

УДК 539.375

© 1999 г. В.Н. АКОПЯН, А.В. СААКЯН

**ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО КЛИНА,
 ОСЛАБЛЕННОГО ТРЕЩИНОЙ**

Основные результаты по исследованию обширных классов смешанных и контактных задач теории упругости для клиновидных тел приведены в [1]. В этом направлении укажем также на [2, 3]. В настоящей работе рассматривается напряженное состояние однородного упругого клина, который на некотором отрезке своей срединной линии ослаблен трещиной, на одном берегу которой заданы компоненты смещения, а на другом – компоненты напряжения.

Задача, в общем случае, математически формулируется в виде системы двух сингулярных интегральных уравнений второго рода и решается методом ортогональных многочленов Якоби. Показывается также, что в частном случае, когда раствор клина равен 2π , можно построить замкнутое решение поставленной задачи.

1. Пусть однородный упругий клин с углом раствора 2α , отнесенный к полярной системе координат (r, φ) , начало которой совмещено с вершиной клина, на отрезке $[a, b]$ своей срединной линии $\varphi = 0$ ослаблен трещиной, на одном берегу которой заданы компоненты напряжения $p(r) - i\tau(r)$, а на другом берегу – компоненты смещения $u_0(r) + iv_0(r)$ и равнодействующая P_0 действующих там напряжений. При этом полагается, что грани клина $\varphi = \pm\alpha$ свободны от напряжений.

Ставится задача определить контактные напряжения, действующие на тех берегах трещины, где наперед заданы смещения, а также раскрытие трещины и коэффициенты концентрации напряжений в концевых точках трещины.

Мысленно разделим клин по срединной линии $\varphi = 0$ на два клина и снабдим компоненты напряжения и смещения, относящиеся к точкам клиньев $D_{\pm} = \{0 \leq \pm\varphi \leq \alpha; \alpha \leq r < \infty\}$, верхними индексами (+) и (-) соответственно. Тогда поставленную задачу можем сформулировать в виде следующей смешанной граничной задачи:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}^{+}(r, \alpha) - i\tau_{r\varphi}^{+}(r, \alpha) &= 0 \\ \sigma_{\varphi}^{-}(r, -\alpha) - i\tau_{r\varphi}^{-}(r, -\alpha) &= 0 \quad (0 \leq r < \infty) \\ \sigma_{\varphi}^{+}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{+}(r, 0) &= \sigma_{\varphi}^{-}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{-}(r, 0) \\ u_r^{+}(r, 0) + iu_{\varphi}^{+}(r, 0) &= u_r^{-}(r, 0) + iu_{\varphi}^{-}(r, 0) \quad (0 < r < a, b < r < \infty) \\ \sigma_{\varphi}^{+}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{+}(r, 0) &= p(r) - i\tau(r) = \chi_0(r) \\ u_r^{-}(r, 0) + iu_{\varphi}^{-}(r, 0) &= u_0(r) + iv_0(r) = W_0(r) \quad (a < r < b) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $u_r^{\pm}(r, \varphi)$ и $u_{\varphi}^{\pm}(r, \varphi)$ – компоненты смещения клиньев, в соответствующих

областях удовлетворяющие уравнениям Ламе и связанные с компонентами напряжений $\sigma_{\varphi}^{\pm}(r, \varphi)$ и $\tau_{r\varphi}^{\pm}(r, \varphi)$ известными формулами [4].

Для того, чтобы построить решение задачи (1.1), продолжим вторые условия в (1.1) на интервал (a, b) и обозначим

$$[\sigma_{\varphi}^{+}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{+}(r, 0)] - [\sigma_{\varphi}^{-}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{-}(r, 0)] = \chi(r) \quad (1.2)$$

$$[u_r^{+}(r, 0) + iu_{\varphi}^{+}(r, 0)] - [u_r^{-}(r, 0) + iu_{\varphi}^{-}(r, 0)] = W(r) \quad (a < r < b)$$

