МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2000

УДК 531.38

 А.Ю. АЛЕКСАНДРОВ

ОБ УПРАВЛЕНИИ ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Рассматривается задача управления вращательным движением твердого тела при наличии нестационарных возмущающих воздействий. Используя прямой метод Ляпунова, доказано, что для нелинейных управлений асимптотическая устойчивость положения равновесия твердого тела может сохраняться и в случае, когда порядок возмущений меньше порядка функций, определяющих управляющий момент.

1. Исследование устойчивости положения равновесия неавтономных систем. Пусть движение механической системы, находящейся под воздействием потенциальных, гироскопических и диссипативных сил, описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}-\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}=-\frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}}-\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}+\frac{\partial W}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{q}$ – n-мерный вектор обобщенных координат; $T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$, причем симметрическая матрица $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ задана и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $\mathbf{q}=\mathbf{0}$, а квадратичная форма $\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{A}(\mathbf{0})\dot{\mathbf{q}}$ положительно определена; $P(\mathbf{q})$ и $W(\dot{\mathbf{q}})$ – дважды непрерывно дифференцируемые однородные функции порядка λ и μ соответственно, $\lambda>2$, $\mu>2$; кососимметрическая матрица $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ определена и непрерывна при $\|\mathbf{q}\|<\delta$, $\delta>0$, и удовлетворяет неравенству $\|\mathbf{G}(\mathbf{q})\|\leqslant c\|\mathbf{q}\|^{\nu}$, где c и ν – положительные постоянные. Функция $T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ соответствует кинетической энергии системы, $P(\mathbf{q})$ – потенциальной.

Будем считать, что $P(\mathbf{q})$ – положительно-определенная, а $W(\dot{\mathbf{q}})$ – отрицательно-определенная функция. Тогда положение равновесия

$$\mathbf{q}=\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0} \tag{1.2}$$

системы (1.1) асимптотически устойчиво, а в качестве функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям теоремы Барбашина – Красовского [1, с. 97–98], можно выбрать полную энергию системы $V=T+P$.

Используя однородность функций $P(\mathbf{q})$ и $W(\dot{\mathbf{q}})$, построим для исследуемой системы функцию Ляпунова, удовлетворяющую требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [2, с. 61–65]. В [3–5] функции такого рода строились для системы (1.1) в случае, когда $\lambda=\mu=2$.

Пусть

$$V_1=V+\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial P}{\partial q_i}\right)^{\beta}$$

где α – положительная постоянная, β – рациональное число с нечетным числителем и знаменателем. Если $\beta \geqslant \gamma$, где

$$\gamma = \max\{1;\ \lambda\mu/(2\lambda-2)-1;\quad \mu-\mu\nu/(\lambda-1)-1\}$$

то при достаточно малом α функция V_1 положительно определена, а ее производная в силу системы (1.1) является отрицательно-определенной функцией.

Наряду с системой (1.1) рассмотрим возмущенную систему

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}-\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}=-\frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}}-\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}+\frac{\partial W}{\partial \dot{\mathbf{q}}}+\mathbf{B}(t)\mathbf{R}(\dot{\mathbf{q}}) \tag{1.3}$$

Здесь элементы k-мерного вектора $\mathbf{R}(\dot{\mathbf{q}})$ являются непрерывно дифференцируемыми однородными функциями порядка σ, $\sigma \geqslant 1$; $\mathbf{B}(t)$ – $(n \times k)$-матрица, непрерывная и ограниченная при $t \geqslant 0$ вместе с интегралом

$$\mathbf{I}(t)=\int_0^t \mathbf{B}(\tau)d\tau \tag{1.4}$$

В частности, элементы матрицы $\mathbf{B}(t)$ могут являться периодическими функциями с нулевыми средними значениями.

Исследуем вопрос, при каких условиях возмущения не нарушают асимптотическую устойчивость положения равновесия (1.2). Известно [6], что асимптотическая устойчивость сохраняется, если порядок возмущений выше порядка функций, входящих в правые части исходных уравнений. В рассматриваемом случае, используя функцию V_1, получаем, что если

$$\sigma > \mu - 1 \tag{1.5}$$

то положение равновесия (1.2) системы (1.3) асимптотически устойчиво. В то же время, при $\mu = \lambda = 2$, $\sigma = 1$ возмущения указанного вида могут нарушать асимптотическую устойчивость положения равновесия [1, с. 156].

Покажем, что если $\mu > 2$, $\lambda > 2$, то условие (1.5) можно ослабить, используя предложенный в работах [7, 8] метод построения нестационарных функций Ляпунова для нелинейных систем.

