МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2000

УДК 539.376

© 2000 г. И.Ю. ЦВЕЛОДУБ

ВОЗМОЖНО ЛИ РАЗРУШЕНИЕ В УСЛОВИЯХ РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ?

Исследуется процесс релаксации напряжений в предварительно растянутом стержне, длина которого затем поддерживается постоянной. Стержень изготовлен из разупрочняющегося материала, одноосная ползучесть которого описывается известными уравнениями Ю.Н. Работнова [1], содержащими параметр поврежденности. Показано, что в зависимости от знака некоторого выражения, содержащего модуль Юнга, комбинацию постоянных, входящих в упомянутые уравнения, и начальное напряжение, ответ на поставленный в названии статьи вопрос может быть как отрицательным, так и положительным. Последнее, в частности, возможно для некоторых классов хрупких материалов.

С использованием приближенного подхода, аналогичного [1, 2], проводится обобщение полученных результатов на случай релаксации напряжений в элементах объемных конструкций, когда приток энергии извне отсутствует. В качестве примера простейшей конструкции рассмотрена трехстержневая ферма, для которой дан точный ответ на сформулированный выше вопрос.

1. Рассмотрим изотермический процесс релаксации напряжений в однородном стержне, к которому в момент $t = 0$ была приложена растягивающая нагрузка, вызвавшая мгновенную деформацию $\varepsilon_0 = \sigma_0 E^{-1} + \varepsilon_0^p$, которая при $t > 0$ остается неизменной за счет фиксации длины стержня. Здесь E – модуль Юнга, σ_0 и ε_0^p – начальные напряжение и пластическая деформация соответственно. С течением времени за счет роста деформации ползучести ε^c будет происходить уменьшение напряжения σ (т.е. разгрузка), следовательно, приращение пластической деформации $\Delta\varepsilon^p = 0$. Поэтому, считая, что $\varepsilon_0^c = 0$, будем иметь при $t > 0$:

$$\sigma E^{-1} + \varepsilon^c = \sigma_0 E^{-1} \tag{1.1}$$

Материал стержня – разупрочняющийся в процессе ползучести, так что соответствующие уравнения при $\sigma \geqslant 0$ имеют вид, аналогичный [1]:

$$\eta = B_1 \sigma^n (1-\omega)^{-m}, \quad \dot{\omega} = B_2 \sigma^p (1-\omega)^{-m} \tag{1.2}$$

где $\eta = \dot{\varepsilon}^c$ – скорость деформации ползучести; ω $(0 \leqslant \omega \leqslant 1)$ – параметр поврежденности ($\omega = 0$ для недеформированного состояния материала при $t = 0$ и $\omega = 1$ в момент t_* его разрушения); B_1, B_2, m, n, p – положительные константы, причем $n \geqslant 1$.

(Заметим, что если исходные уравнения ползучести имеют более общий вид [1]:

$$\eta = B_1 \sigma^n (1-\Omega)^{-M}, \quad \dot{\Omega} = B\sigma^p (1-\Omega)^{-q}$$

куда входят уже не 5, а 6 постоянных, то путем замены [3]:

$$1-\omega=(1-\Omega)^{q+1-M}$$

они сводятся к (1.2), где $m = M/(q+1-M)$ и $B_2 = B(q+1-M)$, при условии $q+1-M >$ > 0, которое, как легко видеть, эквивалентно предположению о том, что при $\sigma = \text{const}$ деформация ползучести в момент разрушения, вычисленная по этим более общим соотношениям, конечна [1].)

Из (1.2) следует, что $\omega = \omega(t)$ – возрастающая функция, которую можно выбрать в качестве независимой переменной (вместо времени t), т.е. считать, что $\sigma = \sigma(\omega)$ и $\varepsilon^c =$ $= \varepsilon^c(\omega)$. Тогда из (1.1) будем иметь

$$\sigma' E^{-1} + B_1 B_2^{-1} \sigma^{n-p} = 0$$

где учтено, что $\varepsilon^{c'} = B_1 B_2^{-1} \sigma^{n-p}$ (штрих означает дифференцирование по ω). Отсюда и из начального условия $\sigma|_{\omega=0} = \sigma_0$ найдем

$$\sigma = \sigma_0 [1 - A(p-n+1)\omega]^{1/(p-n+1)} \tag{1.3}$$

$$A(\sigma_0) \equiv \varepsilon_*(\sigma_0)/\varepsilon^e(\sigma_0), \quad \varepsilon_*(\sigma_0) = B_1 B_2^{-1} \sigma_0^{n-p}, \quad \varepsilon^e(\sigma_0) = \sigma_0 E^{-1}$$

где $\varepsilon_*(\sigma_0)$, как следует из (1.2), представляет собой деформацию ползучести в момент разрушения при $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$, а $\varepsilon^e(\sigma_0)$ – упругая деформация, соответствующая напряжению σ_0. Очевидно, что для реальных материалов первая из этих величин больше второй, т.е. $A > 1$, причем для вязких материалов $A \gg 1$.

