

УДК 539.214

© 2000 г. И.П. ГРИГОРЬЕВ, Д.Д. ИВЛЕВ

О СДАВЛИВАНИИ КРУГЛОГО В ПЛАНЕ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ ШЕРОХОВАТЫМИ ПЛИТАМИ

Прандтль [1] предложил решение плоской задачи о сжатии слоя из идеального жесткопластического материала шероховатыми плитами. Это решение явилось основой теоретического анализа прикладных задач обработки металлов давлением. Надаи [2] дополнил решение Прандтля, определив соответствующее поле скоростей перемещений, и обобщил решение Прандтля на случай сжатия слоя наклонными шероховатыми плитами, а также плитами, изогнутыми в виде концентрических окружностей. Ряд обобщений задачи Прандтля принадлежит Гартману [2], который обобщил решения Прандтля на случай линейной зависимости максимального касательного напряжения от среднего давления. Численные решения о сжатии полосы при различных соотношениях длины и толщины выполнены В.В. Соколовским [3].

Ряд обобщений решения Прандтля на случай осесимметричного и пространственного течения приведен в [4–9]. Решение Прандтля получило многочисленные обобщения в работах прикладного характера [10].

Проблема течения пластического слоя между шероховатыми поверхностями исследовалась А.А. Ильюшиным [11, 12]. В основе исходных предположений лежит решение Прандтля, а также некоторые упрощения, носящие кинематический характер. Предполагается, что осредненные скорости перемещений постоянны по толщине слоя. Предполагается, что в плоскости, касательной к любой эквидистантной поверхности, касательные напряжения равны нулю, главные напряжения равны между собой (условие полной пластичности), нормальное напряжение вдоль толщины слоя постоянно. В этом случае для определения давления, действующего со стороны сжимающих плит имеет место уравнение постоянного ската и, следовательно, справедлива песчаная аналогия.

В настоящей работе методом малого параметра рассматривается задача о сдавливании идеальнопластического круглого в плане слоя радиуса $r = R$ шероховатыми плитами.

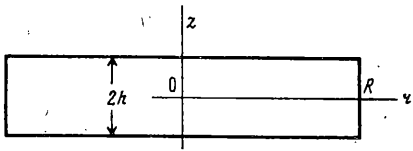
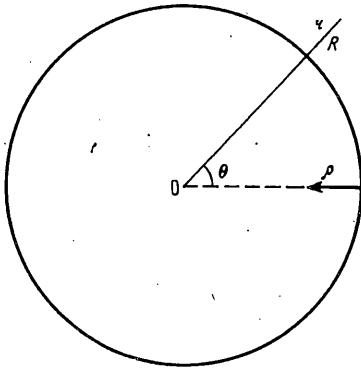
Показано, что два первых приближения определяют линейную зависимость давления от величины удаления от края r . В общем случае нелинейность носит полиномиальный характер от r , причем для n -го приближения имеет место полином степени r^{n-1} .

1. Рассмотрим сдавливание круглого в плане пластического слоя из идеального жесткопластического материала шероховатыми плитами (фигура). Уравнение осесимметричного состояния идеальнопластического тела при условии полной пластичности в цилиндрической системе координат r, θ, z имеют вид:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \partial \sigma_r / \partial r + \partial \tau_{rz} / \partial z + (\sigma_r - \sigma_\theta) / r &= 0 \\ \partial \tau_{rz} / \partial r + \partial \sigma_z / \partial z + \tau_{rz} / r &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ – компоненты напряжения.



Условие полной пластичности

$$(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2 = 4k^2, \quad k - \text{const} \quad (1.2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) \pm k \quad (1.3)$$

где k – предел текучести при сдвиге.

Определим для дальнейшего знак в (1.3). Обозначим главные напряжения $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Имеют место соотношения

$$\sigma_\theta = \sigma_2, \quad \sigma_1 - \sigma_3 = 2k, \quad \sigma_\rho + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_3 \quad (1.4)$$

Возможны два случая:

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_2 = \sigma_3 \quad (1.5)$$

В первом случае (1.5) из (1.4) следует

$$\sigma_\rho + \sigma_z = 2\sigma_1 - 2k, \quad \sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) + k \quad (1.6)$$

Во втором случае (1.5) из (1.4) следует

$$\sigma_\rho + \sigma_z = 2\sigma_3 + 2k, \quad \sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) - k \quad (1.7)$$

При сжатии слоя $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_3 < 0$, следовательно, имеют место соотношения (1.6).

Условие несжимаемости

$$\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z = 0 \quad (1.8)$$

Условие изотропии

$$(\epsilon_r - \epsilon_z)/(\sigma_r - \sigma_z) = \epsilon_{rz}/\tau_{rz} \quad (1.9)$$

где ϵ_r , ϵ_θ , ϵ_z , ϵ_{rz} – компоненты скоростей деформации.

Имеют место формулы Коши

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (1.10)$$

где u , w – скорости перемещения вдоль осей r , z .

