МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2000

УДК 539.3:534.1

© 2000 г. В.Б. ПОРУЧИКОВ

РЕАКЦИЯ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА ИМПУЛЬСНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

В современной технике часто используются тонкостенные оболочки и конструкции. Поэтому задачи динамики оболочек получили широкое распространение. Достаточно исследованы, например, задачи взаимодействия деформируемых тел с окружающей средой. Обзоры работ в этом направлении содержатся в [1,2]. При решении некоторых динамических задач в качестве уравнений, описывающих поведение оболочки, используются уравнения, основанные на гипотезах Кирхгофа–Лява. Однако, в тех случаях, когда динамические процессы в оболочках связаны с распространением волн, т.е. когда речь идет о процессах, возникающих в результате действия нагрузок ударного типа (например, при взрывных процессах и импульсных воздействиях, что бывает, в частности, при возникновении природных и техногенных катастроф), следует применять уравнения типа Тимошенко, учитывающие инерцию вращения и влияние поперечного сдвига [3,4] и являющиеся, с математической точки зрения, уравнениями гиперболического типа. В настоящей работе рассматривается задача об импульсном воздействии на бесконечную тонкую упругую цилиндрическую оболочку кругового сечения, находящуюся в вакууме и описываемую уравнениями типа Тимошенко. Для малых времен получено асимптотическое решение задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим в линейной постановке тонкую упругую бесконечную цилиндрическую оболочку (фиг. 1), подверженную импульсному нагружению на S – части ее боковой поверхности. В рамках оболочечных уравнений типа Тимошенко, учитывающих инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига, поведение оболочки в вакууме описывается следующей системой уравнений в безразмерных переменных [4]:

$$\begin{aligned}&\left[(1+a^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}-k^2\right)+\sigma_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]u_1+\\&+\left[a^2\left(-\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}+\sigma_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)+k^2\right]u_2+\\&+\left[(1+a^2)(1+k^2)\frac{\partial}{\partial\Theta}\right]u_3+\sigma_2\frac{\partial^2}{\partial\Theta\partial z}u_4=0\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}&\left[a^2\left(-\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}+\sigma_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)+k^2\right]u_1+\\&+\left[a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}+\sigma_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}-k^2-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)-k^2\right]u_2-\end{aligned}\tag{1.2}$$

$$-[(1+a^2)k^2+a^2]\frac{\partial}{\partial\Theta}u_3+a^2\sigma_z\frac{\partial^2}{\partial\Theta\partial z}u_5=0$$

$$\left[(1+a^2)(1+k^2)\frac{\partial}{\partial\Theta}\right]u_1-[(1+a^2)k^2+a^2]\frac{\partial}{\partial\Theta}u_2+$$

$$+\left[(1+a^2)\left(-k^2\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}+1\right)-k^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]u_3+\nu\frac{\partial}{\partial z}u_4-k^2\frac{\partial}{\partial z}u_5=0 \qquad (1.3)$$

$$\sigma_z\frac{\partial^2}{\partial\Theta\partial z}u_1+\nu\frac{\partial}{\partial z}u_3+\left[(1+a^2)\sigma_1\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]u_4+$$

$$+\left[a^2\left(-\sigma_1\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\right]u_5=0 \qquad (1.4)$$

$$a^2\sigma_z\frac{\partial^2}{\partial\Theta\partial z}u_2-k^2\frac{\partial}{\partial z}u_3+\left[a^2\left(-\sigma_1\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\right]u_4+$$

$$+\left[a^2\left(\sigma_1\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\right]u_5=0 \qquad (1.5)$$

