МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2000

УДК 531.38

© 2000 г. Ю.В. БАРКИН

# О ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ОБОБЩЕННО-ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Осуществляется общая постановка задачи о вращательном движении твердого тела в поле обобщенно-потенциальных сил. Получены канонические уравнения движения в переменных Эйлера, Андуайе и действие – угол (для решения задачи Эйлера–Пуансо). С помощью метода Гамильтона–Якоби получен общий интеграл задачи в случае когда коэффициенты при обобщенных скоростях потенциала зависят лишь от угла нутации (обобщенный случай Лагранжа).

**1. Постановка задачи.** Рассматривается вращательное движение абсолютно твердого тела $P$ вокруг его неподвижной точки в поле обобщенно-потенциальных сил. Пусть $Oxyz$ и $O\xi\eta\zeta$ – две основные декартовые системы координат с началом в точке $O$. Оси системы координат $xyz$ сохраняют фиксированные направления в пространстве. Оси координат $\xi$, $\eta$, $\zeta$ направлены по главным осям инерции тела $P$. Соответствующие им главные моменты инерции обозначим $A$, $B$ и $C$.

Предположим, что на каждый элемент массы тела $P$ с элементарным объемом $d\tau$ и радиус-вектором $r$ в системе координат $xyz$ действует сила [1]:

$$d\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(dU)}{\partial\dot{\mathbf{r}}^T}\right) - \frac{\partial(dU)}{\partial\mathbf{r}^T}$$

Здесь $dU$ – обобщенный потенциал, который является линейной функцией скорости элемента $d\tau$ в системе координат $Oxyz$, т.е.

$$dU = d\mathbf{A}\dot{\mathbf{r}} + dV \tag{1.1}$$

где $d\mathbf{A} = \mathbf{A}d\tau$ – элементарный векторный потенциал, $dV = v d\tau$ – элементарный скалярный потенциал. В общем случае векторный и скалярный потенциалы зависят от координат элемента $d\tau$ и времени

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r},\ t), \quad v = v(\mathbf{r},\ t) \tag{1.2}$$

Через $\Psi$, $\Theta$, $\Phi$ обозначим углы Эйлера (прецессии, нутации и собственного вращения), определяющие ориентацию осей тела $\xi\eta\zeta$ в системе координат $xyz$. Через $A = \|a_{ij}\|$ обозначим матрицу направляющих косинусов осей тела. Пусть $\mathbf{r} = (x, y, z)$ и $\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta, \zeta)$ – радиус-векторы и соответствующие декартовые координаты элемента в системах отсчета $Oxyz$ и $O\xi\eta\zeta$.

Воспользуемся теперь известными геометрическим и кинематическим соотношениями [1]:

$$\mathbf{r} = A\boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{v}$ – абсолютная скорость элемента $d\tau$, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения твердого тела. Проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси координат $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ определяются кинематическими уравнениями Эйлера [1]:

$$p = \sin\Phi\sin\Theta\dot{\Psi} + \cos\Phi\dot{\Theta} \tag{1.4}$$

$$q = \cos\Phi\sin\Theta\dot{\Psi} - \sin\Phi\dot{\Theta}, \quad r = \cos\Theta\dot{\Psi} + \dot{\Phi}$$

Подставим формулы (1.2), (1.3) в (1.1). В результате интегрирования по всему объему тела $\tau$, получим обобщенный потенциал рассматриваемой задачи

$$U = \iiint_\tau \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{A})d\tau + \iiint_\tau v\, d\tau \tag{1.5}$$

или

$$U = Pp + Qq + Rr + V \tag{1.6}$$

$$P = \iiint_\tau (\eta A_\zeta - \zeta A_\eta)d\tau,\ Q = \iiint_\tau (\zeta A_\xi - \xi A_\zeta)d\tau,\ R = \iiint_\tau (\xi A_\eta - \eta A_\xi)d\tau,\quad V = \iiint_\tau v d\tau \tag{1.7}$$

Здесь $A_\xi, A_\eta$ и $A_\zeta$ – проекции векторного потенциала на оси координат $\xi$, $\eta$ и $\zeta$, соответственно. Коэффициенты (1.7) являются функциями углов Эйлера и времени.