Положим

$$r = R + \rho, \quad R - \text{const}, \quad dr = d\rho \quad (1.11)$$

При переходе к переменным ρ , z следует заменить r на ρ : σ_ρ , $\tau_{\rho z}$, ϵ_ρ , $\epsilon_{\rho z}$.

В дальнейшем перейдем к безразмерным переменным: все величины, имеющие размерность длины, будем считать отнесенными к величине h – толщине слоя, все компоненты напряжения – отнесенными к пределу текучести на сдвиг k . В качестве малого параметра δ примем величину

$$\delta = 1/R, \quad R \gg 1 \quad (1.12)$$

Из (1.11), (1.12) следует

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R + \rho} = \frac{1}{R} \frac{1}{1 + \rho/R} = \frac{\delta}{1 + \delta\rho} \quad (1.13)$$

При $\delta = 0$ имеют место соотношения плоской задачи.

Уравнения равновесия (1.1), согласно (1.13), в переменных ρz примут вид

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\delta(\sigma_\rho - \sigma_\theta)}{1 + \delta\rho} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\delta \tau_{\rho z}}{1 + \delta \rho} = 0 \quad (1.14)$$

Соотношения (1.10) примут вид

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\partial u}{1 + \delta \rho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\rho z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \quad (1.15)$$

Переходя к безразмерным переменным, в дальнейшем все компоненты, имеющие размерность длины, будем полагать отнесенными к величине h , компоненты, имеющие размерность напряжений, – к величине предела текучести k .

Решение будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sigma_{ij}^{(n)}, \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \varepsilon_{ij}^{(n)}, \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n u^{(n)}, \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n v^{(n)} \quad (1.16)$$

где, в дальнейшем для удобства, у компонент исходного нулевого приближения и первых трех приближений сняты скобки наверху и порядок приближений обозначены штрихами.

2. Рассмотрим задачу определения напряженного состояния. Согласно (1.14), (1.16), (1.2), (1.6), в исходном нулевом состоянии будем иметь

$$\partial \sigma_\rho^0 / \partial \rho + \partial \tau_{\rho z}^0 / \partial z = 0 \quad (2.1)$$

$$\partial \tau_{\rho z}^0 / \partial \rho + \partial \sigma_z^0 / \partial z = 0 \quad (2.2)$$

$$(\sigma_\rho^0 - \sigma_z^0)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4 \quad (2.3)$$

$$\sigma_\theta^0 = \frac{1}{2}(\sigma_\rho^0 + \sigma_z^0) + 1 \quad (2.4)$$

В первом приближении из (1.14), (1.16), (1.2), (1.6) будем иметь

$$\partial \sigma_\rho' / \partial \rho + \partial \tau_{\rho z}' / \partial z + (\sigma_\rho^0 - \sigma_\theta^0) = 0 \quad (2.5)$$

$$\partial \tau_{\rho z}' / \partial \rho + \partial \sigma_z' / \partial z + \tau_{\rho z}^0 = 0 \quad (2.6)$$

$$(\sigma_\rho' - \sigma_z')(\sigma_\rho^0 - \sigma_z^0) + 4\tau_{\rho z}' \tau_{\rho z}^0 = 0 \quad (2.7)$$

$$\sigma_\theta' = \frac{1}{2}(\sigma_\rho' + \sigma_z') \quad (2.8)$$

Во втором приближении из (1.14), (1.16), (1.2), (1.6) будем иметь

$$\frac{\partial \sigma_\rho''}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}''}{\partial z} + (\sigma_\rho' - \sigma_z') - (\sigma_\rho^0 - \sigma_z^0)\rho = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}''}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z''}{\partial z} + \tau_{\rho z}' - \tau_{\rho z}^0 \rho = 0 \quad (2.10)$$

$$(\sigma_\rho'' - \sigma_z'')(\sigma_\rho^0 - \sigma_z^0) + 4\tau_{\rho z}'' \tau_{\rho z}^0 = -\frac{1}{2}[(\sigma_\rho' - \sigma_z')^2 + 4\tau_{\rho z}'^2] \quad (2.11)$$

$$\sigma_\theta'' = \frac{1}{2}(\sigma_\rho'' + \sigma_z'') \quad (2.12)$$

В третьем приближении из (1.14), (1.16), (1.12), (1.6) будем иметь

$$\frac{\partial \sigma_\rho'''}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}'''}{\partial z} + (\sigma_\rho'' - \sigma_z'') - (\sigma_\rho' - \sigma_z')\rho + (\sigma_\rho^0 - \sigma_z^0)\rho^2 = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}'''}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z'''}{\partial z} + \tau_{\rho z}'' - \tau_{\rho z}' \rho + \tau_{\rho z}^0 \rho^2 = 0 \quad (2.14)$$

$$(\sigma_{\rho}''' - \sigma_z''')(\sigma_{\rho}^0 - \sigma_z^0) + 4\tau_{\rho z}'' \tau_{\rho z}^0 = -[(\sigma_{\rho}'' - \sigma_z'')(\sigma_{\rho}' - \sigma_z') + 4\tau_{\rho z}' \tau_{\rho z}'] \quad (2.15)$$