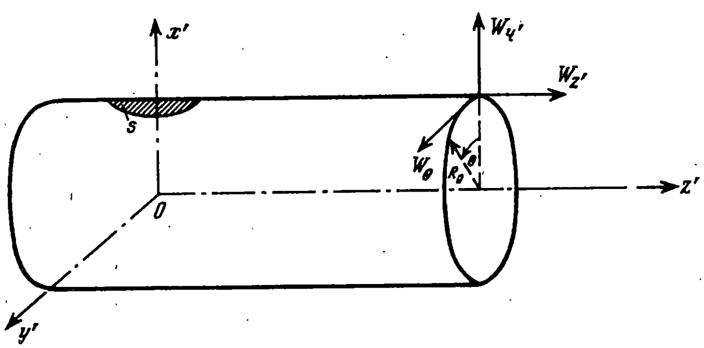
$$r=r'/R_0,\quad x=x'/R_0,\quad y=y'/R_0,\quad z=z'/R_0$$

$$x=r\cos\Theta,\quad y=r\sin\Theta,\quad \tau=\frac{c_{10}t}{R_0},\quad u_1=\frac{W_\Theta}{R_0}$$

$$u_3=\frac{W_{r'}}{R_0},\quad u_4=\frac{W_{z'}}{R_0},\quad k=\frac{c_{20}}{c_{10}},\quad c_{10}^2=\frac{E}{\rho_1(1-\nu^2)}$$

$$c_{20}^2=\frac{Ek_T}{2\rho_1(1+\nu)},\quad a=\frac{h}{R_0\sqrt{12}},\quad \sigma_1=\frac{1-\nu}{2},\quad \sigma_2=\frac{1+\nu}{2}$$

Здесь x', y', z' – неподвижные декартовы координаты; t – время; r', Θ, z' – цилиндрические координаты; $W_\Theta, W_{r'}, W_{z'}$ – перемещения точки, лежащей на срединной поверхности, вдоль осей Θ, r' и z'; u_2, u_5 – углы поворота нормалей к срединной поверхности оболочки в плоскостях $r'\,\Theta$ и $r'\,z'$; ρ_1 – плотность материала оболочки; R_0, h – радиус срединной поверхности оболочки и ее толщина, c_{10}, c_{20} – скорости распространения фронтов волн по срединной поверхности оболочки, k_T – численный



Фиг. 1

коэффициент сдвига; ν, E – коэффициент Пуассона и модуль Юнга материала оболочки. Начальные условия таковые:

$$
\begin{aligned}
& u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 0 \ (\tau = 0) \\
& \partial u_1 / \partial\tau = \partial u_2 / \partial\tau = \partial u_4 / \partial\tau = \partial u_5 / \partial\tau = 0 \ (\tau = 0) \\
& \partial u_3 / \partial\tau = -V \cos\Theta H(f(z,\Theta)) \ (\tau = 0) \\
& V = V_1 / c_{10}, \ c_{10} = \sqrt{E / \rho_1 (1-\nu^2)}
\end{aligned}
\qquad (1.6)
$$

где V_1 – размерная скорость, $f(z, \Theta) > 0$ – неравенство, определяющее область S на поверхности оболочки, в точках которой в момент $\tau = 0$ приложена скорость $\partial u/\partial t = V\cos\Theta$. Вне области S имеем $f(z, \Theta) < 0$; $H(x)$ – функция Хевисайда от аргумента x.

2. Аналитическое решение. Применим к системе (1.1)–(1.5) преобразование Лапласа по τ:

$$\bar{u}_k(s,z,\Theta) = \int\limits_0^\infty u_k(\tau,z,\Theta) e^{-s\tau} d\tau, \quad \operatorname{Re} s > 0 \ (k = 1-5)$$

с учетом начальных условий (1.6), а затем преобразование Фурье по z:

$$\bar{u}_k^*(s,p,\Theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_k(\tau,z,\Theta) e^{ipz} dz, \quad |\operatorname{Im} p| < \operatorname{Re} s$$

и, наконец, конечное преобразование Фурье по углу Θ:

$$\bar{u}_{kn}^*(s,p) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \bar{u}_k^*(s,p,\Theta) e^{in\Theta} d\Theta \ (n = 0,1,2,\ldots)$$

Полагая при этом, что $f(z, \Theta)$ является четной функцией Θ, будем искать решение для u_1 и u_2 как нечетных по Θ функции, а для u_3, u_4, u_5 – как четных функций Θ. Тогда следует учесть, что

$$u_1 = u_2 = \frac{\partial u_3}{\partial\Theta} = \frac{\partial u_4}{\partial\Theta} = \frac{\partial u_5}{\partial\Theta} = 0 \ (\Theta = \pm\pi)$$