Теорема 1. При выполнении неравенства

$$\sigma > \mu - \frac{\mu}{\gamma+1} \tag{1.6}$$

положение равновесия (1.2) системы (1.3) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Функцию Ляпунова для возмущенной системы выбираем в виде

$$V_2 = V_1 - \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{I}(t)\mathbf{R}(\dot{\mathbf{q}}) - \alpha\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial P}{\partial q_i}\right)^{\beta}\sum_{j=1}^{k}\int_0^t b_{ij}(\tau)d\tau R_j(\dot{\mathbf{q}})$$

Если $\sigma > \mu - \mu/(\beta+1)$, то для функции V_2 и ее производной в силу системы (1.3) в достаточно малой окрестности исследуемого положения равновесия и при всех $t \geqslant 0$ справедливы оценки

$$a_1(\|\mathbf{q}\|^{\lambda}+\|\dot{\mathbf{q}}\|^2) \leqslant V_2 \leqslant a_2(\|\mathbf{q}\|^{\lambda}+\|\dot{\mathbf{q}}\|^2)$$

$$dV_2/dt \leqslant -a_3(\|\mathbf{q}\|^{(\lambda-1)(\beta+1)}+\|\dot{\mathbf{q}}\|^{\mu})$$

где a_1, a_2, a_3 – положительные постоянные.

Таким образом, функция V_2 удовлетворяет всем требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Учитывая условие $\beta \geqslant \gamma$, получаем, что при выполнении неравенства (1.6) положение равновесия асимптотически устойчиво.

Замечания. *1*. Нетрудно видеть, что при всех $\lambda > 2$, $\mu > 2$, $\nu > 0$ имеет место неравенство $\mu > \gamma + 1$, т.е. условие (1.6) действительно улучшает условие (1.5).

2. При $\nu = 0$ неравенство (1.6) совпадает с условием асимптотической устойчивости, полученным в работе [8] для системы, на которую не действуют гироскопические силы ($\mathbf{G}(\mathbf{q}) \equiv \mathbf{0}$).

Следствие. Пусть функция $P(\mathbf{q})$ не имеет минимума при $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, а положение равновесия (1.2) невозмущенной системы является изолированным. Тогда при выполнении неравенства (1.6) положение равновесия (1.2) системы (1.3) неустойчиво.

Действительно, в этом случае функция V_2 удовлетворяет требованиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости [2, с. 65–66].

Покажем теперь, что предложенный в работах [7, 8] способ построения нестационарных функций Ляпунова можно использовать и для получения достаточных условий устойчивости по части переменных [9].

Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_1(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \partial W / \partial \mathbf{X} + \mathbf{B}(t)\mathbf{R}(\mathbf{X}) \tag{1.7}$$

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}_2(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

Здесь $\mathbf{X}$ – m-мерный вектор, Y – l-мерный вектор, векторные функции $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ определены и непрерывны при

$$t \geqslant 0, \quad \|\mathbf{X}\| < \delta, \quad \|\mathbf{Y}\| < \delta, \quad \delta > 0 \tag{1.8}$$

и удовлетворяют условиям

$$\|\mathbf{F}_1(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})\| \leqslant \varphi(\mathbf{Y}) \|\mathbf{X}\|^{\lambda}, \quad \mathbf{F}_2(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$$

где $\lambda \geqslant 1$, а $\varphi(\mathbf{Y})$ – непрерывная при $\|\mathbf{Y}\| < \delta$ неотрицательная функция, причем $\varphi(\mathbf{0}) = 0$; $W(\mathbf{X})$ – непрерывно дифференцируемая однородная порядка μ функция, $\mu > 2$; элементы k-мерного вектора $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ являются непрерывно дифференцируемыми однородными функциями порядка σ, $\sigma \geqslant 1$; $\mathbf{B}(t)$ – $(m \times k)$-матрица, непрерывная и ограниченная при $t \geqslant 0$ вместе с интегралом (1.4).

Предположим, что функция $W(\mathbf{X})$ отрицательно определена, и для системы (1.7) существует непрерывно дифференцируемая при $\|\mathbf{Y}\| < \delta$ положительно-определенная функция $Q(\mathbf{Y})$ такая, что в области (1.8) имеет место неравенство

$$\mathbf{F}_1^T \mathbf{X} + \mathbf{F}_2^T \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{Y}} \leqslant 0$$

Используя функцию Ляпунова $V = \dfrac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{X} + Q(\mathbf{Y})$, получаем, что при $\sigma > \mu - 1$ положение равновесия

$$\mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{0} \tag{1.9}$$

системы (1.7) устойчиво по всем переменным и асимптотически устойчиво по $\mathbf{X}$ [9, с. 38].

