

УДК 539.214; 539.374

© 2000 г. В.Ю. КИБАРДИН, В.Н. КУКУДЖАНОВ

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ЛОКАЛИЗАЦИИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ  
И РАЗРУШЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ**

В последние годы возник большой интерес к исследованию разрушения пластических материалов. Предпринимаются попытки описать пластическое деформирование и разрушение кристаллических материалов как единый процесс на основе классического подхода, использующего уравнения пластического течения с единой диаграммой материала  $\tau$ - $\gamma$  или  $\sigma$ - $\epsilon$ , имеющей падающий участок, который призван описывать разупрочнение материала в процессе разрушения [1–3]. Однако такой подход, как было показано [4, 5] приводит к некорректной постановке краевых задач. На падающем участке уравнения меняют свой тип, переходят в задачах квазистатического равновесия из эллиптического типа в гиперболический, а в задачах динамики происходит обратный переход. Чтобы избежать эту некорректность и связанную с ней неустойчивость численного метода решения, возможен формальный математический подход регуляризации определяющих уравнений, основанный на введении в них малых членов, содержащих производные высокого порядка. С другой стороны возможен и другой подход, основанный на физическом, более адекватном, описании процесса разрушения, который также позволяет получить математически корректные краевые задачи. На этом пути также возможны различающиеся подходы: феноменологический, основанный на понятии поврежденного материала, который описывается дополнительной макровеличиной – повреждаемостью [6, 7], она может быть истолкована как дополнительная внутренняя переменная в рамках теории сред с внутренними переменными [8]. Другой путь – физический, при котором макроуравнения пытаются получить, рассматривая механику микродефектов: дислокаций, микротрещин и т.д. [9–11]. В первом случае определяющие уравнения для параметра повреждаемости получают непосредственно из макроэксперимента [12], а во втором их получают из экспериментальных наблюдений на микроуровне, что удастся в настоящее время сделать лишь на качественном уровне с точностью до некоторых констант, которые в конечном итоге могут быть определены также из макроэксперимента. Последний путь, хотя еще весьма далек от совершенства и требует преодоления больших трудностей, имеет то преимущество, что в его основе лежит определенный механизм разрушения, понимание которого может оказаться весьма полезным при создании искусственных материалов с заданными свойствами (сплавов, композитов и др.) [17].

В настоящей работе приняты уравнения, полученные именно на этом последнем пути [11]. Показано, что полученную систему определяющих уравнений после перехода к макропараметрам можно квалифицировать как уравнения обобщенной упруговязкопластической среды с релаксационными внутренними параметрами, согласующиеся с термодинамическими принципами [13].

Эта система уравнений применяется для численного моделирования процессов локализации пластических деформаций на стадии, предшествующей разрушению конструкции.

В работе показана математическая корректность предлагаемых упруговязко-пластических уравнений, включая и стадию разупрочнения материала, которая происходит как за счет деформационного разупрочнения, так и вследствие релаксации остаточных напряжений.

Предлагается новый численный метод решения полученных определяющих уравнений, основанный на идее расщепления сложного физического процесса на простейшие составляющие. Этот подход ранее был развит для упругопластических уравнений теории течения в [14, 15] и оказался весьма эффективным. Он позволяет использовать уже известную информацию об интегрировании более простых реологических уравнений, кроме того, он обеспечивает устойчивый алгоритм расчета, если каждая из его составляющих устойчива.

Каждый шаг интегрирования, состоит из последовательных подшагов. Алгоритм интегрирования определяющих уравнений строится так, что на каждом подшаге интегрирование выполняется в аналитическом виде точно, что повышает практическую точность вычислений на полном шаге.

Интегрирование полной системы уравнений основано на использовании конечно-элементной аппроксимации уравнений принципа возможных перемещений и неявного итерационного метода для интегрирования полученной нелинейной системы уравнений по времени.

Показано, что введение малой вязкости регуляризует систему уравнений метода конечных элементов и дает возможность рассчитывать напряженно-деформированное состояние тела при наличии локализации пластической деформации для материалов с падающей диаграммой.

1. Выпишем систему уравнений, с которой предстоит работать. В нее войдут уравнения движения в виде принципа возможных перемещений, закон Гука и определяющие уравнения для остаточных напряжений  $s_{ij}^r$  и пластической деформации  $\epsilon_{ij}^p$ , полученные в [11] на основе микромеханики дислокаций. Рассмотрим упрощенный вариант этих уравнений без учета пористости материала.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} F_i \delta u_i d\Omega + \int_S g_i \delta u_i ds \quad (1.1)$$

$$Ds_{ij} / Dt = 2\mu(\dot{\epsilon}'_{ij} - \dot{\epsilon}^p_{ij}), \quad \dot{\sigma}'_{ij} = 3K\dot{\epsilon}'_{ij}$$

$$\dot{\epsilon}^p_{ij} = \lambda_1 \tau_{ij}, \quad \dot{s}^r_{ij} = 2\alpha \dot{\epsilon}^p_{ij} - \lambda_2 s^r_{ij}$$