В результате преобразования Фурье по Θ от функций $\bar{u}_1^*$ и $\bar{u}_2^*$ свелись бы к преобразованиям:

$$U_k = (-i)\bar{u}_{kn}^*(s,p) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \bar{u}_k^*(s,p,\Theta) \sin n\Theta d\Theta \ (k = 1,2)$$

а от функций $\bar{u}_{kn}^*$ ($k = 3$–5) – к преобразованиям

$$U_k = \bar{u}_{kn}^*(s,p) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \bar{u}_k^*(s,p,\Theta) \cos n\Theta d\Theta \ (k = 3-5)$$

Тогда система (1.1–1.5) после применения преобразований и деления первых двух уравнений на i свелась к алгебраической системе:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{5} a_{jk} U_j = b_k \ (k = 1-5) \\
& b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = 0 \\
& b_3 = \Phi_n \left(= \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in\Theta} d\Theta \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_3}{\partial\tau} e^{ipz} dz \right)
\end{aligned}
\qquad (2.1)
$$

$$
\begin{aligned}
&a_{11}=-[(1+a^2)(n^2+k^2)+\sigma_1 p^2+s^2]\\
&a_{12}=a^2[n^2+k^2-s^2-\sigma_1 p^2]+k^2\\
&a_{13}=-(1+a^2)(1+k^2)n,\quad a_{14}=\sigma_2 nip,\quad a_{15}=0\\
&a_{21}=a^2[n^2+k^2-s^2-\sigma_1 p^2]+k^2\\
&a_{22}=-a^2[n^2+k^2+s^2+\sigma_1 p^2]-k^2\\
&a_{23}=n[(1+a^2)k^2+a^2],\quad a_{24}=0,\quad a_{25}=a^2\sigma_2 nip\\
&a_{31}=n(1+a^2)(1+k^2),\quad a_{32}=-n[(1+a^2)k^2+a^2]\\
&a_{33}=(1+a^2)(1+k^2n^2)+s^2+k^2p^2,\quad a_{34}=-\nu ip\\
&a_{35}=k^2 ip,\quad a_{41}=-\sigma_2 nip,\quad a_{42}=0,\quad a_{43}=-\nu ip\\
&a_{44}=-[(1+a^2)n^2+p^2+s^2],\quad a_{45}=a^2[\sigma_1 n^2-p^2-s^2]\\
&a_{51}=0,\quad a_{52}=-a_2^2\sigma_2 nip,\quad a_{53}=k^2 ip\\
&a_{54}=a^2[\sigma_1 n^2-p^2-s^2],\quad a_{55}=-a^2[\sigma_1 n^2+p^2+s^2]
\end{aligned}
\qquad (2.2)
$$

Решая систему (2.1), находим для $\bar{u}_{3n}^*$ выражение:

$$\bar{u}_{3n}^*+U_3=\frac{\phi_n}{\nabla_n}\tilde{\nabla}_3 \qquad (2.3)$$

где ∇_n – определитель системы (2.1) $(\nabla_n \equiv |a_{ik}|)$, а $\tilde{\nabla}_3$ определяется выражением

$$\tilde{\nabla}_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15}\\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25}\\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45}\\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55}\end{vmatrix} \qquad (2.4)$$

Представляет интерес случай точечного сосредоточенного воздействия при $\tau = 0$ (сосредоточенного импульса), когда при $S \to 0$ $VS \to K = \text{const}$. В этом случае начальное условие для $\partial u_3/\partial\tau$ в (1.6) принимает вид

$$\partial u_3/\partial\tau=-K\delta(\Theta)\delta(z)\quad (\tau=0) \qquad (2.5)$$

В результате, (2.3) в этом случае приводится к виду

$$\bar{u}_{3n}^*=-\frac{K}{\nabla_n}\tilde{\nabla}_3\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad (2.6)$$