Найденное условие асимптотической устойчивости можно ослабить, выбирая функцию Ляпунова в виде

$$V_1 = V - \mathbf{X}^T \mathbf{I}(t) \mathbf{R}(\mathbf{Y}) \tag{1.10}$$

Получим, что имеет место следующая теорема.

Теорема 2. При выполнении неравенств $\sigma + \lambda \geqslant \mu$, $2\sigma > \mu$ положение равновесия (1.9) системы (1.7) устойчиво по всем переменным и асимптотически устойчиво по $\mathbf{X}$.

Для доказательства теоремы следует показать, что функция V_1, построенная по формуле (1.10), удовлетворяет всем требованиям теоремы В.В. Румянцева об асимптотической устойчивости по части переменных [9, с. 38].

Следствие. Пусть в системе (1.7) $\mathbf{F}_1 = \mathbf{G}(\mathbf{Y})\mathbf{X}$, где $\mathbf{G}(\mathbf{Y})$ – непрерывная при $\|\mathbf{Y}\| < \delta$ кососимметрическая матрица, $\mathbf{G}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Если существует положительно-определенная непрерывно дифференцируемая при $\|\mathbf{Y}\| < \delta$ функция $Q(\mathbf{Y})$ такая, что в области (1.8) имеет место неравенство $\mathbf{F}_2^T \partial Q / \partial \mathbf{Y} \leqslant 0$, то при $\sigma \geqslant \mu - 1$ положение равновесия (1.9) устойчиво по всем переменным и асимптотически устойчиво по $\mathbf{X}$.

Далее рассмотрим применение доказанных теорем в задачах управления вращательным движением твердого тела.

2. Управление трехосной ориентацией твердого тела. Рассмотрим твердое тело, вращающееся в инерциальном пространстве с угловой скоростью ω вокруг своего центра инерции O. Предположим, что с телом связаны оси $Oxyz$, которые являются главными центральными осями этого тела. Уравнения вращательного движения тела под действием управляющего момента $\mathbf{M}$ имеют вид

$$\Theta\dot{\omega} + \omega \times \Theta\omega = \mathbf{M} \tag{2.1}$$

где Θ – тензор инерции тела [10].

Пусть заданы две правые тройки взаимноортогональных ортов $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_3$ и $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$. Орты $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ занимают неизменное положение в инерциальном пространстве, а орты $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ – неизменное положение в рассматриваемом теле. Тогда векторы $\mathbf{s}_i$ вращаются по отношению к системе $Oxyz$ с угловой скоростью – ω. Следовательно,

$$\dot{\mathbf{s}}_i = -\omega \times \mathbf{s}_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

Построим управляющий момент $\mathbf{M}$, при котором система уравнений (2.1), (2.2) имеет асимптотически устойчивое положение равновесия

$$\omega = \mathbf{0}, \quad \mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.3}$$

Известно [11], что момент $\mathbf{M}$ можно выбрать в виде

$$\mathbf{M} = \frac{\partial W}{\partial \omega} - \varphi^{\lambda} \sum_{i=1}^{3} a_i (\mathbf{s}_i \times \mathbf{r}_i)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} a_i \| \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i \|^2$$

Здесь $W(\omega)$ является дважды непрерывно дифференцируемой отрицательно-определенной однородной порядка μ функцией, $\mu > 2$; a_1, a_2, a_3, λ – положительные постоянные.

Для рассматриваемой системы, как и для системы (1.1), построим функцию Ляпунова, удовлетворяющую условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Пусть $\xi = \sum a_i (\mathbf{s}_i \times \mathbf{r}_i)$, $\eta = \left(\xi_1^\beta, \xi_2^\beta, \xi_3^\beta\right)^T$, β – рациональное число с нечетным числителем и знаменателем, $\beta \geqslant 1$. В работе [5, с. 174–181], используя параметры Родрига–Гамильтона [10, 12], доказано, что в некоторой окрестности положения $\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i$ (i = 1, 2, 3) справедливы оценки

$$c_1 \varphi \leqslant \| \xi \|^2 \leqslant c_2 \varphi \tag{2.4}$$

где c_1, c_2 – положительные постоянные.