Здесь  $F$  и  $g$  — соответственно объемные и поверхностные силы;  $K$  и  $\mu$  — объемный и сдвиговый упругие модули;  $\alpha$  — константа, характеризующая, в зависимости от знака, упрочнение или разупрочнение материала;  $u_i$  — вектор перемещений в точке;  $Ds_{ij} / Dt = \dot{s}_{ij} + \Omega_{ik} s_{kj} + \Omega_{ki} s_{jk}$  — производная Яуманна;  $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{j,i})$  — угловые скорости вращения частиц материала;  $\epsilon'_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{3}\delta_{ij} u_{k,k}$  — девиатор тензора деформаций;  $\tau_{ij} = s_{ij} - s^r_{ij}$  — девиатор активных напряжений;  $\lambda_1 = \hat{\Psi}(T_2 - T_0) / T_2$ ;  $\lambda_2 = \hat{Q}(S_2^r - S_0^r) / S_2^r$ ;  $T_2, S_2^r$  — вторые инварианты тензоров активных и остаточных напряжений;  $T_0, S_0^r$  — константы;  $\Psi(z), Q(z)$  — известные непрерывные функции своих аргументов, такие что  $\Psi(0) = 0, Q(0) = 0$ , при этом, если известна непрерывная функция  $G(z)$ , то функция с "крышкой"  $\hat{G}(z)$  определяется следующим образом:

$$\hat{G}(z) = \begin{cases} G(z), & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

Видно, что в системе уравнений (1.1) все нелинейные члены содержатся в скалярных множителях  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , не содержащих производных от неизвестных величин.

Таким образом, старший дифференциальный оператор системы (1.1) находится, когда оба множителя обращаются в нуль, при этом уравнения (1.1) переходят в уравнения для гипотетического материала. В случае квазистатического равновесия система будет эллиптической и гиперболической в динамике. Поэтому независимо от того имеется или нет падающий участок на диаграмме материала  $\sigma$ - $\epsilon$ , которая входит лишь в нелинейные члены, приведенная система уравнений будет оставаться эллиптической и краевая задача для упругопластического разупрочняющего материала будет корректной, если она корректна для упругого материала. Таким образом, модель приводит к корректной постановке задачи во всем диапазоне нагрузок.

Проведем расщепление системы (1.1) по физическим процессам, для простоты в случае малых деформаций.

Для численного решения систем (1.1) строится поэтапная многоуровневая расчетная схема. Считая поле перемещений известным, на первом этапе интегрируется система определяющих уравнений, в результате которого определяются тензоры полных и остаточных напряжений. Этот этап в свою очередь состоит из нескольких подэтапов, которые являются следствием принимаемого метода расщепления определяющих уравнений на более простые уравнения. На первом подшаге вычисляются напряжения при скорости пластической деформации  $\dot{\epsilon}_{ij}^p = 0$ , в соответствии с законом Гука. На втором подшаге уравнения интегрируются при равенстве нулю полных деформаций и при начальных условиях, полученных после первого подшага. Этот подшаг соответствует вязкопластической релаксации девиаторов полных и остаточных напряжений.

Система уравнений (1.1) разбивается на две подсистемы:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = 0, \quad \dot{s}_{ij}^p = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}, \quad \dot{\sigma}_{ii} = 3k\dot{\epsilon}_{ii}, \quad \dot{s}_{ij}^r = 0 \quad (1.2)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}' = 0, \quad \dot{s}_{ij}' = -2\mu\dot{\epsilon}_{ij}, \quad \dot{\sigma}_{ii}' = 0, \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda_1\bar{\tau}_{ij}, \quad \dot{s}_{ij}^r = 2\alpha\dot{\epsilon}_{ij}^p - \lambda_2 s_{ij}^r \quad (1.3)$$

Введем вектор неизвестных  $U$  с компонентами

$$U^T = (s_{ij}, \sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, s_{ij}^r)$$

Начальные условия для системы (1.2) совпадают с начальными условиями исходной системы (1.1):  $U(0) = \bar{U}(0)$ , а для системы (1.3)  $\bar{U}(0) = \bar{U}(\Delta t)$ , где  $\Delta t$  – интервал интегрирования определяющих уравнений (1.1–1.3).

В случае конечных деформаций расщепление следует проводить в три этапа, добавляется этап вычисления поворотов частиц в членах с Яуманновской производной [14].

Рассмотрим теперь систему (1.3). Учитывая, что  $\tau_{ij} = s_{ij} - s_{ij}^r$ , ее можно переписать в переменных  $s_{ij}^r, \tau_{ij}$ , исключив  $\epsilon_{ij}^p$  и  $s_{ij}$ , получим

$$\dot{\tau}_{ij} = -2(\mu + \alpha)\lambda_1\bar{\tau}_{ij} + \lambda_2\bar{s}_{ij}^r, \quad \dot{s}_{ij}^r = 2\alpha\lambda_1\bar{\tau}_{ij} - \lambda_2\bar{s}_{ij}^r \quad (1.4)$$

Эту систему также расщепим на две составляющие, так как это даст возможность аналитически проинтегрировать уравнения для каждой составляющей в отдельности и в дальнейшем использовать полученные аналитические решения в вычислительном процессе, минуя дискретизацию уравнений. В результате получим

$$\dot{\tau}_{ij}^{(1)} = -2(\mu + \alpha)\lambda_1\bar{\tau}_{ij}^{(1)}, \quad \dot{s}_{ij}^{r(1)} = 2\alpha\lambda_1\bar{\tau}_{ij}^{(1)} \quad (1.5)$$

с начальными условиями  $\bar{V}^{(1)}(0) = \bar{V}^{(1)}(\Delta t)$ , где  $\bar{V}^T = (\tau_{ij}, s_{ij}^r)$  и систему уравнений корректор

$$\dot{\tau}_{ij}^{(2)} = \lambda_2\bar{s}_{ij}^{r(2)}, \quad \dot{s}_{ij}^{r(2)} = -\lambda_2\bar{s}_{ij}^{r(2)} \quad (1.6)$$

с начальными условиями  $\bar{V}^{(2)}(0) = \bar{V}^{(2)}(\Delta t)$ .