где $\tilde{\nabla}_3$ и ∇_n определяются в (2.3) и (2.4). В (2.6) для параметров преобразований s и p имеем

$$\operatorname{Re}s>0,\quad |\operatorname{Im}p|<\operatorname{Re}s \qquad (2.7)$$

Для изображения по Лапласу $\bar{u}_3 \equiv \bar{u}_3(s,\ z,\ \Theta)$ с помощью (2.6) получаем

$$\bar{u}_3=-\frac{K}{\pi\sqrt{2\pi}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ipz}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\delta_{0n}}{2}\right)\frac{\tilde{\nabla}_3}{\nabla_n}\cos n\Theta\right]dp \qquad (2.8)$$

где $\delta_{0n} = 1$ ($n = 0$), $\delta_{0n} = 0$ ($n \neq 0$). Применяя к (2.8) обратное преобразование по s, получаем формальное решение задачи:

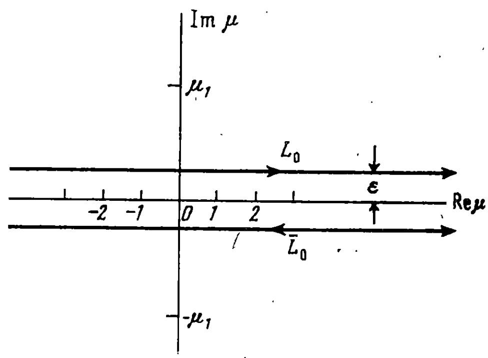
$$u_3(\tau,\ z,\ \Theta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varepsilon-\pi\infty}^{\varepsilon+\pi\infty} \bar{u}_3 e^{s\tau} ds \quad (\varepsilon > 0) \tag{2.9}$$

3. Асимптотика решения для малых времен. Поскольку при ударных воздействиях особенно важен начальный этап, то для получения асимптотики решения $u_3(\tau, z, \Theta)$ при $\tau \to 0$ найдем асимптотику $\bar{u}_3(\tau,\ z,\ \Theta)$ из (2.8) при $s \to \infty$. Можно показать, что

$$\frac{\tilde{\nabla}_3}{\nabla_n} = \frac{1}{(1+a^2)(1+k^2n^2)+s^2+k^2p^2}[1+f_0(s,\ p,\ n)] \tag{3.1}$$

$$|f_0(s,\ p,\ n)| < \frac{M_0}{(|p|^2+M_1)(n^2+M_2)|s|^2} \quad (|s| \to \infty) \tag{3.2}$$

Следовательно, для исследования поведения решения $u_3(\tau, z, \Theta)$ при малых τ доста-



Фиг. 2

точно исследовать поведение (2.8) при $s \to \infty$, когда в (3.1) функцией $f(s, p, n)$ пренебрегают, т.е. необходимо при $s \to \infty$, рассмотреть интеграл

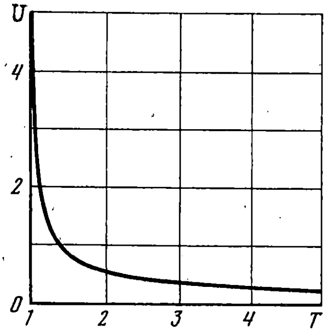
$$\bar{u}_3(s,\ z,\ \Theta) = \frac{-K}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ipz}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\delta_{0n}/2)\cos n\Theta}{(1+a^2)(1+k^2n^2)+s^2+k^2p^2}\right]dp \tag{3.3}$$

С помощью преобразования Зоммерфельда – Ватсона [5] ряд в (3.3) преобразуем в контурный интеграл (фиг. 2) и тогда $\bar{u}_3$ из (3.3) принимает вид ($-\pi < \Theta < \pi$):