Рассмотрим функцию

$$V_1 = \frac{1}{2} \omega^T \Theta \omega + \frac{1}{\lambda + 1} \varphi^{\lambda+1} + \alpha \omega^T \Theta \eta, \quad \alpha > 0 \tag{2.5}$$

Используя оценки (2.4), получаем, что если число α достаточно мало, а $\beta \geqslant \max \{1 + (\mu-2)(\lambda + 1); (2\lambda + 1)/(\mu-1)\}$, то функция V_1 положительно определена, а ее производная в силу уравнений (2.1), (2.2), является отрицательно-определенной функцией.

Предположим теперь, что на рассматриваемое тело действует наряду с управляющим моментом еще момент внешних возмущающих сил $\mathbf{M}_1$, имеющий вид

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{B}_1(t)\mathbf{R}_1(\omega) + \mathbf{B}_2(t)\mathbf{R}_2(\mathbf{s}_1 - \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2, \mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)$$

где элементы векторов $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ размерности k и m являются непрерывно дифференцируемыми однородными функциями порядка σ и ν соответственно, $\sigma \geqslant 1$, $\nu \geqslant 1$; $\mathbf{B}_1(t)$ и $\mathbf{B}_2(t)$ – $(3 \times k)$ и $(3 \times m)$-матрицы, непрерывные и ограниченные при $t \geqslant 0$ вместе с интегралами

$$\mathbf{I}_j(t) = \int_0^t \mathbf{B}_j(\tau)d\tau \quad (j = 1, 2)$$

Используя функцию (2.5), получаем, что если

$$\sigma > \mu - 1, \quad \nu > \max\{2\lambda + 1;\ (\lambda+1)(\mu-1)\}$$

то возмущения не нарушают асимптотическую устойчивость исследуемого положения равновесия.

Найденные условия асимптотической устойчивости можно уточнить, выбирая функцию Ляпунова в виде

$$V_2 = V_1 - (\omega + \alpha\eta)^T(\mathbf{I}_1\mathbf{R}_1 + \mathbf{I}_2\mathbf{R}_2)$$

Проверяя для функции V_2 условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, получаем, что имеет место теорема.

Теорема 3. При выполнении неравенств

$$\sigma > \max\left\{\frac{\mu}{2};\ \mu - 2 + \frac{1}{\lambda+1}\right\}$$

$$\nu > \max\left\{\frac{\mu(2\lambda+1)}{2(\mu-1)};\ \frac{(\lambda+1)\mu}{2};\ (\lambda+1)(\mu-2)+1\right\}$$

положение равновесия (2.3) возмущенной системы асимптотически устойчиво.

Замечания. 3. В [5, 13] функция Ляпунова вида (2.5) строилась для системы уравнений (2.1), (2.2) в случае, когда $\lambda = 0$, $\mu = 2$, $\beta = 1$, т.е. для линейного управляющего момента. Были найдены оценки на возмущения, при выполнении которых сохраняется асимптотическая устойчивость положения равновесия. При этом показано, что момент возмущающих сил должен быть достаточно мал по сравнению с управляющим моментом. Из теоремы 3 следует, что для возмущений указанного вида и нелинейных управлений ($\lambda > 0$, $\mu > 2$) асимптотическая устойчивость может сохраняться и в случае, когда порядок функций $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ меньше порядка функций, определяющих управляющий момент $\mathbf{M}$.

4. Аналогичным образом можно получить достаточные условия асимптотической устойчивости при решении задачи одноосной стабилизации твердого тела.

3. Гашение угловых движений твердого тела. Снова рассмотрим динамические уравнения Эйлера (2.1), описывающие угловые вращения твердого тела относительно центра инерции O под действием управляющего момента $\mathbf{M}$. Будем полагать, что момент $\mathbf{M}$ имеет вид $\mathbf{M} = \partial W/\partial\omega$, где $W(\omega)$ – непрерывно дифференцируемая отрицательно-определенная однородная порядка μ функция, $\mu > 2$.

Известно [14, с. 61–63], что при указанном управлении система (2.1) имеет асимптотически устойчивое положение равновесия $\omega = \mathbf{0}$, а функцию Ляпунова, удовлетворяющую условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, можно выбрать в виде

$$V = \tfrac{1}{2}\omega^T\Theta\omega \qquad (3.1)$$

Предположим теперь, что на исследуемое тело действует также момент внешних возмущающих сил $\mathbf{M}_1 = \mathbf{B}(t)\mathbf{R}(\omega)$, где элементы k-мерного вектора $\mathbf{R}(\omega)$ являются непрерывно дифференцируемыми однородными функциями порядка σ, $\sigma \geqslant 1$, а $\mathbf{B}(t)$ – $(3 \times k)$-матрица, непрерывная и ограниченная при $t \geqslant 0$ вместе с интегралом (1.4).