$$\sigma_{\theta}''' = 1/2(\sigma_{\rho}''' + \sigma_z''') \quad (2.16)$$

В "n" приближении из (1.14), (1.16), (1.2), (1.6) будем иметь

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}^{(n)}}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}^{(n)}}{\partial z} + \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m (\sigma_{\rho}^{(n-m-1)} - \sigma_z^{(n-m-1)}) \rho^m = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}^{(n)}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z^{(n)}}{\partial z} + \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \tau_{\rho z}^{(n-m-1)} \rho^m = 0 \quad (2.18)$$

$$(\sigma_{\rho}^{(n)} - \sigma_z^{(n)})(\sigma_{\rho}^0 - \sigma_z^0) + 4\tau_{\rho z}^{(n)} \tau_{\rho z}^0 = - \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m [(\sigma_{\rho}^{(n-m)} - \sigma_z^{(n-m)})(\sigma_{\rho}^{(m)} - \sigma_z^{(m)})] \quad (2.19)$$

$$\sigma_{\theta}^{(n)} = 1/2(\sigma_{\rho}^{(n)} + \sigma_z^{(n)}) \quad (2.20)$$

В исходном нулевом приближении, согласно Прандтлю [1], из уравнений (2.1–2.4) будем иметь

$$\sigma_{\rho}^0 = \rho + b_0 + 2\sqrt{1-z^2} \quad (2.21)$$

$$\sigma_z^0 = \rho + b_0 \quad (2.22)$$

$$\tau_{\rho z}^0 = -z \quad (2.23)$$

$$\sigma_{\theta}^0 = \rho + b_0 + \sqrt{1-z^2} + 1, \quad b_0 - \text{const} \quad (2.24)$$

В первом приближении, согласно (2.5–2.8), (2.21–2.24), будем иметь

$$\partial \sigma_{\rho}' / \partial \rho + \partial \tau_{\rho z}' / \partial z + \sqrt{1-z^2} - 1 = 0 \quad (2.25)$$

$$\partial \tau_{\rho z}' / \partial \rho + \partial \sigma_z' / \partial z + z = 0 \quad (2.26)$$

$$(\sigma_{\rho}' - \sigma_z')\sqrt{1-z^2} + 2\tau_{\rho z}' z = 0 \quad (2.27)$$

В уравнениях (2.25) положим

$$\tau_{\rho z}' = \tau_{\rho z}'(z), \quad d\tau_{\rho z}' / dz + \sqrt{1-z^2} - 1 = -a_1, \quad a_1 - \text{const} \quad (2.28)$$

Из (2.25), (2.28) получим

$$\sigma_{\rho}' = a_1 \rho + b_1 + \Phi_1(z), \quad b_1 - \text{const} \quad (2.29)$$

Из (2.26), (2.27) получим

$$\sigma_z' = a_1 \rho + b_1 - z^2 / 2 \quad (2.30)$$

Из (2.29), (2.30) найдем

$$(\Phi_1(z) + z^2 / 2)\sqrt{1-z^2} + 2\tau_{\rho z}' z = 0 \quad (2.31)$$

Из (2.28) получим

$$\tau_{\rho z}' = (1 - a_1) - 1/2 z \sqrt{1-z^2} - \arcsin z + c_1, \quad c_1 - \text{const} \quad (2.32)$$

Из (2.31) будем иметь

$$\Phi_1(z) = -\frac{z^2}{2} - \frac{2\tau'_{\rho z} z}{\sqrt{1-z^2}} \quad (2.33)$$

Согласно (2.29), (2.30), (2.32), (2.33), (2.8) запишем компоненты первого приближения в виде

$$\sigma'_\rho = a_1\rho + b_1 - \frac{z^2}{2} - \frac{2\tau'_{\rho z} z}{\sqrt{1-z^2}} \quad (2.34)$$

$$\sigma'_z = a_1\rho + b_1 - z^2/2 \quad (2.35)$$

$$\tau'_{\rho z} = (1-a_1)z - \frac{1}{2}\sqrt{1-z^2} - \arcsin z + c_1 \quad (2.36)$$

$$\sigma'_\theta = -a_1\rho + b - \frac{z^2}{2} - \frac{\tau'_{\rho z} z}{\sqrt{1-z^2}} \quad (2.37)$$