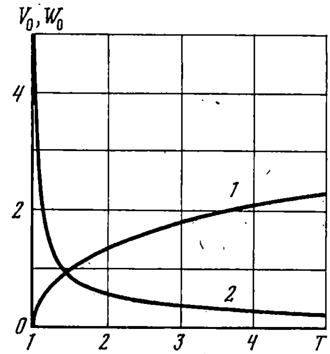
$$\bar{u}_3(s,\ z,\ \Theta) = \frac{K}{8\pi^2 i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ipz}dp \int\limits_{L_0+\bar{L}_0} \frac{\cos[(\pi-|\Theta|)\mu]d\mu}{[(1+a^2)(1+k^2\mu^2)+s^2+k^2p^2]\sin\pi\mu} \tag{3.4}$$

где контур $L_0(\bar{L}_0)$ проходит в полосе $0 < I_m\mu < I_m\mu_1 (-I_m\mu_1 < I_m\mu < 0)$, а μ_1, $(-\mu_1)$ – корни уравнения $(1+a^2)(1+k^2\mu^2)+s^2+k^2p^2 = 0$. Учитывая четность подынтегральной функции по μ, можно формулу (3.4) переписать в виде интеграла по верхнему контуру $L_0(|\Theta| < \pi)$:

$$\bar{u}_3(s,\ z,\ \Theta) = \frac{K}{4\pi^2 i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ipz}dp \int\limits_{L_0} \frac{\cos[(\pi-|\Theta|)\mu]d\mu}{[(1+a^2)(1+k^2\mu^2)+s^2+k^2p^2]\sin\pi\mu} \tag{3.5}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Поскольку за контур L_0 можно взять прямую $(-\infty + \varepsilon i, +\infty + \varepsilon i)$, где $\varepsilon > 0$ (фиг. 2), то раскладывая $\cos[(\pi - |\Theta|)\mu]/\sin \pi\mu$ по степеням убывающих экспонент, получаем

$$\frac{\cos[(\pi - |\Theta|)\mu]}{\sin \pi\mu} = -ie^{|\Theta|\mu i}[1 + e^{2(\pi-|\Theta|)\mu i} + e^{2\pi\mu i} + O(e^{2(2\pi-|\Theta|)\mu i})] \tag{3.6}$$

Считая для простоты, что s является действительной положительной величиной, заменяя переменную p на η $(p = s\eta)$ и заменяя переменную μ на ζ $(\mu = s\zeta)$, приводим (3.5) с учетом (3.6) к следующему виду:

$$\bar{u}_3(s, z, \Theta) = \frac{-K}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\eta z}d\eta \int_{l_0} \frac{e^{|\Theta|s\zeta i}[1 + e^{2(\pi-|\Theta|)s\zeta i} + e^{2\pi s\zeta i} + O(e^{2(2\pi-|\Theta|)s\zeta i})]d\zeta}{(1+a^2)k^2\zeta^2 + k^2\eta^2 + 1 + (1+a^2)/s^2} \tag{3.7}$$

где контур l_0 проходит параллельно действительной оси от $-\infty$ до $+\infty$, но выше нее ($\operatorname{Im} \zeta > 0$). Учитывая, что вычеты в интеграле по ζ в нулях знаменателя приводят к тому, что экспоненты в квадратных скобках в числителе приводят к запаздыванию (т.е. дают волны, которые приходят в рассматриваемую точку оболочки z, при $\tau > 2\pi - |\Theta|$), то при $\tau < 2\pi - |\Theta|$ $(|\Theta| < \pi)$, следует оставить в квадратной скобке только единицу. Пренебрегая также членом $(1 + a^2)/s^2$ в знаменателе в (3.7) (ибо он при $\tau \to 0$ приводит к члену порядка $O(\tau^2)$ по сравнению с оставшимися), окончательно приводим (3.7) к интегралу

$$\bar{u}_3(s, z, \Theta) = \frac{-K}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\eta z}d\eta \int_{l_0} \frac{e^{|\Theta|s\zeta i}d\zeta}{(1+a^2)k^2(\zeta - \zeta_1 i)(\zeta + \zeta_1 i)} \tag{3.8}$$