Далее, при помощи интегрального преобразования Меллина [5], сначала решим вспомогательную граничную задачу, определяемую условиями (1.1) и (1.2), и определим компоненты напряжения $\sigma_{\varphi}^{+}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{+}(r, 0)$, а также производную от смещения $d[u_r^{-}(r, 0) + iu_{\varphi}^{-}(r, 0)]/dr$ через неизвестные функции $\chi(r)$ и $W(r)$. Получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}^{+}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{+}(r, 0) &= \frac{\chi(r)}{2} + \frac{i\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2 r} \int_a^b \frac{\chi(r_0)}{\ln(r_0/r)} dr_0 - \frac{i}{2\pi\vartheta_2 r} \int_a^b \frac{W'(r_0)}{\ln(r_0/r)} dr_0 - \\ &- \frac{i}{2r} \int_a^b R_{11}[\ln(r_0/r)] \chi(r_0) dr_0 - \frac{i}{2r} \int_a^b R_{12}[\ln(r_0/r)] \bar{\chi}(r_0) dr_0 + \\ &+ \frac{i}{2r} \int_a^b R_{13}[\ln(r_0/r)] W'(r_0) dr_0 + \frac{i}{2r} \int_a^b R_{14}[\ln(r_0/r)] \bar{W}'(r_0) dr_0 \quad (0 < r < \infty) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} [u_r^{-}(r, 0) + iu_{\varphi}^{-}(r, 0)] &= -\frac{W'(r)}{2} - \frac{i(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{2\pi\vartheta_2 r} \int_a^b \frac{\chi(r_0)}{\ln(r_0/r)} dr_0 - \frac{i\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2 r} \int_a^b \frac{W'(r_0)}{\ln(r_0/r)} dr_0 - \\ &- \frac{i}{2r} \int_a^b R_{21}[\ln(r_0/r)] \chi(r_0) dr_0 - \frac{i}{2r} \int_a^b R_{22}[\ln(r_0/r)] \bar{\chi}(r_0) dr_0 - \\ &- \frac{i}{2r} \int_a^b R_{23}[\ln(r_0/r)] W'(r_0) dr_0 + \frac{i}{2r} \int_a^b R_{24}[\ln(r_0/r)] \bar{W}'(r_0) dr_0 \quad (0 < r < \infty) \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$R_{11}(t) = -\frac{\vartheta_1}{\pi\vartheta_2} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2 \operatorname{sh}(2\alpha z) [(\operatorname{sh}^2(\alpha z) - (1 - \vartheta_2/\vartheta_1)z^2 \sin^2 \alpha)]}{\Delta_1(z)} - 1 \right\} \sin(zt) dz +$$

$$+ \frac{2 \sin^2(\alpha) \sin(2\alpha)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{z \cos(zt)}{\Delta_1(z)} dz$$

$$R_{12}(t) = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{z \operatorname{sh}(2\alpha z) \cos(zt)}{\Delta_1(z)} dz +$$

$$+ \frac{2\vartheta_1 \sin(2\alpha)}{\pi\vartheta_2} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{z[\operatorname{sh}^2(\alpha z) - (1 - \vartheta_2/\vartheta_1)z^2 \sin^2 \alpha]}{\Delta_1(z)} \right\} \sin(zt) dz$$

$$R_{13}(t) = -\frac{1}{\pi\vartheta_2} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2 \operatorname{sh}(2\alpha z) [\operatorname{sh}^2(\alpha z) - z^2 \sin^2 \alpha]}{\Delta_1(z)} - 1 \right\} \sin(zt) dz$$

$$R_{14}(t) = -\frac{2 \sin(2\alpha)}{\pi\vartheta_2} \int_0^{\infty} \frac{[\operatorname{sh}^2(\alpha z) - z^2 \sin^2 \alpha] z}{\Delta_1(z)} \sin(zt) dz$$

$$R_{21}(t) = -\frac{1}{\pi\vartheta_2} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2 \operatorname{sh}(2\alpha z) [\vartheta_1^2 (\operatorname{sh}^2(\alpha z) - (1 - \vartheta_2/\vartheta_1)z^2 \sin^2 \alpha)^2 - \vartheta_2^2 z^2 \sin^4 \alpha]}{\Delta_1(z) (\operatorname{sh}^2(\alpha z) - z^2 \sin^2 \alpha)} \right\} \sin(zt) dz$$

$$-\frac{\vartheta_2^2 \operatorname{sh}(2\alpha z)}{2(\operatorname{sh}^2(\alpha z) - z^2 \sin^2 \alpha)} + \vartheta_2^2 - \vartheta_1^2 \left\} \sin(zt) dt + \vartheta_2 c_0$$