Решение полной системы определяющих уравнений (1.1) на интервале  $\Delta t$  будет  $V(\Delta t) = \bar{V}^{(2)}(\Delta t)$ . Системы (1.5–1.6) имеют вид

$$\dot{x}_{ij} = A\lambda x_{ij}, \quad \dot{y}_{ij} = B\lambda x_{ij} \quad (1.7)$$

$$X = (x_{ij} \bar{x}_{ij})^{1/2}, \quad \lambda = \hat{\Phi}(X - X_L) / X$$

Где  $\Phi(z)$  – известная функция своего аргумента, удовлетворяющая условию  $\Phi(0) = 0$ ;  $X_L$ ,  $A$  и  $B$  – константы.

Дифференцируя  $X$  по времени и учитывая (1.7), находим

$$\dot{X} = \frac{x_{ij} \dot{\bar{x}}_{ij}}{(x_{ij} \bar{x}_{ij})^{1/2}} = A\lambda X = A\hat{\Phi}(X - X_L), \quad \frac{x_{ij}}{\bar{x}_{ij}} = \frac{X}{X^0} \quad (1.8)$$

$$y_{ij} = y_{ij}^0 + \frac{B}{A}(x_{ij} - x_{ij}^0)$$

Уравнение (1.8) интегрируется в квадратурах и для произвольной функции  $\hat{\Phi}(X - X_L)$  можно получить аналитическое решение. Рассмотрим случай  $\Phi(X - X_L) = C(X - X_L)^n$ , где  $C$ ,  $n$  – константы,  $X \geq X_L$ . Подставляя выражение для  $\Phi(X - X_L)$  в (1.8), получим

$$\dot{X} = AC(X - X_L)^n$$

$$X = X_L + (X^0 - X_L) \exp(AC \cdot \Delta t) \quad (n = 1) \quad (1.9)$$

$$X = X_L + ((1 - n)AC \cdot \Delta t + (X^0 - X_L)^{1-n})^{1/(1-n)} \quad (n > 1)$$

Здесь и ниже градусом помечены начальные значения величин,  $\Delta t$  – шаг интегрирования и одновременно промежуток времени, в течении которого происходит релаксация.

Пусть функции  $\Psi(T_2 - T_0)$  и  $Q(S_2^r - S_0^r)$  имеют вид  $\Psi(T_2 - T_0) = C_1(T_2 - T_0)$ ,  $Q(S_2^r - S_0^r) = C_2(S_2^r - S_0^r)$ , тогда для  $T_2 \geq T_0$  и  $S_2^r \geq S_0^r$  системы (1.5–1.6) имеют следующие аналитические решения:

$$T_2^0 = (\tau_{ij}^0 \tau_{ij}^0)^{1/2}, \quad T_2 = T_0 + (T_2^0 - T_0) \exp((-2\mu - 2\alpha)C_1 \Delta t) \quad (1.10)$$

$$\tau_{ij} = \frac{T_2}{T_0} \tau_{ij}^0, \quad s_{ij}^r = s_{ij}^{r0} - \frac{\alpha}{\mu + \alpha} (\tau_{ij} - \tau_{ij}^0)$$

$$S_2^{r0} = (s_{ij}^{r0} s_{ij}^{r0})^{1/2}, \quad S_2^r = S_0^r + (S_2^{r0} - S_0^r) \exp(C_2 \Delta t)$$

$$s_{ij}^r = \frac{S_2^r}{S_2^{r0}} s_{ij}^{r0}, \quad \tau_{ij} = \tau_{ij}^0 - (s_{ij}^r - s_{ij}^{r0})$$

Определим временные константы  $\tau_1$  и  $\tau_2$  следующим образом:  $\tau_1 = 1/[2C_1(\mu + \alpha)]$ ,  $\tau_2 = 1/C_2$ , как видно из (1.10) они являются характерными временами релаксации активных и остаточных напряжений соответственно.

Зная  $\tau_{ij}$  и  $s_{ij}^r$  и учитывая, что  $\tau_{ij} = s_{ij} - s_{ij}^r$ , можно из (1.3) найти

$$s_{ij} = \tau_{ij} + s_{ij}^r, \quad \varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^{p0} - \frac{s_{ij} - s_{ij}^0}{2\mu} \quad (1.11)$$

2. Перейдем к решению полной системы (1.1). Запишем принцип возможных перемещений в терминах метода конечных элементов [16].

$$\int_{\Omega} B^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} N^T F d\Omega + \int_{S_{\Omega}} N^T g dS \quad (2.1)$$

$$\Delta \epsilon = B \Delta d, \quad \Delta \sigma = D \Delta \epsilon^e, \quad K = B^T D B \quad (2.2)$$

Здесь  $\mathbf{d}$  – вектор узловых перемещений;  $\epsilon$ ,  $\epsilon^e$ ,  $\epsilon^p$  – вектора общей, упругой и пластической деформаций в гауссовых узлах элементов;  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{g}$  – вектора объемных и поверхностных сил в узлах элементов;  $\sigma$  – вектор напряжений;  $N$  – матрица значений функций формы;  $B$  – матрица производных функций формы, связывающая вектор узловых перемещений  $\mathbf{d}$  и вектор деформаций  $\epsilon$ ;  $K$  – матрица жесткости для упругого тела;  $D$  – матрица упругих моделей, связывающая вектор упругих деформаций  $\epsilon^e$  с вектором напряжений  $\sigma$ .

