

УДК 539.214

© 2000 г. А.Д. ЧЕРНЫШОВ

## ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Путем анализа начального, конечного деформированного и разгрузочного состояний малого элемента упругопластической среды получены выражения тензоров упругих, пластических деформаций и скоростей деформаций в переменных Эйлера и Лагранжа. Эти тензоры использованы при записи термодинамических уравнений Гиббса и законов неравновесной термодинамики, откуда и выведены определяющие уравнения. При описании пластических свойств используется теория течения. В общем случае замкнутая нелинейная система уравнений содержит 43 неизвестных и столько же уравнений.

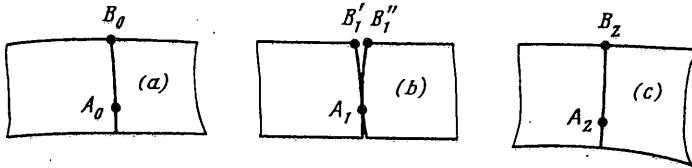
Первая попытка разделить конечные упругие и пластические деформации была осуществлена в [1] при помощи введения упругих и пластических перемещений. Этот подход в дальнейшем не развивался, так как приводил к переопределенной системе. Позднее в [2–4] и многих других все же использовалась данная идея в измененной форме, в некоторых статьях [5, 6] и других авторы получали определяющие уравнения, но проблема переопределенности оставалась не решенной, кроме того, не использовалась теория пластического течения. В этих работах авторы не показывали неевклидовость упругих и пластических перемещений и деформаций, а законы термодинамики необратимых процессов практически не применялись. В данной работе сделана попытка устранить все перечисленные недостатки.

**1. Кинематика.** Перед получением определяющих уравнений необходимо иметь конкретный вид тензоров конечных упругих и пластических деформаций и скоростей деформаций и их взаимосвязь с полными деформациями и скоростью деформаций среды. С этой целью используем метод расчленения тела на мелкие элементы. Состояние вырезанного малого элемента до начала деформирования назовем  $X_0$ -начальным, деформированное состояние назовем конечным  $X_2$ -состоянием. Этот же элемент имеет одно характерное состояние  $X_1$ -состояние разгрузки, в котором будет находиться, если в конечном  $X_2$ -состоянии с него снять все внешние нагрузки. Состояние разгрузки  $X_1$  будем использовать для определения конечных упругих и пластических деформаций и скоростей деформаций путем сравнения с конечным  $X_2$  и начальным  $X_0$ -состояниями малого элемента.

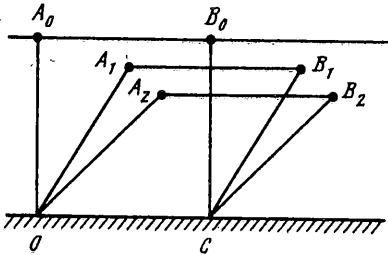
Положение каждой частицы данного малого элемента в его  $X_0$ ,  $X_1$  и  $X_2$  состояниях определяется радиусами-векторами  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$  соответственно. Разностью между этими векторами можно определить полные, упругие и пластические перемещения

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{u}_p = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_p \quad (1.1)$$

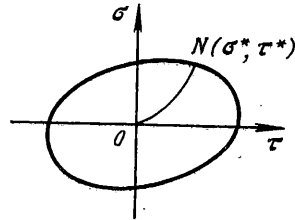
При эйлеровом способе описания движения полное перемещение частиц данного элемента  $\mathbf{u}$  зависит от времени  $t$  и эйлеровых координат  $\mathbf{r}$ , а в случае лагранжевого способа  $\mathbf{u}$  зависит от  $t$  и  $\mathbf{r}_0$ . Однако, упругие  $\mathbf{u}_e$  и пластические  $\mathbf{u}_p$  перемещения имеют более сложный характер зависимости от геометрических координат. Для выяснения



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

этой особенности рассмотрим два соседних малых элемента в  $X_1$ -состоянии разгрузки (фиг. 1, b). Положение этих малых элементов определяется с точностью до жесткого поворота с тензором поворота  $M_1$  и жесткого перемещения  $e_1$ . Если смежные поверхности  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  данных двух малых элементов в начальном  $X_0$  и конечном  $X_2$ -состояниях совпадали, то в  $X_1$ -состоянии разгрузки в общем случае совпадать не будут.

