МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2000

УДК 624.07.539.4

© 2000 г. В.Д. КЛЮШНИКОВ

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НАСЛЕДСТВЕННЫХ СРЕД

Разработанный в 60–70-х годах подход к проблеме устойчивости упругопластических тел, основанный на выделении множества точек бифуркации разного порядка (бифуркационного множества) оправдал так называемую концепцию продолжающегося нагружения и позволил создать эффективный метод расчета устойчивости упруго-пластических конструкций на основе введения упругого эквивалента [1].

Поведение конструкций из реологических материалов в отношении устойчивости отличается от таковых для упругопластических конструкций. Если в последнем случае существуют точки, за которыми заданное возмущение исчезает на конечном отрезке процесса, то в реологических конструкциях таких точек нет. Поэтому до последнего времени подавляющее число исследований в этой проблеме ограничивается подходом Ляпунова, который не в состоянии выделить участок устойчивости невозмущенного процесса. В результате приходится признавать весь процесс либо устойчивым, либо неустойчивым; ибо такой подход требует включения в рассмотрение бесконечно удаленного момента времени, что для механики деформируемого твердого тела едва ли приемлемо.

Однако, для процессов деформирования реологических конструкций имеются точки другого рода, похожие на бифуркационные и также составляющие целое множество. Эти точки, подобно бифуркационным, отвечают моментам смены поведения реакции на возмущение – точки смены знака (N-ой) производной по времени ухода от невозмущенного процесса сразу за возмущением. Первая точка такого типа [2] отвечает смене знака скорости, вторая [3] – знака ускорения и т.д. Множество таких точек, названных в [1] псевдобифуркационными, определяются аналогично тому, как отмеченные выше две точки – сменой знака последующей производной без учета других производных. Нумерация точек определяется порядковым номером анализируемой производной: ПБN – псевдобифуркция N-го порядка.

В отличие от бифуркационной, прохождение отдельной псевдобифуркационной точки вносит существенно меньшее изменение в процесс деформирования и не может, как правило, быть зафиксировано экспериментально. Надежно фиксированным будет лишь суммарный эффект таких изменений, накопленных при прохождении некоторого числа таких точек. А поскольку условия ПБN определяются свойствами материала, т.е. основания полагать, что каждому материалу отвечает свое критическое число N, т.е. высказать гипотезу о критическом порядке псевдобифуркации.

1. Определение момента, отвечающего наступлению очередной ПБN, оказывается возможно тем же, что и в бифуркационной проблеме, методом упругого эквивалента. Для упругой наследственности типа

$$Э_{ij} = \frac{1}{2G}\left[S_{ij}(t) + \int_0^t K(t,\tau)S_{ij}(\tau)d\tau\right] \tag{1.1}$$

где S_{ij} и $Э_{ij}$ девиаторы напряжений и деформации, $K(t, \tau)$ – ядро наследственности, G –

модуль упругости, в предположении, что кроме $Э_{ij}^0$, S_{ij}^0 основного процесса существует близкий процесс $Э_{ij}$, S_{ij}, такой, что если $\Delta Э_{ij} = Э_{ij} - Э_{ij}^0 \ll Э_{ij}^0$, $\Delta S_{ij} = S_{ij} - S_{ij}^0 \ll S_{ij}^0$, то имеется линейная связь

$$\Delta Э_{ij} = \frac{1}{2G}\left[\Delta S_{ij}(t) + \int_0^t K(t,\tau)\Delta S_{ij}(\tau)d\tau\right] \tag{1.2}$$

Полагая, что $\Delta S_{ij}(\tau)$ функция аналитическая, разложим ее в ряд вблизи точки $\tau = t$. Для псевдобифуркации нулевого порядка полагая как это следует из определения ПБ0, что все производные $\Delta Э_{ij}^{(n)}(\tau)$, $\Delta S_{ij}^{(n)}(\tau)$ равны нулю, кроме нулевых производных $\Delta Э_{ij}(\tau)$, $\Delta S_{ij}(\tau)$, получим из (1.2):

$$\Delta S_{ij} = 2G_0 \Delta Э_{ij}, \quad G_0 = G\left[1 + \int_0^t K(t,\tau)d\tau\right]^{-1} \tag{1.3}$$