Формулы (1.4) позволяют представить $U$ линейной функцией обобщенных скоростей:

$$U = a\dot{\Psi} + b\dot{\Theta} + c\dot{\Phi} + d \tag{1.8}$$

$$a = Pa_{31} + Qa_{32} + Ra_{33},\quad b = \operatorname{cosec}\Theta(Pa_{32} - Qa_{31}),\quad c = R,\quad d = V \tag{1.9}$$

Как и величины (1.7) $a, b, c, d$ в общем случае являются функциями углов Эйлера и времени.

*Замечание*. Для задачи о движении заряженного тела в однородном магнитном поле [2–4] выражение обобщенного потенциала имеет вид (6), (7)[1], где

$$\begin{aligned} P &= \Omega_L(-Z_{11}\gamma_1 + Z_{12}\gamma_2 + Z_{13}\gamma_3) \\ Q &= \Omega_L(Z_{12}\gamma_1 + Z_{22}\gamma_2 + Z_{23}\gamma_3) \\ R &= \Omega_L(Z_{13}\gamma_1 + Z_{23}\gamma_2 - Z_{33}\gamma_3), \quad V = 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь $Z_{ij}$ – соответствующие компоненты (осевые моменты и произведения инерции) тензора зарядов тела, распределение которых в системе координат тела $P$ предполагается неизменным. Эти характеристики определяются формулами для осевых и центробежных моментов инерции тела, если в последних плотность распределения масс заменить плотностью распределения зарядов $\delta_z(\xi, \eta, \zeta)$. В (1.10) использованы другие обозначения направляющих косинусов $\gamma_i = a_{3i}$ ($i$ = 1, 2, 3); $\Omega_L$ – частота Лармора.

В этом случае векторный потенциал и обобщенный элементарный потенциал определяются формулами

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{H}\times\mathbf{r},\quad dU = -2\Omega_L\frac{\delta_Z}{Q}\mathbf{vA}d\tau$$

где $\mathbf{H}$ – вектор напряженности магнитного поля, $Q$ – суммарный заряд тела; $\Omega_L = HQ/(2cm)$, $c$ – скорость света, $H$ – модуль вектора $\mathbf{H}$.

Для задачи Кирхгофа о движении твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости [5] обобщенный потенциал может быть представлен квадратичной формой

---

[1] См.: *Баркин Ю.В., Нарбеков Н.А.* Некоторые вопросы динамики вращательного движения заряженного тела в магнитных полях. М., 1986. 75 с. – Деп. в ВИНИТИ 16.10.86, № 7285-В. МВТУ; *Баркин Ю.В., Борисов А.В.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа и родственных задач динамики твердого тела. М., 1989. 103 с. – Деп. в ВИНИТИ 26.07.89, № 5037-В. МВТУ.

относительно компонент векторов $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ и $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$:

$$U = (B\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\gamma}) + (C\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\gamma}) \tag{1.11}$$

где $B = \|b_{ij}\|$, $C = \|c_{ij}\|$ – некоторые постоянные матрицы.

Подчеркнем, что задача о вращении тела в обобщенно-потенциальном поле сил (и соответствующие уравнения движения) является более общей по сравнению с задачей Кирхгофа, так как потенциал может содержать не только линейные или квадратичные члены относительно направляющих косинусов (1.11), но и их более высокие степени. Например, это имеет место при движении заряженного тела в слабонеоднородном магнитном поле с напряженностью

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z}\right)_0 z + \ldots \tag{1.12}$$

где $H_0$ – постоянная составляющая напряженности, а значения частных производных в (1.12) вычисляются в некоторой данной точке пространства, например, при $x = y = z =$ $= 0$. Возможны и другие более сложные постановки задачи.

Обобщенный потенциал можно преобразовать к другому стандартному виду (1.8), (1.9) с коэффициентами

$$a = -\Omega_L(Z_{11}\gamma_1^2 + Z_{22}\gamma_2^2 + Z_{33}\gamma_3^2) + 2\Omega_L(Z_{12}\gamma_1\gamma_2 + Z_{13}\gamma_1\gamma_3 + Z_{23}\gamma_2\gamma_3)$$

$$b = -\Omega_L \operatorname{cosec}\Theta(Z_{11} - Z_{22})\gamma_1\gamma_2 + \Omega_L \operatorname{cosec}\Theta[Z_{12}(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) + (Z_{13}\gamma_2 - Z_{23}\gamma_1)\gamma_3]$$

$$c = \Omega_L(Z_{13}\gamma_1 - Z_{23}\gamma_2) - \Omega_L Z_{33}\gamma_3$$

**2. Канонические уравнения движения** Кинетическая энергия $T$, лагражиан $L$ и гамильтониан $H$ рассматриваемой задачи определяются формулами