Во втором приближении, согласно (2.9–2.12), (2.21–2.24), (2.34–2.37), будем иметь

$$\partial\sigma''_\rho/\partial\rho + \partial\tau''_{\rho z}/\partial z + f_1(z) - f_0(z)\rho = 0 \quad (2.38)$$

$$\partial\tau''_{\rho z}/\partial\rho + \partial\sigma''_z/\partial z + \varphi_1(z) - \varphi_0(z)\rho = 0 \quad (2.39)$$

$$(\sigma''_\rho - \sigma''_z)f_0(z) + 4\tau''_{\rho z}\varphi_0(z) = \Theta_1(z) \quad (2.40)$$

$$f_1 = \sigma'_\rho - \sigma'_z, \quad f_0 = \sigma_\rho^0 - \sigma_z^0, \quad \varphi_1 = \tau'_{\rho z}, \quad \varphi_0 = \tau_{\rho z}^0 \quad (2.41)$$

$$\Theta_1(z) = -\frac{1}{2}(f_1^2 + 4\varphi_1^2)$$

В силу линейности задачи, представим компоненты напряжений в виде двух слагаемых

$$\sigma''_\rho = \sigma''_{\rho_1} + \sigma''_{\rho_2}, \quad \sigma''_z = \sigma''_{z_1} + \sigma''_{z_2}, \quad \tau''_{\rho z} = \tau''_{\rho z_1} + \tau''_{\rho z_2} \quad (2.42)$$

причем

$$\partial\sigma''_{\rho_1}/\partial\rho + \partial\tau''_{\rho z_1}/\partial z + f_1(z) = 0 \quad (2.43)$$

$$\partial\tau''_{\rho z_1}/\partial\rho + \partial\sigma''_{z_1}/\partial z + \varphi_1(z) = 0 \quad (2.44)$$

$$(\sigma''_{\rho_1} - \sigma''_{z_1})f_0(z) + 4\tau''_{\rho z_1}\varphi_0(z) = \Theta_1(z) \quad (2.45)$$

а также

$$\partial\sigma''_{\rho_2}/\partial\rho + \partial\tau''_{\rho z_2}/\partial z = f_0(z)\rho \quad (2.46)$$

$$\partial\tau''_{\rho z_2}/\partial\rho + \partial\sigma''_{z_2}/\partial z = \varphi_0(z)\rho \quad (2.47)$$

$$(\sigma''_{\rho_2} - \sigma''_{z_2})f_0(z) + 4\tau''_{\rho z_2}\varphi_0(z) = 0 \quad (2.48)$$

Предположим, что

$$\tau''_{\rho z_1} = \tau''_{\rho z_1}(z) \quad (2.49)$$

Далее положим

$$d\tau''_{\rho z_1}/dz + f_1(z) = -a_2, \quad a_2 = \text{const} \quad (2.50)$$

Из (2.43), (2.50) найдем

$$\sigma''_{\rho_1} = a_2\rho + b_2 + \Phi_2(z), \quad b_2 - \text{const} \quad (2.51)$$

Из (2.44), (2.49) получим

$$\sigma''_{z_1} = a_2\rho + b_2 - \bar{\varphi}_1(z) \quad (2.52)$$

Здесь и в дальнейшем черта сверху означает первообразную функции

$$\bar{\varphi}_1(z) = \int \varphi_1 dz \quad (2.53)$$

Из (2.51), (2.52), (2.45) будем иметь

$$(\Phi_2 + \bar{\varphi}_1(z))f_0(z) + 4\tau''_{\rho z_1}\varphi_0(z) = \Theta_1(z) \quad (2.54)$$

Из (2.50) получим

$$\tau''_{\rho z_1} = -(a_2z + \bar{f}_1(z)) + c_2, \quad c_2 - \text{const} \quad (2.55)$$

Из (2.54) найдем

$$\Phi_2 = \frac{\Theta_1(z) - 4\tau''_{\rho z_1}\varphi_0(z)}{f_0(z)} - \bar{\varphi}_1(z) \quad (2.56)$$

Из (2.51), (2.52), (2.55), (2.56), (2.12) будем иметь

$$\sigma''_{\rho_1} = a_2\rho + b_2 - \bar{\varphi}_1(z) + \frac{\Theta_1 - 4\tau''_{\rho z_1}}{f_0} \quad (2.57)$$

$$\sigma''_{z_1} = a_2\rho + b_2 - \bar{\varphi}_1 \quad (2.58)$$

$$\tau''_{\rho z_1} = -(a_2z + \bar{f}_1) + c_2 \quad (2.59)$$

$$\sigma''_{\theta_1} = a_2\rho + b_2 - \bar{\varphi}_1 + \frac{\Theta_1 - 4\tau''_{\rho z_1}}{2f_0} \quad (2.60)$$

где функции $f_0, f_1, \varphi_1, \theta_1$ определяется согласно (2.41), (2.21–2.23), (2.34–2.36).