Пусть точки  $A_0$  и  $B_0$ , находящиеся не смежной границе двух малых элементов в  $X_0$ -состоянии (фиг. 1, a), в конечном  $X_2$ -состоянии занимают некоторое положение  $A_2$  и  $B_2$  (фиг. 1, c). Тогда в  $X_1$ -состоянии из всего множества точек данной смежной границы  $\Sigma$  в общем случае только одну (например, точку  $A_1$ ) можно совместить с соответственной точкой на поверхности  $\Sigma$ , тогда как все остальные точки ( $B_1'$  и  $B_1''$ ) не будут совпадать, между смежными малыми элементами будут зазоры. Совокупность малых элементов в  $X_1$ -состоянии не образует сплошное тело, т.е. не является евклидовым пространством. Каждой частице  $B_1'$  на  $\Sigma'$  будет соответствовать частица  $B_1''$  на  $\Sigma''$ . Точки  $B_1'$  и  $B_1''$  имеют одинаковые и начальные  $r_0$  и конечные  $r$  координаты, но их координаты в  $X_1$ -состоянии различные. Эти рассуждения приводят к выводу, что радиус-вектор  $r_1$  и перемещения  $u_e, u_p$  зависят не только от начальных или конечных координат и времени  $t$ , но и от номера малого элемента или от начальных  $r_0^*$  или конечных  $r^*$  координат центра данного элемента, т.е.

$$r_1, u_e, u_p | t, r_0, r_0^* \text{ или } t, r, r^* \quad (1.2)$$

Центром малого элемента назовем ту его частицу, в которую будем стягивать область элемента в процессе предельного измельчения. При помощи (1.2) можно определить пластическую скорость как материальную производную от вектора  $r_1$  по времени

$$v_p = dr_1 / dt = v_1 \quad (1.3)$$

Зависимости (1.2) и (1.3) позволяют образовать следующие предельные тензоры в смысле предельного измельчения:

$$\lim \frac{\partial r_0}{\partial r_1} = \mathcal{E}_p, \quad \lim \frac{\partial r_1}{\partial r} = \mathcal{E}_e, \quad \frac{\partial r_0}{\partial r} = \mathcal{E} \quad (1.4)$$

$$\lim \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_1} = \Lambda_e, \quad \lim \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{r}_0} = \Lambda_p, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_0} = \Lambda$$

$$\text{sym} \lim \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{r}_1} = \varepsilon_p, \quad \text{sym} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} = \varepsilon$$

При получении предельных тензоров в (1.4) предполагается неограниченное измельчение, т.е. имеют место соотношения

$$\lim |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0^*| = 0 \quad \text{или} \quad \lim |\mathbf{r} - \mathbf{r}^*| = 0 \quad (1.5)$$

Все частные производные под знаками пределов в (1.4) предполагаются вычисленными для данного малого элемента. При условии (1.5) эти тензоры теряют градиентные свойства и потому становятся обычными тензорами второго ранга в общем случае с девятью различными и независимыми между собой компонентами.

**2. Упругие и пластические конечные деформации и скорости деформаций.** Полные конечные деформации среды обычно выводятся путем сравнения длин малого материального элемента в  $X_2$  и  $X_0$ -состояниях [1, 4]. Этим же приемом можно воспользоваться и для получения выражений конечных упругих и пластических деформаций.

Пусть квадраты расстояний между двумя неизменными частицами данного малого элемента в его  $X_0$ ,  $X_1$  и  $X_2$ -состояниях соответственно равны

$$ds_i^2 = d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_i \quad (i = 0, 1, 2) \quad (2.1)$$

Тогда разность  $(ds_1^2 - ds_0^2)$  определит пластическую деформацию,  $(ds_2^2 - ds_1^2)$  – упругую деформацию и  $(ds_2^2 - ds_0^2)$  – полную деформацию. Эти разности представим следующими вариантами записей:

$$ds_1^2 - ds_0^2 = d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_0 d\mathbf{r}_0 = d\mathbf{r}_0 (\Lambda_p^* \Lambda_p - 1) d\mathbf{r}_0 = d\mathbf{r}_1 (1 - \mathcal{E}_p^* \mathcal{E}_p) d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r} (\mathcal{E}_e^* \mathcal{E}_e - \mathcal{E}^* \mathcal{E}) d\mathbf{r}$$