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{G}) = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \\ L &= T - U = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - Pp - Qq - Rr - V \\ H &= T + V = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + V \end{aligned} \tag{2.1}$$

В выражении $T$ вектор кинетического момента вращательного движения тела $\mathbf{G}$ характеризуется следующими составляющими в системе координат $\xi\eta\zeta$:

$$G_\xi = Ap, \quad G_\eta = Bq, \quad G_\xi = Cr \tag{2.2}$$

Введем канонические импульсы сопряженные обобщенным координатам $\Psi$, $\Theta$, $\Phi$ по формулам:

$$\begin{aligned} p_\Psi &= \partial L / \partial \dot\Psi = (G_\xi - P)\gamma_i + (G_\eta - Q)\gamma_2 + (G_\zeta - R)\gamma_3 \\ p_\Theta &= \partial L / \partial \dot\Theta = \operatorname{cosec}\Theta[(G_\xi - P)\gamma_2 - (G_\eta - Q)\gamma_1] \\ p_\Phi &= \partial L / \partial \dot\Phi = G_\zeta - R \end{aligned} \tag{2.3}$$

Таким образом, в канонических переменных компоненты вектора кинетического момента определяются формулами

$$\begin{aligned} G_\xi &= P + p_\Theta \cos\Phi + \frac{\sin\Phi}{\sin\Theta}(p_\Psi - p_\Phi \cos\Theta) \\ G_\eta &= Q - p_\Theta \sin\Phi + \frac{\cos\Phi}{\sin\Theta}(p_\Psi - p_\Phi \cos\Theta) \\ G_\zeta &= R + p_\Phi \end{aligned} \tag{2.4}$$

а проекции вектора угловой скорости в соответствии с формулами (1.7), (1.9) можно представить в виде суммы компонент двух других векторов:

$$p = p_b + p_u, \quad q = q_b + q_u, \quad r = r_b + r_u \tag{2.5}$$

$$p_b = \frac{\cos ec\Theta}{A}[(p_\Psi - p_\Phi \cos\Theta)\sin\Phi + p_\Theta \sin\Theta\cos\Phi]$$

$$q_b = \frac{\cos ec\Theta}{B}[(p_\Psi - p_\Phi \cos\Theta)\cos\Phi - p_\Theta \sin\Theta\sin\Phi], \quad r_b = \frac{p_\Phi}{C} \tag{2.6}$$

$$p_u = \frac{\cos ec\Theta}{A}[(a - c\cos\Theta)\sin\Phi + b\cos\Phi\sin\Theta]$$

$$q_u = \frac{\cos ec\Theta}{B}[(a - c\cos\Theta)\cos\Phi - b\sin\Phi\sin\Theta], \quad r_u = \frac{c}{C} \tag{2.7}$$

Таким образом, при вращательном движении тела в силовом поле обобщенно-потенциальных сил вектор угловой скорости тела представим в виде суммы двух векторов

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_b + \boldsymbol{\omega}_u \tag{2.8}$$

где $\boldsymbol{\omega}_b$ – угловая скорость тела в отсутствии обобщенного силового поля, а $\boldsymbol{\omega}_u$ – дополнительная угловая скорость, обусловленная свойствами этого поля.

Формулы (2.1)–(2.8) позволяют теперь заменить выражение гамильтониана задачи в канонических переменных

$$\Psi, \Theta, \Phi, \quad p_\Psi, p_\Theta, p_\Phi \tag{2.9}$$

Соответствующие дифференциальные уравнения вращательного движения тела запишутся в виде