$$R_{22}(t) = -\frac{\sin(2\alpha)}{\pi \vartheta_2} \int_0^\infty \left\{ \frac{2[\vartheta_1^2 (\operatorname{sh}^2(\alpha z) - (1 - \vartheta_2 / \vartheta_1) z^2 \sin^2 \alpha)^2 + \vartheta_2^2 z^2 \sin^4 \alpha]}{\Delta_1(z)} - \frac{\vartheta_2^2}{2} \right\} \frac{z \sin(zt) dz}{\operatorname{sh}^2(\alpha z) - z^2 \sin^2 \alpha}$$

$$R_{23}(t) = \frac{\vartheta_1}{\pi \vartheta_2} \int_0^\infty \left\{ \frac{\operatorname{sh}(2\alpha z) (\operatorname{sh}^2(\alpha z) - (1 - \vartheta_2 / \vartheta_1) z^2 \sin^2 \alpha)}{\Delta_1(z)} - 1/2 \right\} \sin(zt) dz +$$

$$+ \frac{\sin^2(\alpha) \sin(2\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^2 \cos(zt)}{\Delta_1(z)} dz$$

$$R_{24}(t) = -\frac{2\vartheta_2 \sin^2 \alpha}{\pi \vartheta_1} \int_0^\infty \frac{z \operatorname{sh}(2\alpha z) \cos(zt)}{\Delta_1(z)} dz -$$

$$-\frac{2 \sin(2\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{z [\operatorname{sh}^2(\alpha z) - (1 - \vartheta_2 / \vartheta_1) z^2 \sin^2 \alpha]}{\Delta_1(z)} \right\} \sin(zt) dz$$

$$\Delta_1(z) = \operatorname{sh}^2(2\alpha z) - z^2 \sin^2(2\alpha), \quad \vartheta_1 = 1/2(\lambda + \mu)$$

$$\vartheta_2 = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)}, \quad c_0 = -\frac{4\alpha}{4\alpha^2 - \sin^2(2\alpha)}$$

где λ и μ — постоянные Ламе, а черточка над функциями $\chi(r)$ и $W'(r)$ означает комплексно-сопряженные значения этих функций.

Теперь, используя соотношения (1.3) и (1.4), удовлетворим последним двум условиям (1.1). Тогда, после некоторых преобразований, для определения неизвестных функций $\chi(r)$ и $W'(r)$, получим следующую систему из двух сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$\chi(r) + \frac{i\vartheta_1}{\pi \vartheta_2 r} \int_a^b \frac{\chi(r_0)}{\ln(r_0/r)} dr_0 - \frac{i}{\pi \vartheta_2 r} \int_a^b \frac{W'(r_0)}{\ln(r_0/r)} dr_0 -$$

$$-\frac{i}{r} \int_a^b R_{11}[\ln(r_0/r)] \chi(r_0) dr_0 - \frac{i}{r} \int_a^b R_{12}(\ln(r_0/r)) \bar{\chi}(r_0) dr_0 +$$

$$+\frac{i}{r} \int_a^b R_{13}[\ln(r_0/r)] W'(r_0) dr_0 + \frac{i}{r} \int_a^b R_{14}[\ln(r_0/r)] \bar{W}'(r_0) dr_0 = 2\chi_0(r) \quad (1.5)$$

$$-W'(r) - \frac{i(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{\pi \vartheta_2 r} \int_a^b \frac{\chi(r_0)}{\ln(r_0/r)} dr_0 - \frac{i\vartheta_1}{\pi \vartheta_2 r} \int_a^b \frac{W'(r_0)}{\ln(r_0/r)} dr_0 -$$

$$-\frac{i}{r} \int_a^b R_{21}[\ln(r_0/r)] \chi(r_0) dr_0 - \frac{i}{r} \int_a^b R_{22}(\ln(r_0/r)) \bar{\chi}(r_0) dr_0 -$$

$$-\frac{i}{r} \int_a^b R_{23}[\ln(r_0/r)] W'(r_0) dr_0 + \frac{i}{r} \int_a^b R_{24}[\ln(r_0/r)] \bar{W}'(r_0) dr_0 = 2W'_0(r) \quad (a < r < b) \quad (1.6)$$