$$ds_2^2 - ds_1^2 = d\mathbf{r}_0 (\Lambda^* \Lambda - \Lambda_p^* \Lambda_p) d\mathbf{r}_0 = d\mathbf{r}_1 (\Lambda_e^* \Lambda_e - 1) d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r} (1 - \mathcal{E}_e^* \mathcal{E}_e) d\mathbf{r}$$

$$ds_2^2 - ds_0^2 = d\mathbf{r}_0 (\Lambda^* \Lambda - 1) d\mathbf{r}_0 = d\mathbf{r}_1 (\Lambda_e^* \Lambda_e - \mathcal{E}_p^* \mathcal{E}_p) d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r} (1 - \mathcal{E}^* \mathcal{E}) d\mathbf{r} \quad (2.2)$$

Звездочка над тензором в (2.2) означает его транспонирование. Прежде, чем ввести понятия конечных упругих и пластических деформаций, рассмотрим один из простейших примеров (фиг. 2), когда плоская плита нагружается равномерными сжимающим  $\sigma(t)$  и сдвиговым  $\tau(t)$  напряжениями. В свободном ненагруженном  $X_0$  состоянии плита имела толщину  $h_0$ , в конечном  $X_2$ -состоянии – толщину  $h_2$  и в  $X_1$ -состоянии разгрузки – толщину  $h_1$ . Считаем, что материал пластины сжимаемый и упруго, и пластически. Нижняя грань пластины все время остается неподвижной, а верхняя грань перемещается под действием приложенных нагрузок  $\sigma$  и  $\tau$ . Рассмотрим деформации материального прямоугольника  $OA_0B_0C$  (фиг. 2). В  $X_2$ -состоянии этот прямоугольник занимает положение  $OA_2B_2C$ , а в  $X_1$ -состоянии разгрузки – положение  $OA_1B_1C$ . Изобразим поверхность нагружения [7]  $F(\sigma, \tau) = 0$  на фиг. 3 некоторой условной замкнутой кривой. Пусть  $X_2$ -состоянию прямоугольника  $OA_2B_2C$  соответствует некоторая точка  $N(\sigma^*, \tau^*)$  на поверхности нагружения и пусть получению  $X_1$ -состояния соответствует движение в пространстве  $(\sigma, \tau)$  из точки  $N$  к точке  $O$  по некоторой кривой  $ON$ . На этой кривой возьмем некоторую точку  $M$ . Изменяя координаты  $\sigma$  и  $\tau$  точки  $M$ , будем получать различные  $X_2$  состояния данного прямоугольника, тогда как его  $X_0$  и  $X_1$ -состояния будут оставаться неизменными. Таким образом, для одних и тех же  $X_0$  и  $X_1$ -состояний можно получать различные  $X_2$ -состояния. Точно также, подбирая соответственные законы изменения параметров нагрузки  $\sigma(t)$  и  $\tau(t)$  можно получить различные  $X_1$ -состояния разгрузки при одних и тех же  $X_0$  и  $X_2$ -состояниях.

Если же до начала деформирования плиты ее переместить как жесткое целое в другое положение, а затем деформировать из другого  $X_0$ -начального состояния, то при соответственном выборе законов нагрузки  $\sigma(t)$  и  $\tau(t)$  можно получить одни и те же  $X_1$  и  $X_2$ -состояния. Подобные рассуждения приводят к следующему постулату 1 о независимости  $X_1$ -состояний: каждое из трех  $X_1$ -состояний может быть различным независимо от остальных двух  $X_1$ -состояний.

Из постулата 1 в частности следует, что пластические деформации не должны зависеть от  $X_2$ -состояния, упругие деформации не должны зависеть от  $X_0$ -состояния, а полные деформации – от промежуточного  $X_1$ -состояния. Если попытаться построить упругие и пластические тензоры деформаций так, чтобы их сумма была равна тензору полных деформаций, то все длины  $ds_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) должны быть вычислены через одни и те же дифференциалы  $dr_0$ ,  $dr_1$  или  $dr$ . Но в любом из этих вариантов придем к противоречию с постулатом 1 о независимости  $X_1$ -состояний. Покажем это противоречие на следующем примере.