Как видно из (1.3), со временем напряжение релаксирует. Возможно ли в этих условиях накопление предельного значения $\omega = 1$, соответствующего разрушению? Для того, чтобы выяснить это, подставим (1.3) во второе уравнение (1.2) и проинтегрируем последнее с учетом начального условия $\omega|_{t=0} = 0$. В итоге получим

$$B_2 \sigma_0^p t = I(\omega) \equiv \int_0^{\omega} [1 - A(p-n+1)\omega]^{-p/(p-n+1)} (1-\omega)^m d\omega \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что разрушение может иметь (если величина $I(1)$, а следовательно, и время $t_* = B_2^{-1} \sigma_0^{-p} I\ (1)$ конечны), либо не иметь (если $t_* \to \infty$) места в зависимости от знака величины $C \equiv 1 - A(p-n+1)$.

Рассмотрим отдельно 3 случая.

I. Пусть $C > 0$, т.е. $A(p-n+1) < 1$. В этом случае стержень разрушится за конечное время t_*, поскольку $I(1) < \infty$.

Действительно, ввиду того, что $1 - A(p-n+1)\omega > 1 - \omega \geqslant 0$, функция $f(\omega) = [1 -$ $- A(p-n+1)\omega]^{-p/(p-n+1)}$, входящая в подынтегральное выражение в (1.4), будет, как легко видеть, возрастающей. Поэтому $f(\omega) < f(1)$ и из (1.4) будем иметь

$$I(1) < f(1) \int_0^1 (1-\omega)^m d\omega = \frac{C^{-p/(p-n+1)}}{m+1}$$

Заметим, что из неравенства $C > 0$ следует $p < n + A^{-1} - 1 < n$ (так как $A > 1$), что соответствует хрупким материалам [1], у которых согласно (1.3) деформация ε_* в момент разрушения при действии постоянного напряжения σ_0 является возрастающей функцией последнего. В частности, условие $C > 0$ выполняется при $p - n + 1 \leqslant 0$ независимо от величины A.

II. Пусть $C < 0$, т.е. $A(p-n+1) > 1$. В этом случае разрушения нет, поскольку значение $\omega = \omega_0 \equiv A^{-1}(p-n+1)^{-1} < 1$ будет достигаться за время $t_0 \to \infty$.

Действительно, из (1.4) имеем

$$B_2\sigma_0^p t_0 = I(\omega_0) > (1-\omega_0)^m \int_0^{\omega_0} (1-\omega/\omega_0)^{-p/(p-n+1)} d\omega =$$

$$= \frac{(1-\omega_0)^m}{A(n-1)}[\lim_{\omega\to\omega_0-0}(1-\omega/\omega_0)^{-(n-1)/(p-n+1)} - 1] = \infty$$

ввиду того, что $p - n + 1 > A^{-1} > 0$ и $n - 1 \geqslant 0$.

III. Пусть $C = 0$, т.е. $A(p - n + 1) = 1$. Тогда

$$I(1) = \int_0^1 (1-\omega)^{m+1-Ap} d\omega$$

откуда следует, что t_* – конечная величина (т.е. разрушение имеет место), если $m + 1 - Ap > 0$; и $t_* \to\infty$ (разрушения нет) при $m + 1 - Ap \leqslant 0$.

Заметим, что в случае, когда $m + 1 - Ap > 0$, напряжение к моменту разрушения релаксирует до нуля, т.е. $\sigma|_{t=t_*} = 0$, что видно из (1.3) при $\omega = 1$.