При определении компонент $\sigma''_{\rho_2}, \sigma''_{z_2}, \tau''_{\rho z_2}$ положим

$$\tau''_{\rho z_2} = \rho\bar{f}_0 + m(z). \quad (2.61)$$

Из (2.46), (2.60) получим

$$\partial\sigma''_{\rho_2} / \partial\rho = -dm / dz \quad (2.62)$$

Из (2.62) найдем

$$\sigma''_{\rho_2} = -\frac{dm}{dz}\rho + F_1(z) \quad (2.63)$$

Из (2.47), (2.57) получим

$$\frac{\partial\sigma''_{z_2}}{\partial z} = \varphi_0(z)\rho - \bar{f}_0 \quad (2.64)$$

Из (2.61) найдем

$$\sigma''_{z_2} = \bar{\varphi}_0(z)\rho - \bar{f}_0 \quad (2.65)$$

Из (2.63), (2.65), (2.57), (2.48) будем иметь

$$\left(-\frac{dm}{dz}\rho + F_1 - \bar{\varphi}_0\rho + \bar{f}_0\right)f_0 + 4(\rho\bar{f}_0 + m)\varphi_0 = 0 \quad (2.66)$$

Уравнению (2.66) удовлетворим, полагая

$$(-dm/dz - \bar{\varphi}_0)f_0 + 4\bar{f}_0\varphi_0 = 0 \quad (2.67)$$

$$(F_1 + \bar{f}_0)f_0 + 4m\varphi_0 = 0 \quad (2.68)$$

Из уравнения (2.67) определяется функция $m(z)$ из (2.68) – функция $F_1(z)$, таким образом, согласно (2.57), (2.60), (2.65) компоненты $\sigma''_{\rho_2}, \sigma''_{z_2}, \tau''_{\rho z_2}$ определены.

Выражение компонент $\sigma''_{\rho}, \tau''_{\rho z}$ имеют весьма громоздкий вид, приведем выражение компоненты σ''_{ρ} , определяющую сдвливающее напряжение вдоль вертикальной оси.

Согласно (2.42), (2.58), (2.41), (2.36), (2.23), (2.64) будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma''_z = & (-a_2 + z^2/2)\rho + b_2 - (a_1 - 1)z^2/2 - 3\sqrt{1-z^2} - \\ & - \frac{1}{6}\sqrt{(1-z^2)^3} - 3z \arcsin z + c_1z + c_2, \quad a_1, a_2, b_2, c_1, c_2 - \text{const} \end{aligned} \quad (2.69)$$

При $z = 1$ выражение (2.69) принимает вид

$$\sigma''_z = (-a_2 + 1/2)\rho + b_2 - 1/2(a_1 - 1) - 3\pi/2 + c_1 + c_2 \quad (2.70)$$

Таким образом, согласно (2.70) сдвливающее давление во втором приближении, как и нулевом (2.22), и первом (2.35) приближениях сохраняют линейный характер по величине ρ .

В третьем приближении, согласно (2.13)–(2.15), (2.21)–(2.24), (2.34)–(2.37), (2.57)–(2.60), структура исходных уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned} \partial\sigma'''_{\rho}/\partial\rho + \partial\tau'''_{\rho z}/\partial z + f_2 - f_1\rho + f_0\rho^2 &= 0 \\ \partial\tau'''_{\rho z}/\partial\rho + \partial\sigma'''_z/\partial z + \varphi_2 - \varphi_1\rho + \varphi_0\rho^2 &= 0 \\ (\sigma'''_{\rho} - \sigma'''_z)f_0 + 4\tau'''_{\rho z}\varphi_0 &= \psi_0 + \psi_1\rho + \psi_2\rho^2 \end{aligned} \quad (2.71)$$

где f_i, φ_i, ψ_i – известные функции переменной z .

Согласно (2.42–2.45) достаточно рассмотреть систему уравнений

$$\partial\sigma'''_{\rho}/\partial\rho + \partial\tau'''_{\rho z}/\partial z - f_1\rho + f_0\rho^2 = 0 \quad (2.72)$$

$$\partial\tau'''_{\rho z}/\partial\rho + \partial\sigma'''_z/\partial z - \varphi_1\rho + \varphi_0\rho^2 = 0 \quad (2.73)$$

$$(\sigma'''_{\rho} - \sigma'''_z)f_0 + 4\tau'''_{\rho z}\varphi_0 = \psi_1\rho + \psi_2\rho^2 \quad (2.74)$$

Положим

$$\tau'''_{\rho z} = -\bar{f}_1\rho + \bar{f}_0\rho^2 - m_1(z)\rho - m_0(z) \quad (2.75)$$

Из (2.75), (2.72) получим

$$\frac{\partial\sigma'''_{\rho}}{\partial\rho} = \frac{dm}{dz}\rho + \frac{dm_0}{dz} \quad (2.76)$$

Из (2.76) найдем

$$\sigma'''_{\rho} = \frac{1}{2}\frac{dm_1}{dz}\rho^2 + \frac{dm_0}{dz}\rho + F_2(z) \quad (2.77)$$

Из (2.73), (2.75) получим

$$\partial \sigma_z''' / \partial z = \varphi_1 \rho - \varphi_0 \rho^2 + \bar{f}_1 - 2\bar{f}_0 \rho + m_1 \quad (2.78)$$

Из (2.78) получим

$$\sigma_z''' = \bar{\varphi}_1 \rho - \bar{\varphi}_0 \rho^2 + \bar{f}_1 - 2\bar{f}_0 \rho + \bar{m}_1 \quad (2.79)$$