Область  $\Omega$ , где ищется решение, разбивается на криволинейные восьмиузловые серендиповы элементы, в процессе вычисления они отображаются на квадрат, интегралы по области решения и по ее границе рассчитываются по формулам Гаусса, и знак интеграла по области или по границе области в уравнении принципа возможных перемещений следует понимать как гауссову сумму. В связи с этим, кроме вектора узловых перемещений, вычисляются также вектора пластических деформаций и напряжений в гауссовых узлах элементов.

Так как численно решение задачи мы будем проводить пошаговым методом при последовательных приращениях внешних нагрузок, то следует записать (2.1) через приращения сил и напряжений. Обозначим приращение внешних сил

$$\Delta \mathbf{f} = \int_{\Omega} N^T \Delta \mathbf{F} d\Omega + \int_{S_{\Omega}} N^T \Delta \mathbf{g} dS$$

тогда (2.1) можно записать в виде  $\int_{\Omega} B^T \Delta \sigma d\Omega = \Delta \mathbf{f}$ .

Принимая во внимание (2.2), получим

$$\int_{\Omega} B^T D \Delta \epsilon^e d\Omega = \int_{\Omega} B^T D (\Delta \epsilon - \Delta \epsilon^p) d\Omega = K \Delta \mathbf{d} - \int_{\Omega} B^T D \Delta \epsilon^p d\Omega = \Delta \mathbf{f} \quad (2.3)$$

Пусть теперь задано некоторое приращение нагрузки  $\Delta \mathbf{f}$ , которому соответствует промежуток времени  $\Delta t$ , пусть так же известны начальные значения величин  $\mathbf{d}^0$ ,  $\sigma^0$ ,  $\epsilon^p{}^0$  и  $s^r{}^0$ . Пользуясь методом расщепления и соотношениями (1.10), (1.11) можно получить из (2.3) замкнутую систему нелинейных уравнений относительно узловых перемещений. Определим  $\Delta \epsilon^p$  как функцию  $\Delta \mathbf{d}$  следующим образом. Зная вектор приращений узловых перемещений  $\Delta \mathbf{d}$ , определим упругое приращение вектора напряжений в гауссовых узлах конечных элементов  $\Delta \sigma^e = D B \Delta \mathbf{d}$ ,  $\sigma' = \sigma^0 + \Delta \sigma^e$ . Для каждого гауссова узла запишем:

$$s'_{ij} = \sigma'_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma'_{kk}, \quad \tau'_{ij} = s'_{ij} - S_{ij}^r{}^0, \quad T_2^0 = (\tau'_{ij} \tau'_{ij})^{1/2} \quad (2.4)$$

Пусть далее в течение  $\Delta t$  времени происходит релаксация напряжений в соответствии с уравнениями (1.10): если  $T_2^0 < T_0$  получим  $s_{ij}^{r*} = s_{ij}^r{}^0$ ,  $\tau_{ij}^* = \tau_{ij}^0$ , если  $T_2^0 \geq T_0$ , то из соотношений (1.10) находим

$$T_2^* = T_0 + (T_2^0 - T_0) \exp(-2(\mu + \alpha) C_1 \Delta t), \quad \tau_{ij}^* = \frac{T_2^*}{T_2^0} \tau_{ij}^0 \quad (2.5)$$

$$s_2^{r*} = s_2^r{}^0 - \frac{\alpha}{\mu + \alpha} (\tau_{ij}^* - \tau_{ij}^0), \quad S_2^{r*} = (s_{ij}^{r*} s_{ij}^{r*})^{1/2}$$

если  $S_2^{r*} < S_0^r$ , то  $s_{ij}^r = s_{ij}^{r*}$ ,  $\tau_{ij} = \tau_{ij}^*$ , если  $S_2^{r*} \geq S_0^r$ , то из (1.10) получим

$$S_2^r = S_0^r + (S_2^{r*} - S_0^r) \exp(C_2 \Delta t), \quad s_{ij}^r = \frac{S_2^r}{S_2^{r*}} s_{ij}^{r*}, \quad \tau_{ij} = \tau_{ij}^* - (s_{ij}^r - s_{ij}^{r*}) \quad (2.6)$$

Далее, зная  $\tau_{ij}$ ,  $s_{ij}^r$  и пользуясь (1.10), найдем

$$s_{ij} = \tau_{ij} + s_{ij}^r, \quad \Delta \varepsilon_{ij}^p = -\frac{s_{ij} - s_{ij}^0}{2\mu}, \quad \varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^{p0} - \frac{s_{ij} - s_{ij}^0}{2\mu}, \quad \sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma'_{kk}$$

Таким образом получим вектор  $\sigma$  после релаксации и определим зависимость  $\Delta \sigma$  и  $\Delta \varepsilon^p$  на шаге от  $\Delta d$ , и можно записать  $\Delta \sigma = \Delta \sigma(\Delta d)$ ,  $\Delta \varepsilon^p = \Delta \varepsilon^p(\Delta d)$ . Уравнение (2.3) переписется в виде

$$K \Delta d - \int_{\Omega} B^T D \Delta \varepsilon^p(\Delta d) d\Omega = \Delta f \quad (2.7)$$

Это замкнутая нелинейная система алгебраических уравнений относительно  $\Delta d$ , которая может быть решена каким-либо итерационным методом. Запишем

$$\Delta \Psi(\Delta d) = K \Delta d - \int_{\Omega} B^T D \Delta \varepsilon^p(\Delta d) d\Omega - \Delta f = 0 \quad (2.8)$$

Систему (2.8) будем решать на каждом шаге по нагрузке с помощью метода упругих решений. Примем в качестве нулевого приближения  $\Delta d_0 = 0$ . Для  $n$ -й итерации

$$\Delta d_n = K^{-1} \left( \Delta f - \int_{\Omega} B^T D \Delta \varepsilon^p(\Delta d_{n-1}) d\Omega \right) \quad (2.9)$$

где  $n$  – номер итерации.