Отметим, что уравнения (1.5) и (1.6) нужно рассматривать при условиях

$$\int_a^b \chi(r) dr = P_1 + P_0, \quad \int_a^b W'(r) dr = 0 \quad (1.7)$$

$$P_1 = \int_a^b [\sigma_\varphi^+(0, r) - i\tau_{r\varphi}^+(0, r)] dr$$

Чтобы решить систему уравнений (1.5) и (1.6), умножим уравнение (1.6) на $v_j = (-1)^j i \sqrt{\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2}$ ($j = 1, 2$) и просуммируем с (1.5), кроме того введем обозначение

$$\varphi_j(r) = \frac{1}{\mu} [\chi(r) - v_j W'(z)] \quad (j = 1, 2)$$

$$\bar{\varphi}_j(r) = \varphi_{j+2}(r), \quad f_j(x) = \frac{2}{\mu} [\chi_0(r) + v_j W_0'(r)]$$

$$K_{11}^{(j)}(t) = -i[R_{11}(t) + v_j R_{21}(t) - R_{13}(t) + v_j R_{23}(t)],$$

$$K_{12}^{(j)}(t) = -i[R_{11}(t) + v_j R_{21}(t) + R_{13}(t) - v_j R_{23}(t)]$$

$$K_{13}^{(j)}(t) = -\frac{i}{2} \left[R_{12}(t) + v_j R_{22}(t) + \frac{1}{v_2} R_{14}(t) + \frac{v_j}{v_2} R_{24}(t) \right]$$

$$K_{14}^{(j)}(t) = -\frac{i}{2} \left[R_{12}(t) + v_j R_{22}(t) - \frac{1}{v_2} R_{14}(t) - \frac{v_j}{v_2} R_{24}(t) \right]$$

Тогда, для определения функций $\varphi_j(r)$ ($j = 1, 2$), приходим к следующей системе сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$\varphi_j(r) - \frac{i\alpha_j}{\pi r} \int_a^b \frac{\bar{\varphi}_j(r_0)}{\ln(r_0/r)} dr_0 + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^4 \int_a^b K_{1k}^{(j)}[\ln(r_0/r)] \varphi_k(r_0) dr_0 = f_j(r) \quad (1.8)$$

$$\alpha_j = \frac{\vartheta_1 + v_j(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{\vartheta_2}, \quad (a < r < b), \quad (j = 1, 2)$$

Далее, перейдем к новым переменным по формулам $r = \exp[cx + d]$, $r_0 = \exp[cs + d]$, где $d = \ln(\sqrt{ab})$, $c = \ln(\sqrt{a/b})$, получим

$$\Psi_j(x) - \frac{\alpha_j}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\Psi_j(s)}{s-x} ds + c \sum_{k=1}^4 \int_{-1}^1 K_{1k}^{(j)}[c(s-x)] \Psi_k(s) ds = F_j(x) \quad (-1 < x < 1, \quad j = 1, 2) \quad (1.9)$$

$$\Psi_j(x) = \exp(cx + d) \varphi_j[\exp(cx + d)] \quad (j = 1-4)$$

$$F_j(x) = \exp(cx + d) f_j[\exp(cx + d)] \quad (j = 1, 2)$$

При этом условия (1.7) запишутся в виде

$$\int_{-1}^1 \varphi_j(x) dx = v_0, \quad v_0 = \frac{(P_1 + P_0)}{c\mu} \quad (j = 1, 2) \quad (1.10)$$

Исходя из результатов [6-7], решения системы (1.9) представим в виде разложения

$$\Psi_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n^{(j)} P_n^{(\gamma_j, \sigma_j)}(x)}{\omega_j(x)}, \quad \omega_j(x) = (1-x)^{-\gamma_j} (1+x)^{-\sigma_j} \quad (1.11)$$

$$\gamma_j = -\frac{1}{2} - i\mu_j, \quad \sigma_j = -\frac{1}{2} + i\mu_j \quad (j = 1, 2)$$

где $P_n^{(\gamma_j, \sigma_j)}(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) – многочлены Якоби, а $X_n^{(j)}$ ($n = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2$) – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, μ_j ($j = 1, 2$) – корни уравнений $\text{th}(\mu_j) = \alpha_j^{-1}$ ($j = 1, 2$) и даются формулами

$$\mu_j = \ln \varepsilon / (4\pi) + i(-1)^j / 4 \quad (j = 1, 2)$$

Здесь $\varepsilon = 3 - 4\nu$ – постоянная Мусхелишвили.