$$\frac{d(\Psi,\Theta,\Phi)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial(p_\Psi, p_\Theta, p_\Phi)}, \quad \frac{d(p_\Psi, p_\Theta, p_\Phi)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial(\Psi,\Theta,\Phi)} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
H = H_0 + H_1 + H_2 = {} & \frac{1}{2A}\cos ec^2\Theta[(p_\Psi - p_\Phi\cos\Theta)\sin\Phi + p_\Theta\sin\Theta\cos\Phi]^2 + \\
& + \frac{1}{2B}\cos ec^2\Theta[(p_\Psi - p_\Phi\cos\Theta)\cos\Phi - p_\Theta\sin\Phi\sin\Theta]^2 + \frac{1}{2C}p_\Psi^2 + \\
& + \cos ec^2\Theta\Bigg[(p_\Psi - p_\Phi\cos\Theta)(a - c\cos\Theta)\left(\frac{\sin^2\Phi}{A} + \frac{\cos^2\Phi}{B}\right) + \\
& + \sin\Theta\sin\Phi\cos\Phi\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)[b(p_\Psi - p_\Phi\cos\Theta) - p_\Theta(a - c\cos\Theta)] + \\
& + p_\Theta b\sin^2\Theta\left(\frac{\cos^2\Phi}{A} + \frac{\sin^2\Phi}{B}\right)\Bigg] + p_\Phi\frac{c}{C} + \frac{1}{2A}\cos ec^2\Theta[(a - c\cos\Theta)\sin\Phi + \\
& + b\cos\Phi\sin\Theta]^2 + \frac{1}{2B}\cos ec^2\Theta[(a - c\cos\Theta)\cos\Phi - b\sin\Phi\sin\Theta]^2 + \frac{1}{2C}c^2 + V(\Psi,\Theta,\Phi,t)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Формально здесь гамильтониан представлен в виде трех слагаемых: $H_0$ соответствует выражению кинетической энергии твердого тела, слагаемые $H_1$ и $H_2$ обусловлены влиянием обобщенного потенциального поля сил, действующих на тела, причем $H_2$ зависит лишь от координат, а $H_1$ является линейной функцией канонических импульсов.

**3. Интегрируемый случай (обобщенный случай Лагранжа)** Предположим, что обобщенно-потенциальное поле сил является стационарным и функции $a$, $b$, $c$ и $d = V$ зависят лишь от угла нутации $\Theta$, а тело является осесимметричным, т.е. $A = B$. При этих предположениях выражение гамильтониана задачи (2.10), (2.11) существенно упрощается:

$$H = \frac{1}{2A}\operatorname{cosec}^2\Theta[(p_\Psi - p_\Phi\cos\Theta)^2 + p_\Theta^2\sin^2\Theta] + \frac{1}{2C}p_\Phi^2 +$$
$$+\frac{1}{A}\operatorname{cosec}^2\Theta[(p_\Psi - p_\Phi\cos\Theta)(a(\Theta) - c(\Theta)\cos\Theta) + p_\Theta b(\Theta)\sin^2\Theta] + \frac{p_\Phi c(\Theta)}{C} +$$
$$+\frac{1}{2A}\operatorname{cosec}^2\Theta[(a(\Theta) - c(\Theta)\cos\Theta)^2 + b^2(\Theta)\sin^2\Theta] + \frac{c(\Theta)^2}{2C} + V(\Theta) \tag{3.1}$$

Соответствующее гамильтониану (3.1) уравнение Гамильтона – Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2A}\operatorname{cosec}^2\Theta\left(\frac{\partial S}{\partial \Psi} - \frac{\partial S}{\partial \Phi}\cos\Theta\right)^2 + \frac{1}{2A}\left(\frac{\partial S}{\partial \Theta}\right)^2 + \frac{1}{2C}\left(\frac{\partial S}{\partial \Phi}\right)^2 +$$
$$+\frac{1}{A}\operatorname{cosec}^2\Theta\left(\frac{\partial S}{\partial \Psi} - \frac{\partial S}{\partial \Phi}\cos\Theta\right)(a(\Theta) - c(\Theta)\cos\Theta) + \frac{1}{A}\frac{\partial S}{\partial \Phi}b(\Theta) + \tag{3.2}$$
$$+\frac{1}{C}\frac{\partial S}{\partial \Phi}c(\Theta) + \frac{1}{2A}\operatorname{cosec}^2\Theta[(a(\Theta) - c(\Theta)\cos\Theta)^2 + b^2(\Theta)\sin^2\Theta] + \frac{1}{2C}c(\Theta)^2 + V(\Theta) = 0$$

легко интегрируется методом разделения переменных.