Пусть, например, все длины  $ds_i$  вычислены при помощи формул (2.2) через дифференциалы  $dr_0$ , т.е.

$$ds_1^2 - ds_0^2 = dr_0(\Lambda_p^* \Lambda_p - I) dr_0 \quad (2.3)$$

$$ds_2^2 - ds_1^2 = dr_0(\Lambda^* \Lambda - \Lambda_p^* \Lambda_p) dr_0$$

$$ds_2^2 - ds_0^2 = dr_0(\Lambda^* \Lambda - I) dr_0$$

Тогда тензоры упругих  $\tilde{E}_e$ , пластических  $\tilde{E}_p$  и полных  $\tilde{E}$  деформаций в соответствии с (2.3) будут иметь вид

$$\tilde{E} = \Lambda^* \Lambda - I, \quad \tilde{E}_e = \Lambda^* \Lambda - \Lambda_p^* \Lambda_p, \quad \tilde{E}_p = \Lambda_p^* \Lambda_p - I \quad (2.4)$$

и эти тензоры тогда будут связаны между собой удобным равенством

$$\tilde{E} = \tilde{E}_e + \tilde{E}_p \quad (2.5)$$

Однако, из определения (2.4) тензора  $\tilde{E}_e$  следует, что  $\tilde{E}_e$ , в этом случае зависит от тензора  $\Lambda$ , т.е. от начального  $X_0$ -состояния, что противоречит следствию из постулата 1. Если все длины  $ds_i$  вычислять через дифференциал  $dr_1$ , то также получим противоречие, т.к. тензор полных деформаций  $\tilde{E}$  будет зависеть от  $X_1$ -состояния, а если все длины  $ds_i$  выразить через дифференциал  $dr$ , то тензор  $\tilde{E}_p$  будет зависеть от  $X_2$ -состояния, что также противоречит постулату 1. Отсюда следует, что тензоры полных, упругих и пластических деформаций, которые бы не противоречили постулату 1 о взаимной независимости  $X_1$ -состояний не могут удовлетворять равенству (2.5). При лагранжевом способе описания движения среды из (2.4) можно использовать только выражения тензоров  $\tilde{E}$  и  $\tilde{E}_p$ , т.е. они не противоречат постулату 1. Здесь следует отметить, что конструкция тензоров  $\tilde{E}$  и  $\tilde{E}_p$  совершенно одинаковая: для их построения использован тензор-"градиент" радиуса-вектора конечного состояния (для тензора  $\tilde{E}$  это – вектор  $\mathbf{r}$  из  $X_2$ -состояния, а для тензора  $\tilde{E}_p$  это – вектор  $\mathbf{r}_1$  из  $X_1$ -состояния) по радиусу-вектору  $\mathbf{r}_0$  начального  $X_0$ -состояния. Используем такую же конструкцию и для определения тензора  $\tilde{E}_e$ , т.е. роль начального состояния для него будет выполнять  $X_1$ -состояние, а роль конечного –  $X_2$ -состояние. Тогда получим

$$ds_2^2 - ds_1^2 = dr_1(\Lambda_e^* \Lambda_e - I) dr_1, \quad \text{т.е. } E_e = \Lambda_e^* \Lambda_e - I \quad (2.6)$$

При эйлеровом способе описания движения подобным же образом найдем следующие выражения для тензоров полных, упругих и пластических деформаций

$$E = I - \mathcal{E}^* \mathcal{E}, \quad E_e = I - \mathcal{E}_e^* \mathcal{E}_e, \quad E_p = I - \mathcal{E}_p^* \mathcal{E}_p \quad (2.7)$$

В дальнейшем будет удобнее использовать следующие тензоры

$$\tilde{C} = \Lambda^* \Lambda, \quad \tilde{C}_e = \Lambda_e^* \Lambda_e, \quad \tilde{C}_p = \Lambda_p^* \Lambda_p \quad (2.8)$$

$$C = \mathcal{E}^* \mathcal{E}, \quad C_e = \mathcal{E}_e^* \mathcal{E}_e, \quad C_p = \mathcal{E}_p^* \mathcal{E}_p$$

Введенные в (2.8) тензоры конечных деформаций удовлетворяют принципу материальной объективности, который сформулируем следующим образом: все тензоры конечных деформаций и скоростей деформаций должны быть инвариантными при наложении на действительное движение сплошной среды произвольное конечное дополнительное жесткое движение во всех его  $X_t$ -состояниях.

