уравнения (6.9) и позволяет значительно снизить требования к высокоскоростному вычислительному циклу по требуемому быстродействию.

Исследование алгоритмов ориентации проводилось методом численного интегрирования дифференциальных уравнений вида (5.1)–(6.9). Интегрирование всех уравнений ориентации выполнялось с помощью эталонного, вычислительно устойчивого метода Рунге–Кутта седьмого порядка точности [28], с шагом $h = 0{,}001$ с.

Данный метод интегрирования выбран в качестве эталона, с которым сравнивались известные численные методы Эйлера, Адамса – Башфорта, Олберга – Севиджа и Стенжела [5, 28].

При моделировании максимальная угловая скорость вращения подвижного триэдра относительно неподвижного равнялась 180 град/с. Такая величина угловой скорости выбрана из расчета, чтобы за единицу времени объект не повернулся на величину угла больше 180 угл. град., что хорошо согласуется с требованиями фундаментальной теоремы Эйлера.

Анализ результатов численного интегрирования показал, что при одних и тех же исходных условиях моделирования точность вычисления трех параметров Кэли по уравнению типа Риккати (6.9) в два–три раза превышает точность вычисления трех параметров ориентации по кинематическому дифференциальному уравнению Бортца.

Инерциальные прецизионные интегрирующие датчики (кольцевые лазерные гироскопы, волновые твердотельные гироскопы, а также "разнесенные" акселерометры), имеют как правило, одну ось чувствительности.. Поэтому при построении численных методов интегрирования кинематических дифференциальных уравнений вида (5.1) в высокоточных БИНС необходимо учитывать следующие факторы.

Эффективно (при минимуме вычислительных затрат и максимуме достигаемой при этих затратах точности и быстродействии) решать на каждом шаге дифференциальные уравнения (6.9), переменные значения в которых выражены через три вещественных параметра Кэли.

При этом непосредственно по реальным показаниям ИЧЭ определяется промежуточная (текущая ориентация) приборного триэдра, который жестко связан с объектом, подверженным высокочастотным возмущениям, механическим вибрациям и коническим движениям основания.

После выполнения этой процедуры необходимо переходить к вычислению шестимерных параметров расположения для глобального и взаимно-однозначного определения ориентации объекта.

Именно такой комбинированный алгоритм является наиболее эффективным для реализации в ПМО высокоточных бескарданных инерциальных систем сверхманевренных объектов.

Кроме того, ортогональная матрица X шести параметров имеет по сравнению с аналогичной матрицей (выраженной в параметрах Родрига–Гамильтона) явное преимущество в плане простоты бортовой реализации. Кроме того, эта матрица устанавливает очень простую связь (прямую и обратную) с матрицей направляющих косинусов, заданной в углах Эйлера–Крылова. Эти параметры (ψ, ϑ, γ) необходимы для пилотируемых объектов.

Следует отметить, что промежуточные параметры ориентации требуется определять в темпе реального масштаба времени. Поэтому данные процедуры выполняются на высокоскоростном (сверхбыстром) цикле бортовых вычислений с тактовой частотой $f \geqslant 1000 - 2000$ Гц.

Для определения реального положения твердого тела в трехмерном пространстве необходимо непосредственно вычислять в быстром цикле ($f = 100$–200 Гц) шесть переменных линейных параметров ориентации, решая кинематическое дифференциальное уравнение вращения (6.1).

Такой комбинированный алгоритм обладает вычислительной устойчивостью и наиболее эффективен в решении целого ряда прикладных задач ориентации не только в области наведения и навигации, но и прецизионного станкостроения и робототехники. Моделирование на быстродействующей персональной ЭВМ типа "Pentium" подтвердило выводы аналитических исследований – высокую точность решения уравнений (6.2) и (6.9), а также вычислительную устойчивость синтезированного алгоритма.

Изложенная процедура расчета ориентации твердого тела позволяет синтезировать комбинированный алгоритм определения ориентации любой механической системы. Основу алгоритма должны составлять программно-интегрированные способы трехмерной параметризации Эйлера–Кэли и глобольной, взаимно-однозначной шестимерной параметризации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stuelpnagel J.* On the parametrization of the three – dimensional rotation group // SIAM REV. 1964. V. 6. № 4. P. 422–429.
2. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.
3. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Гостехиздат, 1957. 408 с.
4. *Bortz J.E.* A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation // IEEE Trans., Aerospace and Electron. Syst. / 1971. V. 7. № 1. P. 61–66.
5. Инерциальные системы без гиростабилизированной платформы. (Обзор) // Вопр. ракетной техники. 1967. № 1. С. 61–77.
6. *Оттен Д.* Инерциальные навигационные системы без гиростабилизированной платформы // Вопр. ракетной техники. 1967. № 12. С. 68–86.
7. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
8. *Эдвардс А.* Бесплатформенные инерциальные навигационные системы // Вопр. ракетной техники. 1973. № 5. С. 47–71.
9. *Онищенко С.М.* Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. Киев: Наук. думка, 1983. 208 с.
10. *Андреев В.Д.* Теория инерциальной навигации: Автономные системы. М.: Наука, 1966. 579 с.
11. *Захарин М.И., Захарин Ф.М.* Кинематика инерциальных систем навигации. М.: Машиностроение, 1968. 236 с.
12. *Курицки М.М., Голдстейн М.С.* Инерциальная навигация // ТИИЭР. 1983. Т. 71. № 10. С. 47–74.
13. *Savage P.G.* A New Second–Order Solution for Strappet–Down Attitude Coputation // AIAA/JACC Guidance and Control Conf., 1966.
14. *Savage P.G.* STRAPDOWN SYSTEM ALGORITHMS // ACARD, Lecture № 133, Advances In Strapdawn Inertial Systems, 1984. p. 3.1–3.28.
15. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 278 с.
16. *Панов А.П.* Математические основы теории инерциальной ориентации. Киев: Наук. думка, 1995. 279 с.
17. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
18. *Miller B.R.* A new strapdown attitude algorithm // J. of Guidance. Control and Dynamics. 1983. V. 6. No. 4. P. 287–291.
19. *Сарджент Д., Заретт Х.* Исследование основных динамических погрешностей бесплатформенной инерциальной системы // Вопр. ракетной техники. 1972. № 2. С. 63–89.
20. *Gilmore G.P.* Modular Strapdown Guidance Unit with Embedded Microprocessors // J. Guidance and Control. 1980. V. 3. No. 1. P. 3–10.
21. *Hopf H.* Systeme symmetrischer Bilenearformen und euklidische Modelle der projektiven Räume. Virteljahrsschrift der Naturforsch. Ges., ZÜRICH, 1940. B. 2. S. 165–177.

22. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Наука, Физматлит, 1997. 320 с.
23. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Наука, 1961. 824 с.
24. *Олберг Е.* Методы навигации с помощью инерциальных систем без стабилизатора // Вопр. ракетной техники. 1964. № 10. С. 24–37.
25. *Sri-Jayantha M., Stengel R.F.* A Microprocessor – Based Date – Acquisition System for Stall/Spin Research // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 1983. V. 19. No. 1. P. 59–69.
26. *Lee J.Y., Yoon Y.J., Mark J.G. Tazartes D.A.* Extension of strapdown attitud algorithm for high-frequency base motion // J. Guidance, Control and Dynamics. 1990. V. 13. No. 4. P. 738–743.
27. Technology and Product Overview. Litton Space Operations. Litton Guidance and Control Systems. 1996. 86 p.
28. *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.09.1998