Полный интеграл уравнения (3.2), содержащий три произвольных постоянных интегрирования $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, определяется формулами

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_3\Phi + \alpha_2\Psi - \int b(\Theta)d\Theta \pm \int\sqrt{F(\Theta)}d\Theta \tag{3.3}$$

$$F(\Theta) = 2A\alpha_1 - \frac{A}{C}(\alpha_3 + c(\Theta))^2 - 2AV(\Theta) - \frac{[\alpha_2 + a(\Theta) - (\alpha_3 + c(\Theta)\cos\Theta)]^2}{\sin^2\Theta}$$

Общий интеграл рассматриваемой задачи, содержащий 6 независимых (сопряженных) постоянных Якоби $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ и $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, запишется в следующем виде:

$$-t \pm \int\frac{-Ad\Theta}{\sqrt{F(\Theta)}} = -\beta_1$$

$$\Psi \pm \int\frac{\alpha_3 - \alpha_2 - a(\Theta) + c(\Theta)\cos\Theta}{\sin^2\Theta\sqrt{F(\Theta)}}d\Theta = -\beta_2 \tag{3.4}$$

$$\Phi \pm \int\frac{\alpha_3 - \alpha_2 - a(\Theta) + c(\Theta)\cos\Theta - \frac{A}{C}(a(\Theta) + c(\Theta))\sin^2\Theta}{\sin^2\Theta\sqrt{F(\Theta)}}d\Theta = -\beta_3$$

$$p_\Psi = \alpha_2, \quad p_\Phi = \alpha_3, \quad p_\Theta = -b(\Theta) \pm \sqrt{F(\Theta)}$$

Обращение интегралов (3.4) целесообразно производить для конкректных моделей обобщенно-потенциального поля.

Несмотря на свою простоту указанный интегрируемый случай носит достаточно общий характер и как частные случаи интегрируемости включает в себя:

*1*. Случай Лагранжа в задаче о движении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой.

*2*. Случаи интегрируемости задачи о вращении осесимметричного тела с закрепленной точкой в центральном ньютоновском поле и задачи Бруна [6, 7].

*3*. Случай интегрируемости задачи о вращении осесимметричного тела в полости другого осесимметричного тела [8].

*4*. Случай интегрируемости Гриоли – Голдстейна в задаче о движении заряженного тела в однородном магнитном поле [2, 3]. В этом варианте задачи тело представляет собой осесимметричное тело в каждой точке которого отношение плотности заряда к плотности масс есть величина постоянная[2].

Последний из указанных случаев имеет место при значениях компонент тензора зарядов $Z_{11} = Z_{22} \neq Z_{33}$, $Z_{12} = Z_{13} = Z_{23} = 0$ для осесимметричного тела. При этом $a(\Theta) = -\Omega_L(Z_{11}\sin^2\Theta + Z_{33}\cos^2\Theta)$, $b(\Theta) = 0$, $c(\Theta) = -\Omega_L Z_{33}\cos\Theta$.

**4. Уравнения движения в переменных Андуайе и действие – угол.** Для исследования возмущенных вращательных движений тела целесообразно использовать уравнения в переменных Андуайе, а также действие – угол для задачи Эйлера – Пуансо.

Переменные Андуайе вводятся по известным формулам канонического преобразования от переменных (2.9):

$$l = \Psi - \arccos\frac{H - L\cos\Theta}{\sin\Theta\sqrt{G^2 - L^2}}, \qquad L = p_\Psi$$

$$g = \arccos\frac{HL - G^2\cos\Theta}{\sqrt{G^2 - L^2}\sqrt{G^2 - H^2}}, \qquad G = \sqrt{p_\Theta^2 + p_\Phi^2 + \frac{(p_\Phi - p_\Psi\cos\Theta)^2}{\sin^2\Theta}}$$

$$h = \Phi - \arccos\frac{L - H\cos\Theta}{\sin\Theta\sqrt{G^2 - L^2}}, \qquad H = p_\Phi \tag{4.1}$$

Следует отметить, что переменные (4.1) связаны не с полным вектором кинетического момента, а с его составляющей в отсутствии силового поля.

В новых переменных уравнения вращательного движения имеют следующий канонический вид:

$$\frac{d(l,g,h)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial(L,G,H)}, \qquad \frac{d(L,G,H)}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial(l,g,h)} \tag{4.2}$$

$$F = F_0 + F_1 \tag{4.3}$$

$$F_0 = \frac{1}{2}\left[(G^2 - L^2)\left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right) + \frac{L^2}{C}\right] \tag{4.4}$$

$$F_1 = Ap_b p_u + Bq_b q_u + Cr_b r_u + \tfrac{1}{2}(Ap_u^2 + Bq_u^2 + Cr_u^2) + V(\Psi, \Theta, \Phi, t) \tag{4.5}$$