Следует отметить, что подобное жесткое преобразование отличается от другого преобразования – поворота и перемещения системы отсчета. Отличие заключается в том, что в первом преобразовании радиус-вектор  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) изменяется по формуле

$$\mathbf{r}'_i = M_i \mathbf{r}_i + \mathbf{e}_i \quad (2.9)$$

где  $M_i$  – тензор жесткого поворота,  $\mathbf{e}_i$  – вектор жесткого перемещения малого элемента в его  $X_t$ -состояниях, тогда как во втором преобразовании вектор  $\mathbf{r}_i$  не изменяется, изменяются только его проекции в повернутой системе координат. Если связать систему координат с  $X_0$ -состоянием, то тензоры  $\tilde{C}$  и  $\tilde{C}_p$ , вычисленные в переменных Лагранжа, в этой системе не будут изменяться при наложении первого преобразования, а тензор  $\tilde{C}_e$  не будет изменяться в системе, связанной с  $X_1$ -состоянием. Тензоры  $C$  и  $C_e$ , вычисленные в переменных Эйлера, не будут изменяться в системе, связанной с  $X_2$ -состоянием, а тензор  $C_p$  – в системе, связанной с  $X_1$ -состоянием. Так как равенство (2.5) не имеет места, то вместо него следует получить эквивалентное соотношение, связывающее тензоры  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{C}_e$  и  $\tilde{C}_p$ , или  $C$ ,  $C_e$  и  $C_p$  между собой. С этой целью воспользуемся теоремой о полярном разложении тензоров

$$\mathcal{E}_p = M_p C_p^{1/2}, \quad \Lambda_p = M_p^* \tilde{C}_p^{1/2}, \quad \mathcal{E}_e = M_e C_e^{1/2}, \quad \Lambda_e = M_e^* \tilde{C}_e^{1/2} \quad (2.10)$$

где  $M_p$  и  $M_e$  – тензоры поворота материальных элементов среды, ориентированных вдоль главных направлений тензоров  $C_p$  и  $C_e$  в их конечном  $X_1$  и  $X_2$ -состояниях по отношению к их начальному  $X_0$  и  $X_1$ -состояниям соответственно. Поскольку  $X_1$ -состояние определяется с точностью до жесткого поворота, то в целях упрощения один из тензоров  $M_e$  или  $M_p$  можно взять единичным. Если используются тензоры  $C$ ,  $C_e$  и  $C_p$ , то будем считать  $M_e = I$ , т.е. все малые элементы сплошной среды при переходе из  $X_1$ -состояния в  $X_2$ -состояние не поворачиваются, а тензор  $\mathcal{E}_e$  является симметричным. В этом случае при помощи (1.4) и (2.10) можно написать следующие равенства

$$M_e = I, \quad \mathcal{E}_e = C_e^{1/2}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_p \mathcal{E}_e, \quad \mathcal{E}^* = \mathcal{E}_e^* \mathcal{E}_p^* \quad (2.11)$$

$$C = \mathcal{E}^* \mathcal{E} = \mathcal{E}_e \mathcal{E}_p^* \mathcal{E}_p \mathcal{E}_e = C_e^{1/2} C_p C_e^{1/2}$$

Из последнего равенства в (2.11) получим искомую связь тензоров деформаций в переменных Эйлера

$$C = C_e^{1/2} C_p C_e^{1/2} \quad (2.12)$$

При использовании тензоров  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{C}_e$  и  $\tilde{C}_p$  удобно считать  $M_p = I$ , т.е. все малые элементы сплошной среды при переходе из  $X_0$  в  $X_1$  состояние не поворачиваются, а тензор  $\Lambda_p$  становится симметричным. Тогда из (1.4) и (2.10) подобно (2.11) получим

$$\begin{aligned} M_p &= I, \quad \Lambda_p = C_p^{1/2}, \quad \Lambda = \Lambda_e \Lambda_p, \quad \Lambda^* = \Lambda_p \Lambda_e^* \\ \Lambda^* \Lambda &= \Lambda_p \Lambda_e^* \Lambda_e \Lambda_p = \tilde{C}_p^{1/2} \tilde{C}_e \tilde{C}_p^{1/2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из последнего равенства (2.13) подобно (2.12) найдем следующую связь тензоров деформаций в переменных Лагранжа

$$\tilde{C} = \tilde{C}_p^{1/2} \tilde{C}_e \tilde{C}_p^{1/2}. \quad (2.14)$$

Связь между полными, упругими и пластическими деформациями при малых деформациях дополняет замкнутую систему определяющих уравнений, т.к. производные по времени от этих тензоров равны соответственным тензорам скоростей деформаций. В случае конечных деформаций таких связей нет и потому соотношения (2.12) и (2.14) следует понимать как свойства, т.к. они в общем случае не будут использоваться для замыкания определяющих уравнений. Для этой цели будут нужны либо второе и третье равенства из (2.11) при использовании эйлеровых переменных, либо второе и третье равенства из (2.13) в случае переменных Лагранжа. Перейдем к построению тензоров скоростей деформаций.