Итераций заканчиваются, когда невязка  $\Delta \Psi(\Delta d_n)$  становится меньше задаваемой точности. Далее происходит переход к следующему приращению по нагрузке  $\Delta f$  и процесс повторяется.

**3.** Проведем анализ расчетной схемы, предложенной в пункте 2. Формулы (1.8) – (1.9) для выражений интенсивности активных и остаточных напряжений запишем в безразмерных переменных

$$T_2 = T_0 + (T_2^0 - T_0) \exp\left(\frac{-\Delta t}{\tau_1}\right); \quad S_2^r = S_0^r + (S_2^{r0} - S_0^r) \exp\left(\frac{-\Delta t}{\tau_2}\right) \quad \text{при } n = 1$$

$$T_2 - T_0 = \left[ (1-n) \frac{\Delta t}{\tau_1} + (T_2^0 - T_0)^{1-n} \right]^{1/n} \quad (3.1)$$

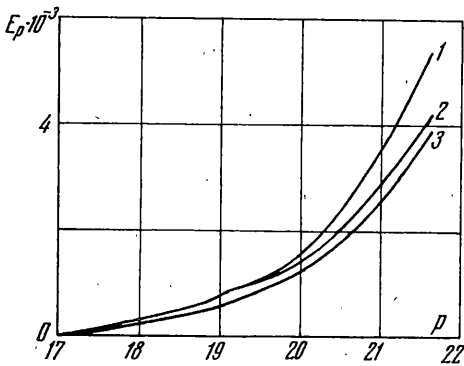
$$S_2^r - S_0^r = \left[ (1-m) \frac{\Delta t}{\tau_2} - (S_2^{r0} - S_0^r)^{1-m} \right]^{1/m} \quad \text{при } n \neq 1, \quad m \neq 1 \quad (3.2)$$

Из формулы (3.2) следует, что при  $\tau_i \rightarrow 0$  решение стремится к своим стационарным величинам  $T_2 \rightarrow T_0$  и  $S_2^r \rightarrow S_0^r$ .

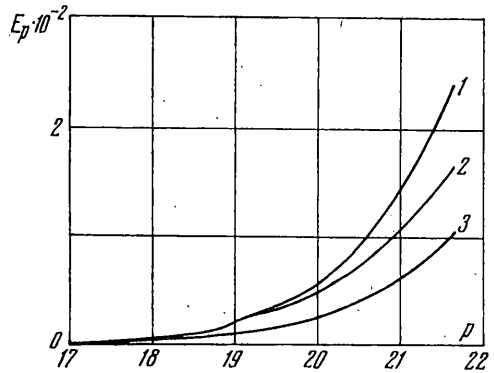
При этом эти значения достигаются за конечное время  $\Delta t$ , если  $n < 1$

$$\Delta t = \tau_i (T_0^2 - T_0)^{1-n} / (1-n) \quad (3.3)$$

и за бесконечное, если  $n \geq 1$ . Этот результат справедлив при любой функции вязкости  $\Phi(z)$ , здесь  $n$  – показатель степени в разложении функции  $\Phi(z)$  при  $z = 0$ . Для



Фиг. 1



Фиг. 2

более простой модели упруговязкопластической среды этот результат был получен в [14].

Таким образом, предлагаемая расчетная схема позволяет проводить расчет и при  $\tau_i \rightarrow 0$ , получаемое при этом решение будет решением уравнений (1.1) при  $\tau_i = 0$ , если такое решение существует, и его можно рассматривать как обобщенное решение, когда классического решения при  $\tau_i = 0$  не существует или оно не единственно. Введение нелинейных функций  $\Phi(z)$  с большим параметром  $t_0/\tau_i$  может рассматриваться в этом случае как регуляризация исходной некорректной задачи. Оно эквивалентно введению в модель старшего оператора с малым параметром  $\delta = \tau_i/t_0$ , где  $t_0$  – характерное время задачи. Такие уравнения принято называть "жесткими". Корректный численный метод решения "жестких" систем должен обладать асимптотическим свойством таким, что при  $\delta \rightarrow 0$  решение должно стремиться к стационарному. Наилучшей регуляризацией будет введение нелинейной функции с  $n < 1$ , т.к. в этом случае, как следует из (3.3), решение выходит на стационарное значение за конечное число шагов точно, а не в асимптотическом смысле.