2. Рассмотрим аналогичную задачу для равномерно прогретого тела объема V с поверхностью S, находящегося в условиях релаксации напряжений, что будет иметь место, если на части S_T поверхности внешние силы $p_k = 0$, а на остальной части S_u – скорости перемещений $\dot{u}_k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$. В частности, S_T и S_u могут совпадать с S, что соответствует релаксации либо при отсутствии внешних сил (когда напряжения в любой момент $t \geqslant 0$ являются самоуравновешенными), либо при фиксированных перемещениях u_k на всей поверхности S. В любом случае начальное поле напряжений $\sigma_{kl0} = \sigma_{kl}$ при $t = 0$ будем считать известным из решения соответствующей задачи.

Предполагая, как и выше, что при релаксации приращения пластических деформаций отсутствуют, и обобщая соотношения (1.2) на сложное напряженное состояние аналогично [1, 3], для скоростей полных деформаций ε_{kl} будем иметь

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = a_{klmn}\dot{\sigma}_{mn} + \eta_{kl}, \quad \eta_{kl} = B_1 s^n (1-\omega)^{-m} \partial s/\partial\sigma_{kl}$$
$$\dot{\omega} = B_2 s^p (1-\omega)^{-m} \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

где $s = s(\sigma_{kl}) > 0$ – однородная первой степени выпуклая функция, совпадающая при одноосном растяжении вдоль какой-либо из осей (например, первой, если среда является анизотропной) с σ , a_{klmn} – компоненты тензора упругих податливостей; по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3.

В силу известного уравнения виртуальных работ [3] из (2.1) с учетом нулевых граничных условий получим

$$\int_V (a_{klmn}\dot{\sigma}_{mn}\sigma_{kl} + \eta_{kl}\sigma_{kl}) dV = \int_S \dot{u}_k p_k dS = 0 \tag{2.2}$$

Последнее равенство в (2.2) означает, что мощность внешних сил равна нулю, т.е. приток энергии к телу отсутствует.

При анализе возможности разрушения рассматриваемого тела (элемента конструкции) при сформулированных условиях будем исходить из приближенного решения, аналогичного использовавшемуся в [1, 2], т.е. поле напряжений при $t > 0$ будем искать в виде

$$\sigma_{kl} = \sigma_{kl0}\varphi(\omega_{\max}), \quad \varphi \geqslant 0, \quad \omega_{\max}(t) \equiv \max_V \omega(t) \tag{2.3}$$

В отличие от [1, 2] аргументом функции φ в (2.3) является не время t, а величина, монотонно растущая во времени.

Из (2.3) и последнего уравнения (2.1) видно, что в принятом приближении максимальная поврежденность ω_{max} в любой момент $t > 0$ ($\omega_{max}(0) = 0$) будет в тех точках V, где σ_{kl0} удовлетворяют условию $s(\sigma_{kl0}) = s_{0\,max} \equiv \max\limits_V s_0$.

Единственную неизвестную функцию φ можно найти из уравнения, вытекающего из вариационного принципа Качанова в теории неустановившейся ползучести [1, 2], которое будет совпадать с (2.2) при подстановке в него (2.3). Тогда, учитывая, что $\eta_{kl}\sigma_{kl} = B_1 s^{n+1}(1-\omega)^{-m} = B_1 B_2^{-1} s^{n+1-p}\dot\omega$, $\dot\sigma_{kl} = \sigma_{kl0}\varphi'\dot\omega_{max}$ и $\dot\omega \leqslant \dot\omega_{max}$, из (2.1)–(2.3) будем иметь

$$(a\varphi' + b\varphi^{n-p})\varphi\dot\omega_{max} \geqslant 0$$

$$a = \int\limits_V a_{klmn}\sigma_{kl0}\sigma_{mn0}dV, \quad b = B_1 B_2^{-1}\int\limits_V s_0^{n+1-p}dV$$

или

$$(\varphi^{p-n+1})'/(p-n+1) \geqslant -ba^{-1} \tag{2.4}$$

Интегрируя неравенство (2.4) по ω_{max} от нуля до текущего значения и учитывая, что $\varphi(0) = 1$, получим

$$(\varphi^{p-n+1} - 1)/(p-n+1) \geqslant -ba^{-1}\omega_{max}$$

Отсюда (поскольку левая часть этого неравенства является возрастающей функцией φ) независимо от знака постоянной $p - n + 1$ следует

$$\varphi \geqslant [1 - ba^{-1}(p-n+1)\omega_{max}]^{1/(p-n+1)} \equiv \psi \tag{2.5}$$

Тогда для наиболее поврежденных точек объема V, в которых $\omega = \omega_{max}$, будем иметь из (2.1) и (2.5):

$$\dot\omega_{max} \geqslant B_2 s_{0\,max}^p \psi^p (1-\omega_{max})^{-m}$$

Отсюда нетрудно получить

$$B_2 s_{0\,max}^p t \leqslant I(\omega_{max})$$

где интеграл I определен в (1.4), где следует положить $A = ba^{-1}$. Тогда рассуждения, аналогичные проведенным в п. I, показывают, что разрушение в самых нагруженных точках будет иметь место, если $ba^{-1}(p - n + 1) < 1$ или $ba^{-1}(p - n + 1) = 1$ при $m + 1 > ba^{-1}p$.