Для определения ПБ1, как указано в [1, 2], надо продифференцировать (1.2) и положить все производные $\Delta Э_{ij}^{(n)}(\tau)$, $\Delta S_{ij}^{(n)}(\tau)$ нулю, кроме $\Delta Э_{ij}^{(1)}(\tau)$, $\Delta S_{ij}^{(1)}(\tau)$; тогда для режима ползучести ($\dot{S}_{ij} = 0$) получим

$$\Delta S_{ij}^{(1)} = 2G_1 \Delta Э_{ij}^{(1)}, \quad G_1 = G\left[1 + \int_0^t (\tau - t)K(t,\tau)d\tau\right]^{-1}$$

Продолжая этот процесс для ПБN получим

$$\Delta S_{ij}^{(N)} = 2G_N \Delta Э_{ij}^{(N)}, \quad G_N = G\left[1 + \frac{1}{N!}\int_0^t (\tau - t)^N K(t,\tau)^{(N)} d\tau\right]^{-1} \tag{1.4}$$

где $K(t, \tau)^{(N)}$ – N-я производная K по t.

Как видно конструкция полученных соотношений подобна таковой в линейной изотропной упругости, что позволяет в предположении о несжимаемости получить результат по ПБN на основе решения задачи В0 упругости, заменив в этом решении G на G_N (метод упругого эквивалента).

2. Проблема устойчивости пространственных тел весьма сложна и даже для случая упругости имеется лишь небольшое количество решенных задач. Часть из них, принципиального порядка, представлена в [4]. Именно они и будут положены в основу дальнейшего исследования.

В начале [5] были просчитаны точки для сжатого шарнирного стержня, упругая задача устойчивости для которого в силу гипотезы Кирхгофа сводится к одномерной, а результат В0 представляется формулой Эйлера. Привлечение к рассмотрению такой задачи вызвано тем, что здесь имеется ряд экспериментов, пригодных для проверки теории. В качестве ядер ползучести принимаются экспоненциальное и ядро Абеля, т.е.

$$K(t-\tau) = B \exp[-\beta(t-\tau)]; \quad K(t-\tau) = A(t-\tau)^{-\alpha} \tag{2.1}$$

где B, β, A, α – материальные константы, $0 < \alpha < 1$. В условиях плоской деформации для несжимаемого материала формула Эйлера имеет вид

$$\sigma_Э = P/2h = -\tfrac{1}{3}\pi^2 G(h/L)^2 \tag{2.2}$$

где $2h$ – толщина стержня (полосы), L – длина, G – модуль упругого сдвига, P – продольное усилие. Напряжение σ, отвечающее псевдобифуркации N-го порядка, получается из (2.2) заменой модуля G на G_N, откуда следует

$$\sigma = \frac{\sigma_Э}{G} G_N(t) \tag{2.3}$$

Расчеты, проведенные в [5], и сопоставления с имеющимися экспериментальными данными показали, что лучшие результаты дает использование ядра Абеля, причем экспериментальные точки на плоскости ($\sigma/\sigma_Э, t$) укладываются в полосе между кривыми ПБ2 и ПБ3, что дает возможность, опираясь на использование ядра Абеля, с упругим эквивалентом (1.4) при $N = 2$:

$$G_2 = G\left[1 + \frac{A\alpha(\alpha+1)}{2(1-\alpha)} t^{1-\alpha}\right]^{-1} \tag{2.4}$$

и считать $A = 0{,}0078$, $\alpha = 0{,}75$ для капролоктама, принятых в работе [5] (в секундах).