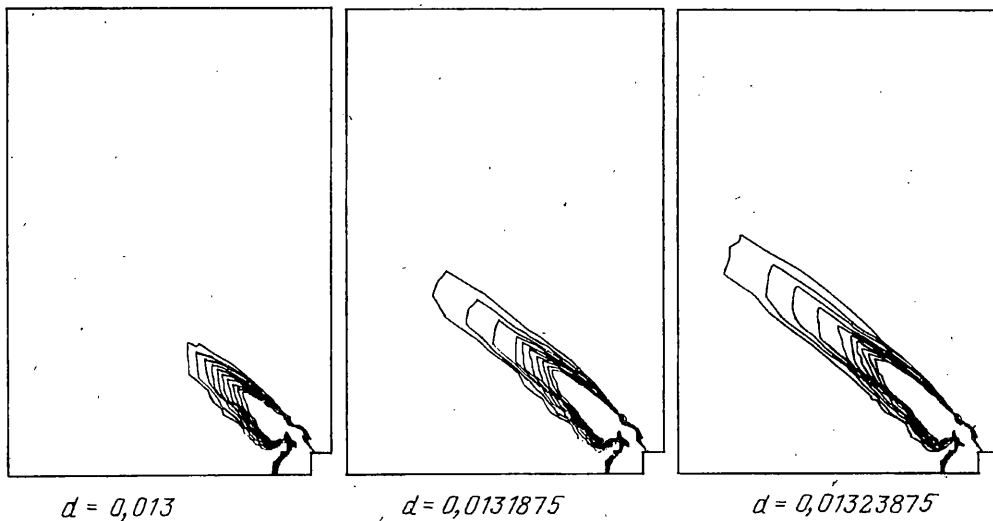
Для нашей модели классическое решение существует при  $\tau_i = 0$ , если материал идеальный или упрочняется  $\alpha \geq 0$ , и начально-краевая задача становится для нее некорректной при  $\alpha < 0$ . Ниже рассматриваемые примеры показывают, что обобщенное решение может быть получено и в случае падающей диаграммы при  $\alpha < 0$ .

Отметим, что при  $\alpha > 0$  и  $\tau_i \rightarrow 0$  рассматриваемая модель переходит в модель пластического течения, независящую от масштаба времени, с двумя поверхностями текучести для активных и остаточных напряжений [11]. Наличие предельной поверхности для остаточных напряжений ограничивает их интенсивность и соответственно приводит к ограниченному эффекту Баушингера, или ограниченному росту упрочнения, что согласуется с дислокационными представлениями о пластической деформации в стадии пластического деформирования непосредственно предшествующего разрушению. Классическая модель пластического течения с кинематическим неограниченным линейным упрочнением также следует из рассматриваемых уравнений при  $S_0^f = 0$  и  $\tau_2 \rightarrow \infty$ .

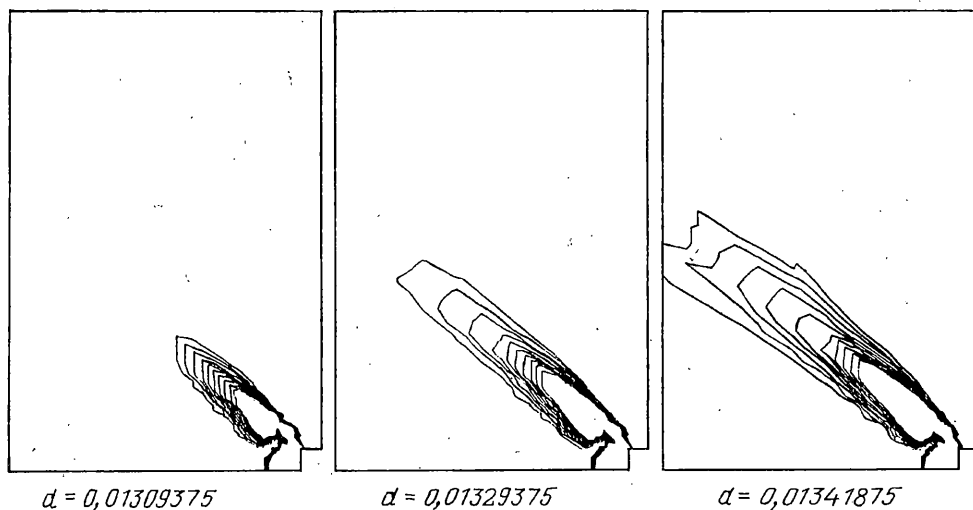
4. Рассмотрим решение примеров, иллюстрирующих применение модели и численного метода к решению конкретных задач.

Бесконечно длинная цилиндрическая труба нагружается изнутри давлением по линейному закону  $p = p_0 t/t_0$  ( $p_0 = 9,8$  МПа – константа, имеющая размерность давления,  $t_0 = 1$  с – характерное время задачи,  $t$  – реальное время в секундах. Параметры трубы: внутренний радиус – 100 мм; внешний радиус – 200 мм; модуль Юнга  $E = 2,058 \cdot 10^3$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ; предел текучести  $T_0 = 19,21$  МПа.

При постепенном возрастании давления вначале происходит упругая деформация трубы, затем от внутренней поверхности трубы начинает распространяться зона пласт-



Фиг. 3



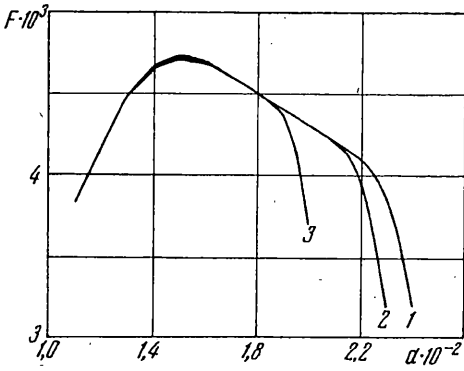
Фиг. 4

тической деформации, при некотором критическом значении давления  $p^*$  она достигает внешней поверхности и вся труба переходит в пластическое течение.