Тензоры полной, упругой и пластической скоростей деформаций можно получить из выражений для скоростей изменения квадратов расстояний  $ds_i^2$  в  $X_i$ -состояниях. Для этого запишем вспомогательные равенства

$$\begin{aligned} ds_i^2 &= d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_i, \quad d(d\mathbf{r}_i)/dt = d\mathbf{v}_i \\ d\mathbf{v}_0 &= 0 \quad (i=0,1,2), \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_p \end{aligned} \quad (2.15)$$

При помощи (2.15) можно получить следующие соотношения

$$\frac{d}{dt}(ds^2 - ds_0^2) = \frac{d}{dt}(d\mathbf{r} d\mathbf{r}) = 2d\mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} = 2d\mathbf{r} \text{sym} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} = 2d\mathbf{r}_0 \text{sym} \Lambda^* \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}_0} d\mathbf{r}_0 \quad (2.16)$$

Из (2.16) получаем тензоры  $\varepsilon$  и  $\tilde{\varepsilon}$  полной скорости деформаций в переменных Эйлера и Лагранжа соответственно

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \text{sym} \partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{r} = -\text{sym} \mathcal{E}^{-1} \dot{\mathcal{E}} \\ \tilde{\varepsilon} &= \text{sym} \Lambda^* \partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{r}_0 = \text{sym} \Lambda^* \dot{\Lambda} = \Lambda^* \varepsilon \Lambda \end{aligned} \quad (2.17)$$

Подобно (2.16) при помощи (2.15) вычислим тензор пластической скорости деформаций

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(ds_1^2 - ds_0^2) &= 2d\mathbf{r}_1 \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial \mathbf{r}_1} d\mathbf{r}_1 = 2d\mathbf{r}_0 \Lambda_p^* \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial \mathbf{r}_0} d\mathbf{r}_0 \\ \varepsilon_p &= -\text{sym} \mathcal{E}_p^{-1} \dot{\mathcal{E}}_p, \quad \tilde{\varepsilon}_p = \text{sym} \Lambda_p^* \dot{\Lambda}_p = \Lambda_p^* \varepsilon_p \Lambda_p \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $\varepsilon_p$  и  $\tilde{\varepsilon}_p$  — тензоры пластических скоростей деформаций в переменных Эйлера и Лагранжа соответственно. Подобным образом найдем выражения для тензоров  $\varepsilon_e$  и  $\tilde{\varepsilon}_e$  упругих скоростей деформаций:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(ds_2^2 - ds_1^2) &= 2d\mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} - 2d\mathbf{r}_1 d\mathbf{v}_p = 2d\mathbf{r} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} - \mathcal{E}_e^* \varepsilon_p \mathcal{E}_e \right) d\mathbf{r} = 2d\mathbf{r}_1 (\Lambda_e^* \varepsilon \Lambda_e - \varepsilon_p) d\mathbf{r}_1 \\ \varepsilon_e &= \varepsilon - \mathcal{E}_e^* \varepsilon_p \mathcal{E}_e, \quad \tilde{\varepsilon}_e = \Lambda_e^* \varepsilon \Lambda_e - \varepsilon_p = \Lambda_e^* \varepsilon_e \Lambda_e \end{aligned} \quad (2.19)$$

Из (2.19) видно, что ни в переменных Эйлера, ни в переменных Лагранжа связь между тензорами полной, упругой и пластической скоростей деформаций не является аддитивной:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \dot{\varepsilon}_e^* \varepsilon_p \dot{\varepsilon}_e, \quad \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_p + \Lambda_p^* \tilde{\varepsilon}_e \Lambda_p \quad (2.20)$$