Заметим, что в частном случае, когда $p - n + 1 \leqslant 0$, аналогичное утверждение можно доказать при более слабых, чем (2.3), предположениях, а именно: достаточно считать, что максимальная поврежденность ω_{max} при любом $t > 0$ будет в одних и тех же точках, где

$$s(\sigma_{kl0}) = s_{0\,max} \equiv s_*, \quad \text{причем} \quad \dot s_{max} \leqslant 0, \quad s_{max}(t) \equiv \max_V s(t)$$

При доказательстве примем для простоты, что $a_{klmn}\sigma_{kl}\sigma_{mn} = s^2E^{-1}$. Тогда, считая, как и выше, что s является функцией координат и ω_{max}, из (2.2) найдем

$$0 = \int\limits_V (ss'E^{-1}\dot\omega_{max} + B_1B_2^{-1}s^{n+1-p}\dot\omega)dV \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{2E}\left(\int\limits_V s^2 dV\right)' + \frac{B_1}{B_2}\int\limits_V s^{n+1-p}dV\right]\dot\omega_{max} \tag{2.6}$$

(штрих означает производную по ω_{max}).

Введем обозначение $x = s / s_*$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Тогда, учитывая, что $x^{n+1-p} \leqslant x^2$ (поскольку $n + 1 - p \geqslant 2$), из (2.6) получим

$$\{F \exp[2A(s_*)\omega_{\max}]\}' \geqslant 0, \quad F = \int_V x^2 dV$$

(величина $A(s_*)$ определена в (1.3)).

Отсюда, интегрируя по $\omega_{\max}$ от нуля до текущего значения и учитывая, что $F \leqslant (s_{\max} / s_*)^2 V$, получим оценку для $s_{\max} = s_{\max}(\omega_{\max})$:

$$s_{\max} \geqslant \tilde{s}_0 \exp[-A(s_*)\omega_{\max}], \quad \tilde{s}_0 = \left(\frac{1}{V}\int_V s_0^2 dV\right)^{1/2} \tag{2.7}$$

Из (2.1) и (2.7) найдем

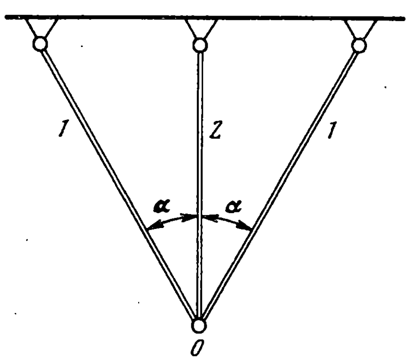
$$\dot{\omega}_{\max} \geqslant B_2 \tilde{s}_0^p \exp(-Ap\omega_{\max})(1-\omega_{\max})^{-m}$$

Отсюда

$$B_2 \tilde{s}_0^p t_* \leqslant \int_0^1 \exp(Ap\omega_{\max})(1-\omega_{\max})^m d\omega_{\max} < \infty$$

что и требовалось доказать.

Подчеркнем, что использовавшиеся в этом разделе подходы являются приближенными. Сформулированная выше задача в точной постановке требует дополнительных исследований.



Фиг. 1

3. Рассмотрим в качестве примера простейшей конструкции трехстержневую ферму. Материал стержней и площади их сечений одинаковы. Предположим, что при $t = 0$ боковые стержни были растянуты, а средний – сжат, причем для соответствующих напряжений выполняется условие

$$\sigma_2 = -2\cos\alpha\sigma_1 \quad (0 < \alpha < \pi/2) \tag{3.1}$$

после чего они были собраны в конструкцию, изображенную на фигуре, и предоставлены сами себе. Начальная система сил, приложенная к точке 0, вследствие (3.1) является самоуравновешенной [1] и остается таковой впоследствии, т.е. (3.1) справедливо и при $t > 0$.