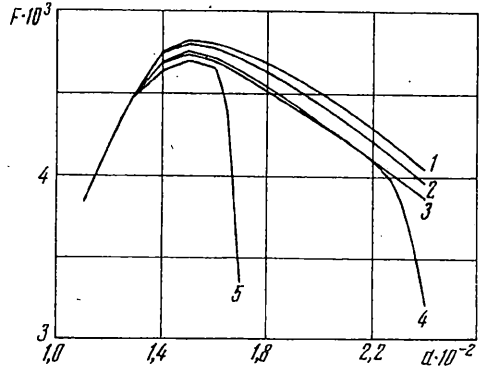
Нам интересен случай, когда вся труба уже находится в пластическом состоянии. Проследим, сходится ли в этом случае вычислительный процесс. Сначала рассмотрим случай без учета остаточных напряжений, для этого примем значение  $\tau_2 \geq \tau_0$ .

При фиксированном максимальном давлении  $p_{\max} = 21,17$  МПа будем изменять количество шагов по давлению, наблюдая за тем, как ведет себя решение. На фиг. 1 приведены зависимости интенсивности пластической деформации  $E_p$  на расстоянии 147,3 мм от оси трубы, от давления внутри трубы  $p$ , при измельчении шага по нагрузке,  $2\alpha = 0$ ,  $\tau_1 = 6,2 \cdot 10^{-3}$  с. Время наблюдения за процессом деформации 0,465 с, что значительно больше  $\tau_1$ . Кривой 1 соответствует 64 шага по нагрузке, кривой 2 – 146 и кривой 3 – 244 шага. Критическое давление  $p^* = 18,77$  МПа.

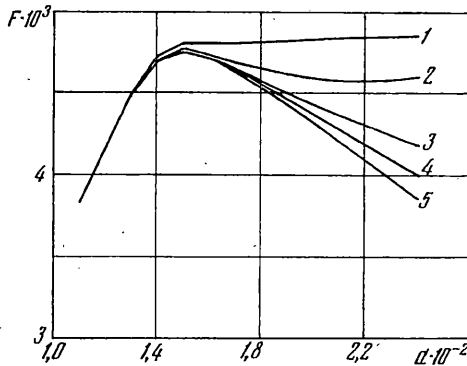




Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Следует заметить, что при  $p > p^*$ , сходимость вычислительного процесса при линейной функции вязкости  $\Phi(z)$  существенно хуже, чем при  $p \leq p^*$ , и удовлетворительные результаты удается получить только при таких малых шагах времени, когда  $\Delta t/\tau_1 \approx 1$  (см. кривая 1 фиг. 1), где  $\Delta t$  – шаг по времени, соответствующий шагу по нагрузке. Для  $p \leq p^*$  отношение  $\Delta t/\tau_1$  может быть порядка 10 и более. Для кривой 3 (фиг. 1) при  $p > p^*$   $\Delta t/\tau_1 \approx 0,2$ . Для нелинейной функции  $\Phi(z)$  при  $n = 1/2$  сходимость достигается при  $\Delta t/\tau_1 > 1$ .

В целом, исходя из фиг. 1, можно сделать вывод, что с измельчением шага по нагрузке, получаемое численное решение стремится к некоторому предельному решению, что доказывает сходимость метода. Аналогичные результаты для этих же разбиений по нагрузке получены и в случае кинематического разупрочнения (фиг. 2,  $2\alpha = -4,9$  МПа). Как видно из приведенных графиков, при разупрочнении интенсивность пластической деформации существенно возрастает, а сходимость решения к решению упругопластической задачи замедляется. При  $p > p^*$  нелинейная вязкопластичность увеличивает скорость сходимости к решению, независящему от масштаба времени.

Рассмотрим теперь двумерную задачу о растяжении цилиндра с дефектом в виде небольшого кольцевого пропила посредине. Торцы цилиндра движутся с постоянной скоростью  $V_0 = 0,1$  мм/с. Параметры цилиндра: длина – 24 мм; радиус – 8 мм; модуль Юнга  $E = 2058$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ; предел текучести  $T_0 = 19,21$  МПа; ширина пропила – 1 мм; глубина – 0,5 мм.

Пренебрежем пока релаксацией остаточных напряжений. Будем изменять параметры  $\tau_1$  и  $2\alpha$ , наблюдая за получаемым решением.

Линии уровня эффективной интенсивности пластической деформации  $\bar{\epsilon}^p$  ( $d\bar{\epsilon}^p = \sigma_{ij}d\epsilon_{ij}/T_2$ ) для значений  $2\alpha = -4,9$  МПа и  $\tau_1 = 2,1 \cdot 10^{-7}$  с представлены на фиг. 3. Минимальная цена изолинии  $2 \cdot 10^{-5}$ , расстояние между соседними изолиниями  $2 \cdot 10^{-5}$ . При  $\Delta t/\tau_1 = 10$  и  $d > 0,01323875$  мм решение перестало сходиться, хотя пластическая зона еще не достигла оси симметрии цилиндра.

При большем значении параметра  $\tau_1 = 2,1 \cdot 10^{-4}$  с было получено сходящееся решение для случая, когда пластические зоны пересекают ось цилиндра (фиг. 4). Таким образом, начиная с некоторого значения времени релаксации активных напряжений  $\tau_1^*$ , при  $\tau_1 > \tau_1^*$ , принятая модель регуляризирует систему уравнений метода конечных элементов.