Из (2.74), (2.77), (2.79), (2.75) будем иметь

$$\left[\left(\frac{1}{2} \frac{dm_1}{dz} + \bar{\varphi}_0 \right) \rho^2 + \left(\frac{dm_0}{dz} - \bar{\varphi}_1 + 2\bar{f}_0 \right) \rho + F_2 - \bar{m}_1 \right] f_0 + \quad (2.80)$$

$$+ 4[f_0 \rho^2 - (f_1 + m_1) \rho - m_0] \varphi_0 = \psi_1 \rho + \psi_2 \rho^2$$

Удовлетворяя соотношению (2.80), положим

$$\left(\frac{1}{2} \frac{dm_1}{dz} + \bar{\varphi}_0 \right) f_0 + 4f_0 \varphi_0 = \psi_2 \quad (2.81)$$

$$\left(\frac{dm_0}{dz} - \bar{\varphi}_1 + 2\bar{f}_0 \right) - 4(f_1 + \bar{m}_1) \varphi_0 = \psi_1 \quad (2.82)$$

$$(F_2 - m_1) f_0 - m_0 \varphi_0 = 0 \quad (2.83)$$

Функция m_1 определяется из (2.81), функция m_0 из (2.82), функция F_2 из (2.83).

Таким образом, в третьем приближении, согласно (2.79) компоненты напряжения имеют квадратичную зависимость от величины ρ .

В общем виде достаточно рассмотреть систему уравнений

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = f_1 \rho + f_2 \rho^2 + \dots + f_n \rho^n \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n \rho^n \quad (2.85)$$

$$(\sigma_r - \sigma_z) f_0 + 4\tau_{rz} \varphi_0 = \psi_1 + \psi_2 \rho + \dots + \psi_n \rho^n \quad (2.86)$$

где f_i , φ_i , ψ_i — известные функции переменной z .

Следует положить

$$\tau_{rz} = \bar{f}_1 \rho + \bar{f}_2 \rho^2 + \dots + \bar{f}_n \rho^n - m_0 - m_1 \rho - \dots - m_{n-1} \rho^{n-1} \quad (2.87)$$

Из (2.84), (2.87) получим

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} = \frac{dm_0}{dz} + \frac{dm_1}{dz} \rho + \dots + \frac{dm_{n-1}}{dz} \rho^{n-1} \quad (2.88)$$

Из (2.83) найдем

$$\sigma_r = \frac{dm_0}{dz} \rho + \frac{1}{2} \frac{dm_1}{dz} \rho^2 + \dots + \frac{1}{n} \frac{dm_{n-1}}{dz} \rho^{n-1} + F_k(z) \quad (2.89)$$

Из (2.85), (2.88) получим

$$\partial \sigma_z / \partial z = -(\bar{f}_1 + 2\bar{f}_2 \rho + \dots + n\bar{f}_n \rho^{n-1}) + m_1 + \dots + (n-1)m_{n-1} \rho^{n-2} \quad (2.90)$$

Из (2.90) найдем

$$\sigma_z = \bar{\varphi}_1 \rho + \bar{\varphi}_2 \rho^2 + \dots + \bar{\varphi}_n \rho^n - (\bar{f}_1 + 2\bar{f}_2 \rho + \dots + n\bar{f}_n \rho^{n-1}) + \bar{m}_1 + \dots + (n-1)\bar{m}_{n-1} \rho^{n-2} \quad (2.91)$$

Из (2.86), (2.87), (2.89), (2.91) будем иметь рекуррентную систему уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n} \frac{dm_{n-1}}{dz} - \bar{\varphi}_n \right) f_0 + 4\bar{f}_n \varphi_0 &= \Psi_n, \\ \left(\frac{1}{n-1} \frac{dm_{n-2}}{dz} - \bar{\varphi}_{n-1} + n\bar{f}_n \right) f_0 + 4(\bar{f}_{n-1} - m_{n-1})\varphi_0 &= \Psi_{n-1} \\ \left(\frac{dm_0}{dz} - \bar{\varphi}_1 + 2\bar{f}_2 + \bar{m}_2 \right) f_0 + 4(\bar{f}_1 - m_1)\varphi_0 &= \Psi_1 \\ \dots\dots\dots \\ (F_n + f_1 - \bar{m}_1) f_0 - 4m_0\varphi_0 &= \Psi_0 \end{aligned} \quad (2.92)$$

Из первого уравнения (2.92) определяется функция m_{n-1} , из второго – m_{n-2} и т.д., из предпоследнего уравнения (2.92) определяется функция m_0 , из последнего уравнения (2.92) – функция F_n . Таким образом решение может быть полностью определено.

Согласно (2.17–2.19), (2.87), (2.89), (2.91) структура "n"-го приближения для компонент напряжений представляет полиномы "n-1"-й степени по переменной ρ с переменными коэффициентами, зависящими от переменной z .