Теорема 4. При выполнении неравенства $\sigma > \max\{\mu-2; \mu/2\}$ положение равновесия $\omega = \mathbf{0}$ системы (2.1) асимптотически устойчиво.

Для доказательства теоремы функцию Ляпунова следует выбрать в виде

$$V_1 = V - \omega^T \mathbf{I}(t)\mathbf{R}(\omega),$$

где V – функция, построенная по формуле (3.1).

Таким образом, и в данном случае получаем, что для нелинейных управлений ($\mu > 2$) асимптотическая устойчивость может сохраняться и при $\sigma \leqslant \mu-1$.

Рассмотрим далее задачу гашения вращений твердого тела по двум из трех главных центральных осей инерции. Пусть в системе (2.1) управляющий момент $\mathbf{M}$ представим в виде $\mathbf{M} = \partial W/\partial\omega$, где $W(\omega_1, \omega_2)$ – непрерывно дифференцируемая отрицательно-определенная однородная порядка μ, $\mu > 2$, функция переменных ω_1, ω_2. Здесь ω_1, ω_2 – первые две компоненты вектора угловой скорости. Следовательно, на систему действуют диссипативные силы с частичной диссипацией.

В этом случае, используя функцию (3.1), получаем [15, с. 19], что положение равновесия $\omega = \mathbf{0}$ системы (2.1) устойчиво по всем переменным и асимптотически устойчиво по ω_1, ω_2.

Пусть на рассматриваемое тело наряду с моментом $\mathbf{M}$ действует момент возмущающих сил $\mathbf{M}_1 = \mathbf{B}(t)\mathbf{R}(\omega_1, \omega_2)$, где элементы k-мерного вектора $\mathbf{R}(\omega_1, \omega_2)$ являются непрерывно дифференцируемыми однородными порядка σ, $\sigma \geqslant 1$, функциями переменных ω_1, ω_2, $\mathbf{B}(t)$ – $(3 \times k)$-матрица, непрерывная и ограниченная при $t \geqslant 0$ вместе с интегралом (1.4), причем $b_{3j}(t) \equiv 0$ $(j = 1, \ldots, k)$.

Применяя к исследуемой системе теорему 2 (здесь $\lambda = 1$, $\mathbf{X} = (\omega_1, \omega_2)^T$, $\mathbf{Y} = \omega_3$), получаем, что имеет место теорема.

Теорема 5. При выполнении неравенства $\sigma \geqslant \mu-1$ положение равновесия $\omega = \mathbf{0}$ системы (2.1) устойчиво по всем переменным и асимптотически устойчиво по ω_1, ω_2.

Следствие. Пусть момент $\mathbf{M}$ в системе (2.1) имеет вид $\mathbf{M} = ((a_1 + b_1(t))\omega_1^\nu, (a_2 + b_2(t))\omega_2^\nu, 0)^T$, где a_1, a_2 – отрицательные постоянные, ν – рациональное число с нечетным числителем и знаменателем, $\nu > 1$; $b_1(t)$ и $b_2(t)$ – периодические функции с нулевыми средними значениями. Тогда положение равновесия $\omega = \mathbf{0}$ системы (2.1) устойчиво по всем переменным и асимптотически устойчиво по ω_1, ω_2. При этом на амплитуды возмущений $b_1(t)$ и $b_2(t)$, в отличие от случая линейного момента ($\nu = 1$) (см. [15, с. 248–249]), никаких дополнительных ограничений не накладывается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
2. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Л.; М.: ОНТИ, 1935. 386 с.
3. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 208 с.
4. *Зубов В.И.* Динамика управляемых систем. М.: Высш. шк., 1982. 285 с.
5. *Смирнов Е.Я.* Некоторые задачи математической теории управления. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. 198 с.
6. *Красовский Н.Н.* Об устойчивости по первому приближению // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 5. С. 516–530.
7. *Александров А.Ю.* Об асимптотической устойчивости решений систем нестационарных дифференциальных уравнений с однородными правыми частями // Докл. РАН. 1996. Т. 349. № 3. С. 295–296.

8. *Александров А.Ю.* Об устойчивости равновесия нестационарных систем // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 205–209.
9. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 256 с.
10. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
11. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.
12. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
13. *Смирнов Е.Я.* Активное управление вращательным движением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 3. С. 5–10.
14. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312 с.
15. *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 288 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
19.12.1997