На фиг. 5 приведены зависимости силы  $F$ , приложенной к торцу цилиндра, от смещения торца  $d$  [мм] для  $2\alpha = -4,9$  МПа,  $\tau_1 = 6,5 \cdot 10^{-4}$  с, построенные для различных значений  $\Delta t$  на шаге: график 1 –  $\Delta t = 6,25 \cdot 10^{-5}$  с, 2 –  $\Delta t = 2,5 \cdot 10^{-4}$  с, 3 –  $\Delta t = 6,25 \cdot 10^{-4}$  с. Как видно из рисунка с измельчением шага по времени зависимость стремится к некоторой предельной кривой.

На фиг. 6 приведены такие же зависимости, для  $\Delta t = 6,25 \cdot 10^{-5}$  с и различных значений  $\tau_1$ : кривая 1 –  $\tau_1 = 2,1 \cdot 10^{-3}$  с, 2 –  $\tau_1 = 1,6 \cdot 10^{-3}$  с, 3 –  $\tau_1 = 1,1 \cdot 10^{-3}$  с, 4 –  $\tau_1 = 6,5 \cdot 10^{-4}$  с, 5 –  $\tau_1 = 2,1 \cdot 10^{-4}$  с. С увеличением времени релаксации активных напряжений критическая сила (то есть значение силы, при котором пластические зоны пересекают ось цилиндра) возрастает. При приближении силы к ее критическому значению зависимость  $F(d)$  становится падающей.

Пусть теперь имеется релаксация остаточных напряжений, из фиг. 7 ( $\tau_1 = 0,0011$  с,  $S_0^r = 0$ ,  $2\alpha = -4,9$  МПа) на котором приведены зависимости  $F(d)$  для различных значений  $\tau_2$  (кривая 1 –  $\tau_2 = 10^{-3}$  с, 2 –  $3,3 \cdot 10^{-2}$  с, 3 –  $10^{-1}$  с, 4 –  $2 \cdot 10^{-1}$  с, 5 –  $\infty$ ), видно, что чем меньше время релаксации остаточных напряжений, тем большую роль играет разупрочнение материала и тем существеннее локализация пластических деформаций в полосах скольжения на фиг. 4. При  $S_0^r = 0$ , с уменьшением  $\tau_1$  и  $\tau_2$  решение стремится к решению упругопластической задачи для случая идеальной пластичности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rudnicki J.W., Rice J.R. Conditions for the localization of deformation in pressure – sensitive dilatant materials // J. Mech. and Phys. Solids. 1975. V. 23. № 6. P. 371–394.
2. Nayak G.C., Zienkiewicz O.C. Elastoplastic stress analysis: a generalizations for various constitutive relations including strain softening // Int. J. Numerical Methods Eng. 1972. № 5. P. 113–135.
3. Ottosen N.S., Runesson K. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elastoplasticity // Intern. J. Solids and Struct. 1991. V. 27. № 4. P. 401–421.
4. de Borst R. Non-linear and time dependent problems // Continuum models for localized failure. FEM. – 94. Ed. N.E. Wiberg. 1994. P. 19–34.
5. Кукуджанов В.Н., Иванов В.Л., Ковшов А.Н., Шнейдерман Д.Н. Исследование локализации пластических деформаций при потере устойчивости откосов // Препринт № 538. М.: ИПМ РАН, 1994, 67 с.
6. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения. М.: Наука, 1987. 80 с.
7. Maugin G. The Thermomechanics of Plasticity and Fracture. Cambridge: Univ. Press, 1992. 400 p.
8. Кукуджанов В.Н. К численному моделированию нестационарных процессов деформирования и разрушения упругопластических тел при больших деформациях // Математические методы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1986. С. 75–84.
9. Gurson A.L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media // Trans. ASME. Ser. H.J. Eng. Materials Technol. 1977. V. 99. № 1. P. 2–15.
10. Tvergaard V. Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions // Intern. J. Fracture. 1981. V. 17. № 4. P. 389–407.

11. *Кукуджанов В.Н.* Микромеханическая модель неупругой среды для описания локализации деформаций // IX конф. по прочности и пластичности. Прочность и пластичность. М.: ИПМ РАН, 1996. Т. 2. С. 118–126.
12. *Lemaitre J., Chaboche J.-L.* Mechanics of Solid Materials. Cambridge: Univ. Press, 1994. 577 p.
13. *Кукуджанов В.Н., Сантаоля К.* Термодинамика вязкопластических сред с внутренними параметрами // Изв. РАН. ММТ. 1997. № 2. С. 115–126.
14. *Кукуджанов В.Н.* Разностные методы решения задач механики деформируемых тел. М.: МФТИ, 1992. 122 с.
15. *Калмыков С.Г., Кукуджанов В.Н.* Метод потоков и корректирующих маркеров (ПИКМ – метод) для численного моделирования высокоскоростных соударений твердых тел. Припринт. № 529. М.; ИПМ РАН, 1993. 38 с.
16. *Owen D.R.J., Hinton E.* Finite Elements in Plasticity. Theory and Practice // Swansea U.K. Pineridge Press Limited, 1980, 589 p.
17. *Панин В.Е., Лихачев В.А., Гриняев Ю.В.* Структурные уровни деформации твердых тел. Новосибирск: Наука, 1985. 229 с.

Москва

Поступила в редакцию  
14.07.1997