3. Рассмотрим определение констант в выражениях компонент напряжений $\sigma_\rho^{(n)}, \sigma_z^{(n)}, \tau_{\rho z}^{(n)}$.

Полагая край плиты свободным от напряжений, следует положить

$$\int_{-1}^1 \sigma_\rho d\rho = 0 \quad \text{при } \rho = 0 \quad (3.1)$$

Из (3.1), (1.16) получим

$$\int_{-1}^1 \sigma_\rho^0 d\rho + \delta \int_{-1}^1 \sigma_\rho' d\rho + \dots + \delta^n \int_{-1}^1 \sigma_\rho^{(n)} d\rho = 0 \quad \text{при } \rho = 0 \quad (3.2)$$

Из (3.2) будем иметь

$$\int_{-1}^1 \sigma_\rho^0 d\rho = 0 \quad \text{при } \rho = 0 \quad (3.3)$$

$$\int_{-1}^1 \sigma_\rho' d\rho = 0 \quad \text{при } \rho = 0 \quad (3.4)$$

.....

$$\int_{-1}^1 \sigma_\rho^{(n)} d\rho = 0 \quad \text{при } \rho = 0 \quad (3.5)$$

Предполагая симметричный характер деформирования, получим

$$\tau_{\rho z} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (3.6)$$

Из (3.6), (1.16) получим

$$\tau_{\rho z}^0(0) = 0, \quad \tau_{\rho z}'(0) = 0, \dots, \tau_{\rho z}^{(n)}(\rho, 0) = 0 \quad (3.7)$$

Из (2.33) следует

$$\tau_{\rho z}^0 = \pm 1, \quad z = \pm 1 \quad (3.8)$$

Предполагается отсутствие на свободном крае плиты усилий, положим

$$\tau'_{\rho z}(\pm 1) = 0, \dots \tau_{\rho z}^{(n)}(\rho, \pm 1) = 0 \quad (3.9)$$

Из (3.3), (2.21) получим

$$b_0 = \pi/2 \quad (3.10)$$

Согласно (2.34), (2.35), (3.7) будем иметь

$$\sigma'_\rho = a_1 \rho + b_1 - \frac{z^2}{2} - \frac{2(a_1 - 1)z^2}{\sqrt{1 - z^2}} + \frac{2z \arcsin z}{\sqrt{1 - z^2}} \quad (3.11)$$

$$\tau'_{\rho z} = (1 - a_1)z - \frac{1}{2}\sqrt{1 - z^2} - \arcsin z \quad (3.12)$$

Из (3.12), (3.9) найдем

$$a_1 = \pi/2 + 1 \quad (3.13)$$

Из (3.11), (3.4) получим

$$b_1 = \pi^2/4 - 13/6 \quad (3.14)$$

Согласно (2.21)–(2.24), (2.34)–(2.37), (3.10), (3.13), (3.14) найдем

$$\sigma_\rho = -\rho + \frac{\pi}{2} + 2\sqrt{1 - z^2} + \delta \left[-\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\rho + \frac{\pi^2}{4} - \frac{13}{6} - \frac{z^2}{2} - \frac{\pi z^2}{\sqrt{1 - z^2}} + \frac{2z \arcsin z}{\sqrt{1 - z^2}} \right] + \dots \quad (3.15)$$

$$\sigma_z = \rho + \frac{\pi}{2} + \delta \left[\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\rho + \frac{\pi^2}{4} - \frac{13}{6} - \frac{z^2}{2} \right] + \dots \quad (3.16)$$

$$\tau_{\rho z} = -z + \delta \left[-\frac{\pi}{2}z - \frac{1}{2}\sqrt{1 - z^2} - \arcsin z \right] + \dots \quad (3.17)$$

$$\sigma_\theta = \rho + \frac{\pi}{2} + 1 + \sqrt{1 - z^2} + \delta \left[\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\rho + \frac{\pi^2}{4} - \frac{13}{6} - \frac{z^2}{4} - \frac{\pi z^2}{2\sqrt{1 - z^2}} + \frac{z \arcsin z}{\sqrt{1 - z^2}} \right] + \dots \quad (3.18)$$

Выражение для сдвигающего напряжения σ_z (3.16) при $z = 1$ принимает вид

$$\sigma_z = \left[1 + \delta \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \right] \rho + \frac{\pi}{2} + \delta \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{8}{3} \right) + \dots \quad (3.19)$$

4. Рассмотрим определение поля скоростей перемещений.