Одноосная ползучесть стержней описывается системой (1.2), обобщение которой на случай, когда σ может быть отрицательным, имеет вид

$$\eta = B_1 |\sigma|^{n-1} \sigma(1-\omega)^{-m}, \quad \dot{\omega} = B_2 |\sigma|^p (1-\omega)^{-m} \tag{3.2}$$

Уравнение совместности скоростей деформаций есть [1]:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_2 \cos^2\alpha \tag{3.3}$$

где $\dot{\varepsilon}_k = \dot{\sigma}_k E^{-1} + \eta_k$, а η_k определяется из (3.2) при $\sigma = \sigma_k$ $(k = 1, 2)$.

К уравнениям (3.1)–(3.3) необходимо добавить начальные условия для напряжений $\sigma_k |_{t=0} = \sigma_{k0}$ $(k = 1, 2)$, причем σ_{10} и σ_{20} связаны равенством (3.1).

Исключая из (3.1)–(3.3) напряжение σ_2, получим

$$\dot{\sigma}_1(1 + 2\cos^3\alpha)E^{-1} + \eta(\sigma_1) + \eta(2\cos\alpha\sigma_1)\cos^2\alpha = 0 \tag{3.4}$$

Из (3.2) следует, что $\eta(\varkappa|\sigma|) \geqslant \varkappa\eta(|\sigma|)$ при $\varkappa \geqslant 1$ и $\eta(\varkappa|\sigma|) \leqslant \varkappa\eta(|\sigma|)$ при $0 < \varkappa \leqslant 1$ ($\varkappa$ – const), поскольку $n \geqslant 1$ и $p > 0$. Тогда, полагая $\varkappa = 2\cos\alpha$, из (3.4) и (3.1) для величин $\sigma_M = \max(\sigma_1, |\sigma_2|)$ и $\sigma_m = \min(\sigma_1, |\sigma_2|)$ нетрудно получить неравенства

$$\dot{\sigma}_M E^{-1} + \eta(\sigma_M) \geqslant 0, \quad \dot{\sigma}_m E^{-1} + \eta(\sigma_m) \leqslant 0$$

которые после перехода к дифференцированию по ω_M и ω_m (индексы M и m относятся к стержням с наибольшим и наименьшим модулем напряжения) соответственно примут вид

$$\sigma'_M + EB_1B_2^{-1}\sigma_M^{n-p} \geqslant 0, \quad \sigma'_m + EB_1B_2^{-1}\sigma_m^{n-p} \leqslant 0$$

По аналогии с (2.4) можно показать, что отсюда следует

$$\sigma_M \geqslant \sigma_{M0}[1 - \xi(\sigma_{M0})\omega_M]^{1/(p-n+1)} \tag{3.5}$$

$$\sigma_m \leqslant \sigma_{m0}[1 - \xi(\sigma_{m0})\omega_m]^{1/(p-n+1)}, \quad \xi(\sigma) = EB_1B_2^{-1}(p-n+1)\sigma^{n-p-1}$$

причем знак равенства в обоих неравенствах имеет место только при $\alpha = \pi/3$, что совпадает с решением (1.3), исследованным в п. 1.

Заметим, что согласно (3.1) $\sigma_M = \sigma_1$, $\sigma_m = |\sigma_2|$ при $\alpha > \pi/3$ и $\sigma_M = |\sigma_2|$, $\sigma_m = \sigma_1$ при $\alpha < \pi/3$.

Из (3.5) и (3.2) получим $B_2\sigma_{M0}^p t \leqslant I(\omega_M)$ и $B_2\sigma_{m0}^p t \geqslant I(\omega_m)$, где величина $I(\omega)$ определена в (1.4). Тогда, учитывая, что функция $\xi = \xi(\sigma)$ ($\sigma > 0$) из (3.5) – убывающая, т.е. $\xi(\sigma_{M0}) \leqslant \xi(\sigma_{m0})$, и проводя рассуждения, аналогичные изложенным в пп. 1, 2, убеждаемся в том, что при $\xi(\sigma_{M0}) < 1$ разрушится стержень, в котором $|\sigma| = \sigma_M$, а при $\xi(\sigma_{M0}) > 1$ конструкция не разрушится никогда.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-01645).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
3. *Цвелодуб И.Ю.* Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродин. СО АН СССР, 1991. 201 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
17.03.1998