Все слагаемые функции (4.3)–(4.5) выражаются через переменные Андуайе с помощью формул (2.6), (2.7), (4.1) и формул:

$$Ap_b = \sqrt{G^2 - L^2}\sin l, \quad Bq_b = \sqrt{G^2 - L^2}\cos l, \quad Cr_b = L \tag{4.6}$$

Выполним теперь каноническое преобразование к переменным действие – угол $I_i$; $\varphi_i$ $(i = 1, 2, 3)$ [19]:

$$L = G\frac{\pi\varkappa}{K\sqrt{\varkappa^2 + \lambda^2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos 2m\varphi_1}{ch(2md)}(1 + \delta_{m0})^{-1}, \quad G = I_2, \quad H = I_3$$

$$l = \varphi_1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{ch(m\sigma)}{m\,ch(2md)}\sin 2m\varphi_1 \tag{4.7}$$

[2] Общий интеграл этой задачи, построенный методом Гамильтона – Якоби, приводится в работе Ю.В. Баркина, Н.А. Нарбекова, цитируемой в сноске на стр. 21.

$$g = \varphi_2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{sh(m\sigma)}{msh(2md)} \sin 2m\varphi_1, \quad h = \varphi_3$$

$$\delta_{00} = 1, \quad \delta_{m0} = 0 \text{ для } m \geqslant 1$$

$$\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}, \quad d = \frac{\pi K(\lambda')}{2K(\lambda)}, \quad \sigma = \frac{\pi}{2K(\lambda)} F\left(\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{\lambda}, \lambda'\right), \quad \varkappa^2 = \frac{C(A-B)}{A(B-C)}$$

модуль $0 < \lambda < 1$ определяется как функция переменных действия в результате обращения уравнения ($K$, $F$, $\Pi$ – соответствующие эллиптические интегралы):

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{2\varkappa\sqrt{1+\varkappa^2}}{\pi\sqrt{\varkappa^2+\lambda^2}} \left\{ \frac{\varkappa^2+\lambda^2}{\varkappa^2} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \varkappa^2, \lambda\right) - \frac{\lambda^2}{\varkappa^2} K(\lambda) \right\}$$

В переменных действие – угол уравнения вращательного движения тела в обобщенно-потенциальном поле сил можно записать в канонической форме

$$\frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial(I_1, I_2, I_3)}, \quad \frac{d(I_1, I_2, I_3)}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)} \tag{4.8}$$

$$F = F_0 + F_1 \tag{4.9}$$

$$F_0 = \frac{I_2^2}{2A}\left[1 + \frac{A-C}{C} \frac{\varkappa^2}{(\lambda^2+\varkappa^2)}\right]$$

где функция $F_1$ выражается в терминах переменных действие – угол с помощью известных формул.

Уравнения (4.2)–(4.7) и (4.8)–(4.10) открывают широкие возможности для применения широкого класса методов теории возмущений в рассматриваемой задаче[3].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Ольховский И.И.* Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970. 447 с.
2. *Grioli G.* Movimenti dinamicamente possibili per un solido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla // Atti. Acc. Naz. dei Lincei. Rend. 1957. Ser. 8. V. 22, Fasc. 4. P. 459–463.
3. *Goldstein H.* The classical motion of a rigid charged body in a magnetic field. // Amer. J. Physics. 1951. V. 19. № 2. P. 100–109.
4. *Лунев В.В.* Интегрируемые случаи в задаче о движении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой в поле сил Лоренца // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 4. С. 824–826.
5. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
6. *Архангельский Ю.А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
7. *Белецкий В.В.* Об одном случае движения твердого тела около закрепленной точки в ньютоновском поле сил // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 1. С. 175–178.
8. *Barkin Yu.V.* Integrability and integrable cases of some problems of rotational motion of the celestial bodies // IAU Colloq. 165. Dynamics and Astrometry of Natural and Artificial Celestial Bodies, Poznan, Poland, 1996. Book of Abstracts. Paris: Bureau Longitudes, 1996, P. 16.
9. *Barkin Yu.V.* Unperturbed Chandler motion and perturbation theory of the rotation motion of deformable celestial bodies // Astronomical and Astrophysical Transactions. 1998. V. 17. Issue 3. P. 179–220.



Москва

Поступила в редакцию
3.11.1997


---

[3] Первые иллюстрации применения этих методов в задачах о движении заряженного тела в магнитных полях и о движении твердого тела в безграничном объеме жидкости даны в работах, указанных в сноске на стр. 21.