Условие несжимаемости (1.8), согласно (1.10), примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial z} + u/\rho = 0 \quad (4.1)$$

Условие изотропии (1.9), согласно (1.10), примет вид

$$2 \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \tau_{\rho z} - \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) (\sigma_\rho - \sigma_z) = 0 \quad (4.2)$$

В нулевом исходном приближении, согласно (1.16), (4.1), (4.2), имеет место

$$\partial u^0 / \partial \rho + \partial w^0 / \partial z = 0 \quad (4.3)$$

$$2 \left(\frac{\partial u^0}{\partial \rho} - \frac{\partial w^0}{\partial z} \right) \tau_{\rho z}^0 - \left(\frac{\partial u^0}{\partial z} + \frac{\partial w^0}{\partial \rho} \right) (\sigma_\rho^0 - \sigma_z^0) = 0 \quad (4.4)$$

Следует положить [2]

$$w^0 = z \quad (4.5)$$

Согласно (4.3), (4.5), получим

$$u^0 = -\rho + \mu_0(z) \quad (4.6)$$

Из (4.4), (4.5), (4.6) найдем

$$\mu_0 = 2\sqrt{1-z^2} + g_0, \quad g_0 - \text{const} \quad (4.7)$$

В дальнейшем положим $g_0 = 0$.

Согласно (4.5–4.7) компоненты скорости перемещений в нулевом исходном приближении определены.

В первом приближении, согласно (1.16), (4.1), (4.2) имеет место

$$\frac{\partial u'}{\partial \rho} + \frac{\partial w'}{\partial z} + u^0 = 0 \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{\partial u'}{\partial \rho} - \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \tau_{\rho z}^0 - \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial \rho} \right) (\sigma_\rho^0 - \sigma_z^0) = \\ & = -2 \left(\frac{\partial u^0}{\partial \rho} - \frac{\partial w^0}{\partial z} \right) \tau'_{\rho z} + \left(\frac{\partial u^0}{\partial z} + \frac{\partial w^0}{\partial \rho} \right) (\sigma'_\rho - \sigma'_z) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Согласно (4.5), (4.6), (4.7), (2.21)–(2.23), (2.34)–(2.36), (4.8), (4.9), будем иметь

$$\partial u' / \partial \rho + \partial w' / \partial z = \rho - \mu_0(z) \quad (4.10)$$

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial \rho} - \frac{\partial w'}{\partial z} \right) z - \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial \rho} \right) \sqrt{1-z^2} = F_0(z) \quad (4.11)$$

$$F_0(z) = 2\tau'_{\rho z} + \frac{d\mu_0}{dz} (\sigma'_\rho - \sigma'_z) \quad (4.12)$$

Положим

$$u' = p_1 \rho^2 + \mu_1(z), \quad p_1 - \text{const} \quad (4.13)$$

$$w' = q_1 \rho z + \gamma_1(z), \quad q_1 - \text{const} \quad (4.14)$$

Из (4.10), (4.11), (4.13), (4.14), получим

$$2p_1 \rho + q_1 \rho + d\gamma_1 / dz = \rho - \mu_0 \quad (4.15)$$

$$\left(2p_1 \rho - q_1 \rho - \frac{d\gamma_1}{dz} \right) z - \left(\frac{d\mu_1}{dz} + q_1 z \right) \sqrt{1-z^2} = F_0 \quad (4.16)$$

Из (3.15), (3.16) следует

$$2p_1 + q_1 = 1, \quad 2p_1 - g_1 = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{d\gamma_1}{dz} = -\mu_0, \quad \frac{d\mu_1}{dz} = \frac{(\mu_0 z - F_2)}{\sqrt{1-z^2}} - g_1 z \quad (4.18)$$

Согласно (4.13), (4.14), (4.17), (4.18) компоненты скорости перемещения в первом приближении определены.

Наличие в выражении для компонент скорости w' (4.14) слагаемого $q_1 \rho z$ определяет непараллельное сближение плит. При определении последующих приближений эта особенность будет иметь место. Используемый прием не позволяет получить приемлемое поле скоростей для параллельного сближения плит. Приемлемое поле скоростей может быть определено из построения численного решения для поля скоростей перемещений.

Построение возможного поля скоростей, совместимого с полем напряжений, указывает на действительный характер построенного поля напряжений и, следовательно, предельных нагрузок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прандтль Л.* Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел // Теория пластичности. М.: ИЛ, 1948. С. 102–113.
2. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. М.: ИЛ, 1954. 648 с.
3. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
4. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
5. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
6. *Задоян М.А.* Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 384 с.
7. *Ершов Л.В., Ивлев Д.Д., Романов А.В.* Об обобщениях решения Прандтля о сжатии пластического слоя шероховатыми плитами // Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982. С. 137–144.
8. *Ивлев Д.Д., Романов А.В.* Об одном классе точных неавтономных задач теории идеальной пластичности // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984. С. 90–97.
9. *Ивлев Д.Д.* О пространственном течении идеальнопластического материала, сжатого шероховатыми плитами // Изв. РАН. МГТ. 1998. № 1. С. 5–12.
10. *Томленов А.Д.* Теория пластического деформирования металлов. М.: Металлургия, 1972. 408 с.
11. *Ильюшин А.А.* Вопросы теории течения пластического вещества по поверхности // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 3. С. 265–288.
12. *Ильюшин А.А.* Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 8. С. 693–713.

Чебоксары,
Москва

Поступила в редакцию
5.10.1998