$$\zeta_1 = \sqrt{(1+k^2\eta^2)/(1+a^2)k^2} > 0$$

Деформируя контур l_0 в области $\operatorname{Im} \zeta > 0$ и учитывая при этом вычет в точке $\zeta_1 i$, получаем интеграл, который с учетом четности по z и можно представить в виде

$$\bar{u}_3(s, z, \Theta) = \frac{-K}{4\pi k\sqrt{1+a^2}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(i\eta|z| + |\Theta|\zeta_1)s}d\eta}{\sqrt{1+k^2\eta^2}} =$$

$$= \frac{-K}{2\pi k^2\sqrt{1+a^2}} K_0\left[sk^{-1}\sqrt{z^2 + \frac{\Theta^2}{1+a^2}}\right] \tag{3.9}$$

где $K_0(x)$ – функция Макдональда нулевого порядка от x. Применяя обратное преобразование Лапласа по s, получаем

$$u_3(\tau,\ z,\ \Theta) = \frac{-K}{2\pi k^2\sqrt{1+a^2}} \frac{H(\tau - k^{-1}\sqrt{z^2+\Theta^2/(1+a^2)})}{\sqrt{\tau^2 - k^{-2}(z^2+\Theta^2/(1+a^2))}} \quad (3.10)$$

Интегрируемая математическая особенность на фронте волны, идущей от точки возмущения $\Theta = 0$, $z = 0$, связана с идеализированным характером приложенного сосредоточенного воздействия (сосредоточенный импульс). График (3.10) представлен на фиг. 3. Здесь

$$T = \frac{\tau k\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{\Theta^2+(1+a^2)z^2}},\quad U = -\frac{2\pi k\sqrt{\Theta^2+(1+a^2)z^2}}{K}u_3$$

В случае же внезапно приложенной сосредоточенной силы (когда условие (2.5) заменяется нулевым условием $\partial u_3/\partial\tau = 0$ $(\tau = 0)$, а в правой части уравнения (1.3) добавляется сосредоточенная в точке воздействие (сила) F_3, где $F_3 = -KH(\tau)\delta(\Theta)\delta(z)$), решение при $\tau \to 0$ для u_3 получается из (3.10) интегрированием по τ от 0 до ∞:

$$u_3(\tau,\ z,\ \Theta) = \frac{-K}{2\pi k^2\sqrt{1+a^2}}\ln\left(\frac{\tau k}{\sqrt{z^2+\Theta^2/(1+a^2)}} + \sqrt{\frac{\tau^2k^2}{z^2+\Theta^2(1+a^2)} - 1}\right)\times$$

$$\times H\left(\frac{\tau k}{\sqrt{z^2+\Theta^2(1+a^2)}} - 1\right) \quad (3.11)$$

Как видно из (3.11), в рассматриваемой точке, не совпадающей с точкой приложенного воздействия, прогиб на фронте непрерывен, в то время как скорость прогиба $\partial u_3/\partial\tau$, описываемая правой частью формулы (3.10) имеет на фронте особенность вида $\varepsilon^{-1/2}$. Графики прогиба V_0 (3.11) (кривая *1*) и скорости прогиба W_0 (кривая *2*) представлены на фиг. 4. Здесь T то же, что и на фиг. 3; $V_0 = -2\pi k^2\sqrt{1+a^2}u_3/K$, $W_0 = \partial V_0/\partial T$. Заметим, что в (3.10), (3.11) получены старшие члены асимптотик. Дальнейшие члены асимптотик при $\tau \to 0$ можно искать, оставляя следующие по порядку члены асимптотики при $s \to \infty$ (Re $s > 0$) в (3.1). Аналогичным образом можно искать асимптотики при малых τ для других функций u_1, u_2, u_4, u_5.

Работа выполнена при содействии РФФИ (проект 98-01-00779).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вестяк А.В., Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 5. С. 69–148.
2. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д.* Методы расчета оболочек. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. Т. 5. Киев: Наук. думка, 1982. 400 с.
3. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.
4. *Метсавээр Я.А., Векслер Н.Д., Стулов А.С.* Дифракция акустических импульсов на упругих телах. М.: Наука, 1979. 239 с.
5. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 424 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.11.1998