При получении формул (2.16)–(2.19) полагали также, как и при получении формул для тензоров конечных деформаций (2.7), что производные  $d(ds_i^2 - ds_j^2)/dt$  следует выражать только через дифференциалы  $dr_i$  или  $dr_j$ , но их нельзя выражать через дифференциал  $dr_k$ , где  $k \neq i$  и  $k \neq j$ . В противном случае тензор скорости упругих деформаций будет зависеть от пластических деформаций, а тензор скорости пластических деформаций от упругих деформаций. Следует также отметить, что тензоры скоростей деформаций из (2.17)–(2.19) не выражаются через производную по времени от тензоров конечных деформаций. Все перечисленные тензоры выражаются через тензоры  $\dot{\varepsilon}$ ,  $\dot{\varepsilon}_e$ ,  $\dot{\varepsilon}_p$  или  $\Lambda$ ,  $\Lambda_e$  и  $\Lambda_p$  и их производные по времени. Это свойство и будет использоваться в дальнейшем при замыкании системы определяющих уравнений.

**3. Построение определяющих уравнений.** Определяющие уравнения для упругопластической среды с упрочнением получим при помощи законов неравновесной термодинамики. Предположим, что внутренняя энергия  $U$  и энтропия  $S$  зависят от абсолютной температуры  $T$ , упругих  $C_e$  и пластических  $C_p$  деформаций. Тогда первое балансовое термодинамическое уравнение Гиббса [8] можно записать следующим образом

$$TdS = dU - \text{tr}(M_e dC_e) - \text{tr}(M_p dC_p) \quad (3.1)$$

где  $\text{tr}$  – операция свертки перемножаемых тензоров,  $M_e$  и  $M_p$  – пока неизвестные симметричные тензорные коэффициенты Гиббса. Для нахождения введем свободную энергию  $A = U - TS$ . Тогда из (3.1) после приравнивания коэффициентов перед независимыми дифференциалами  $dT$ ,  $dC_e$  и  $dC_p$  найдем

$$S = -\partial A / \partial T, \quad M_e = \partial A / \partial C_e, \quad M_p = \partial A / \partial C_p \quad (3.2)$$

Теперь необходимо записать первый закон термодинамики и второе термодинамическое уравнение Гиббса – второй закон термодинамики:

$$\rho \dot{U} = \text{tr}(\sigma \dot{\varepsilon}) - \text{div} \mathbf{q} \quad (3.3)$$

$$T^{-1} \mathbf{q} \text{ grad } T + \rho \text{tr}(M_e \dot{C}_e + M_p \dot{C}_p) - \text{tr} \sigma \dot{\varepsilon} \leq 0 \quad (3.4)$$

Так как  $\sigma$  – симметричный тензор, то при помощи (2.19) последнее слагаемое в неравенстве (3.4) преобразуем следующим образом:

$$\text{tr} \sigma \dot{\varepsilon} = -\text{tr}[\sigma(\dot{\varepsilon}_e^{-1} \dot{\varepsilon}_p^{-1} \dot{\varepsilon}_p \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_e^{-1} \dot{\varepsilon}_e)] \quad (3.5)$$

а производные тензоров  $\dot{C}_e$  и  $\dot{C}_p$  при помощи (2.8) можно привести к виду

$$\dot{C}_e = \dot{\varepsilon}_e^* \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_e^* \dot{\varepsilon}_e, \quad \dot{C}_p = \dot{\varepsilon}_p^* \dot{\varepsilon}_p + \dot{\varepsilon}_p^* \dot{\varepsilon}_p \quad (3.6)$$

Используя выражения  $M_e$  и  $M_p$  из (3.2), а также (3.5) и (3.6), неравенство (3.4) преобразуем так:

$$T^{-1} \mathbf{q} \text{ grad } T + \text{tr}[(2\rho C_e \partial A / \partial C_e + \sigma) \dot{\varepsilon}_e^{-1} \dot{\varepsilon}_e] - \text{tr}[(2\rho \partial A / \partial C_p \cdot C_p + \dot{\varepsilon}_e \sigma \dot{\varepsilon}_e^{-1}) \dot{\varepsilon}_p] \leq 0 \quad (3.7)$$

Полагаем, что выражения в обеих квадратных скобках из (3.7) не зависят от вектора  $\text{grad } T$  и от тензора  $\dot{\varepsilon}_e^{-1} \dot{\varepsilon}_e$ , тогда как вторая скобка определяет диссипацию