3. Среди пространственных задач устойчивости особое место занимает задача о шейке. Обладая относительной простотой она, с одной стороны, имеет большую практическую ценность, а с другой – является пробным камнем при выборе из имеющихся различных математических постановок.

Наиболее часто используется классический вариант Треффца [6] – Новожилова [7], упрощенный вариант Лейбензона [8] – Ишлинского [9] и неклассический вариант Клюшникова [4, 5], позволяющий замкнуть задачу устойчивости в напряжениях.

Для сжатой полосы при малых h/L все три указанных подхода приводят к формуле (2.2), однако для растянутой полосы выявить критические точки удается только для двух последних постановок. Это точки В0, отвечающие потере устойчивости типа шейки с одинаковым критическим соотношением

$$\sigma = 4G \tag{3.1}$$

Очевидно, что для упругости прямого практического значения эта формула не имеет в силу невозможности накопить в полосе напряжения порядка модуля сдвига G. Однако, для неупруго материала и, в частности, для наследственной упругости формула (3.1) с использованием метода упругого эквивалента выделяет псевдобифуркационные точки и для того же материала, что опробован на изгибную неустойчивость, можно считать что критической будет ПБ2. В данном случае в формуле (2.3) надо заменить $\sigma_Э$ на σ и принять $N = 2$ в представлении (2.4). В результате будем иметь

$$\sigma = 4G\left(1 + m t_1^{1-\alpha}\right)^{-1} \tag{3.2}$$

в то время как для изгибной неустойчивости

$$\sigma = -nG\left(1 + m t_2^{1-\alpha}\right)^{-1} \tag{3.3}$$

Здесь введены обозначения t_1, t_2 – времена, отвечающие данной величине σ при образовании шейки и выпучивании при сжатии, соответственно

$$n = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{h}{L}\right)^2, \quad m = \frac{A\alpha(\alpha+1)}{2(1-\alpha)} \tag{3.4}$$

Разрешая (3.2), (3.3) относительно t_1, t_2 получим

$$t_1 = \left[\left(\frac{4G}{\sigma} - 1\right)\frac{1}{m}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t_2 = -\left[\left(\frac{nG}{\sigma} + 1\right)\frac{1}{m}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{3.5}$$

В формуле для t_1 в круглых скобках единицей можно пренебречь, так что в часах

$$t_1 = 1{,}58 \cdot 10^3\,(4G/\sigma)^4 \tag{3.6}$$

Также как и (3.1), этот результат нужно признать нереальным, ибо если (3.1) требует недопустимого усилия, то (3.6) требует недопустимого времени. Таким образом используемый подход не в состоянии выявить явление шейки.

В то же время формула

$$t_2 = 1,58 \cdot 10^3 \left[\frac{\pi^2}{3} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \frac{G}{\sigma} + 1 \right]^4 \tag{3.7}$$

при заданном $\sigma < |\sigma_Э|$ дает реальную связь $t_2 \sim \sigma$, определяющую возникновение бокового выпучивания (изгибную потерю устойчивости).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-01-00343).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Клюшников В.Д.* Устойчивость упругопластических систем. М.: Наука, 1980. 240 с.
2. *Работнов Ю.Н., Шестериков С.А.* Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 3. С. 406–412.
3. *Куршиин Л.М.* Устойчивость стержней в условиях ползучести // ПМТФ. 1961. № 6. С. 128–134.
4. *Клюшников В.Д.* Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во МГУ, 1986. 224 с.
5. *Клюшников В.Д., То Ван Тан.* Устойчивость деформирования наследственного тела // Механика композитных материалов. 1986. № 5. С. 841–847.
6. *Trefftz E.* Zur theorie der tabilität elastischen gleichgewichts // ZAMM. 1933. Bd. 13. H. 2. S. 17–30.
7. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 212 с.
8. *Лейбензон Л.С.* О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1951. Т. 1. С. 50–85.
9. *Ишлинский А.Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. мат. ж. 1954. Т. 6. № 2. С. 140–146.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
23.12.1997