энергии вследствие пластической деформации. Поэтому из (3.7) получим

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T, \quad \lambda \geq 0, \quad 2\rho \frac{\partial A}{\partial C_e} C_e + \sigma = 0 \quad (3.8)$$

$$\operatorname{tr} s_p \varepsilon_p \geq 0, \quad s_p = \mathcal{E}_e \sigma \mathcal{E}_e^{-1} + 2\rho \frac{\partial A}{\partial C_p} C_p$$

Здесь  $s_p$  — тензор пластических напряжений. Из второго равенства (3.8) имеем

$$\sigma = -2\rho C_e \partial A / \partial C_e \quad (3.9)$$

Подобное уравнение для упругой среды известно [9] и оно является аналогом закона Гука. Так как тензор  $\sigma$  из (3.9) является тензорной функцией  $C_e$ , то он коммутирует с тензором  $\mathcal{E}_e = C_e^{1/2}$  и тогда выражение для  $s_p$  упрощается

$$s_p = \sigma + 2\rho C_p \partial A / \partial C_p \quad (3.10)$$

Второе слагаемое в (3.10) учитывает упрочнение материала. Для замыкания системы определяющих уравнений остается задать поверхность нагружения [10]:

$$F(s_p, T, \chi_i) = 0, \quad F < 0 \quad \text{при} \quad s_p = 0 \quad (3.11)$$

где  $\chi_i$  — параметры истории пластического деформирования, и ассоциированный закон пластического течения [7]:

$$\varepsilon_p = \psi \partial F / \partial s_p, \quad \psi \geq 0 \quad (3.12)$$

где  $\psi$  — неизвестная скалярная функция. Согласно принципа максимума Мизеса [10], неравенство  $\operatorname{tr} (s_p \varepsilon_p) \geq 0$  из (3.8) будет выполнено, если использовать (3.12), где поверхность нагружения (3.11) предполагается выпуклой. Теперь запишем всю систему полученных уравнений в компактной форме

$$\sigma = -2\rho \frac{\partial A}{\partial C_e} C_e(6), \quad \varepsilon_p = \psi \frac{\partial F}{\partial s_p}(6), \quad s_p = \sigma + 2\rho \frac{\partial A}{\partial C_p} C_p(6), \quad (3.13)$$

$$C_e = \mathcal{E}_e^2(6), \quad C_p = \mathcal{E}_p^* \mathcal{E}_p(6)$$

$$I - \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{r} = \mathcal{E}_p \mathcal{E}_e(9), \quad F(s_p, T, \chi_i) = 0(1)$$

После каждого уравнения в (3.13) в скобках указано количество уравнений. Функция нагружения  $F$  и свободная энергия  $A$  предполагается заданными для конкретного упругопластического материала. Если записать еще три уравнения движения сплошной среды

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \operatorname{grad} \cdot \sigma \quad (3.14)$$

то система (3.13) и (3.14) в общем случае будет содержать 43 уравнения относительно такого же количества неизвестных:  $\sigma(6)$ ,  $C_e(6)$ ,  $C_p(6)$ ,  $\varepsilon_p(6)$ ,  $\mathcal{E}_e(6)$ ,  $\mathcal{E}_p(9)$ ,  $\psi(1)$ ,  $\mathbf{u}(3)$ . Здесь в скобках указано количество неизвестных компонент соответственной величины. Простейшей функцией нагружения может быть условие Мизеса, а простейший вид для  $A$  может быть заимствован, например, из работы [11].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
2. Lee E.H. Elastic-plastic deformations at finite strains // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. No. 1. P. 1-6.



3. *Freund L.B.* Constitutive equations for elastic-plastic materials at finite strain // *Intern. J. Solids and Structures*, 1970. V. 6, No. 8. P. 1193–1209.
4. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упругопластические деформации: Теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
5. *Леонов А.И.* Об описании реологического поведения упруговязких сред при больших упругих деформациях; Препринт № 34, М.: ИПМАН СССР, 1973.
6. *Шитиков А.В., Быковцев Г.И.* Конечные деформации упругопластических сред // *ДАН СССР*. 1990. Т. 311. № 1. С. 59–62.
7. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
8. *Хаазе Р.* Термодинамика необратимых процессов, М.: Мир, 1967. 544 с.
9. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит. 1963. 312 с.
10. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
11. *Чернышов А.Д.* Простые определяющие уравнения для упругой среды при конечных деформациях // *Изв. АН. МТТ*. 1993. № 1. С. 75–81.

Воронеж

Поступила в редакцию  
20.03.1998