Из условий (1.10) сразу найдем

$$X_0^{(j)} = 2\nu_0 \text{ch}(\pi\mu_j) / \pi \quad (j = 1, 2)$$

Подставляя значения функций $\psi_j(x)$ ($j = 1, 2$) в уравнения (1.9), учитывая при этом соотношение

$$-i\pi \text{th}(\pi\mu) \frac{P_n^{(\gamma, \sigma)}(x)}{\omega(x)} + \int_{-1}^1 \frac{P_n^{(\gamma, \sigma)}(s) ds}{\omega(s)(s-x)} = \frac{\pi P_{n-1}^{(-\gamma, -\sigma)}(x)}{2 \text{ch}(\pi\mu)} \quad (-1 < x < 1)$$

и ортогональность многочленов Якоби, по обычной процедуре [6, 7] для определения неизвестных коэффициентов $X_n^{(j)}$ ($n = 1, 2, \dots; j = 1, 2$) получим следующие бесконечные системы алгебраических уравнений:

$$X_m^{(j)} = h_m^j \left[c \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}^{(j,k)} X_n^{(k)} + c_m^{(j)} \right] \quad (j = 1, 2) \quad (1.12)$$

$$A_{m,n}^{(j,k)} = \frac{\pi i}{\alpha_j} \int_{-1}^1 P_{m-1}^{(-\gamma_j, -\sigma_j)}(x) \omega_j(x) dx \int_{-1}^1 K_{1k}^{(j)}(c(s-x)) \frac{P_n^{(\gamma_k, \sigma_k)}(s)}{\omega_k(x)} ds \quad (k, j = 1, 2)$$

$$A_{m,n}^{(j,k)} = \frac{\pi i}{\alpha_j} \int_{-1}^1 P_{m-1}^{(-\gamma_j, -\sigma_j)}(x) \omega_j(x) dx \int_{-1}^1 K_{1k}^{(j)}(c(s-x)) \frac{\bar{P}_n^{(\gamma_k, \sigma_k)}(s)}{\bar{\omega}_k(x)} ds \quad (j = 1, 2; k = 3, 4)$$

$$c_m^{(j)} = -\frac{2\pi i}{\alpha_j} \int_{-1}^1 F_j(x) P_{m-1}^{(-\gamma_j, -\sigma_j)}(x) \omega_j(x) dx + 2c \sum_{k=1}^4 X_0^{(k)} \bar{A}_{m,0}^{(j,k)}$$

$$\bar{A}_{m,0}^{(j,k)} = \frac{\pi i}{\alpha_j} \int_{-1}^1 P_{m-1}^{(-\gamma_j, -\sigma_j)}(x) \omega_j(x) dx \begin{cases} \int_{-1}^1 K_{1k}^{(j)}(c(s-x)) \omega_j^{-1}(s) ds & (j = 1, 2) \\ \int_{-1}^1 K_{1k}^{(j)}(c(s-x)) \bar{\omega}_j^{-1}(s) ds & (j = 3, 4) \end{cases}$$

$$h_m^j = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(m+1)\text{ch}(\pi\mu_j)}{2\pi\Gamma(m-\gamma_j)\Gamma(m-\sigma_j)} \quad (j = 1, 2), \quad X_n^{(k)} = \bar{X}_n^{(k-2)} \quad (k = 3, 4)$$

Теперь обратимся к вопросу регулярности системы алгебраических уравнений (1.12). Можно проверить, что функции $K_{1k}^{(j)}(c(s-x))$ ($j = 1, 2; k = 1-4$) квадратично суммируемые функции на интервале $(-1, 1)$ по обеим переменным. Следовательно, опираясь на работы [6, 7], можно утверждать, что полученная нами бесконечная система алгебраических уравнений (1.12) квазиполне регулярна.

После определения неизвестных коэффициентов $X_n^{(j)}$ ($n = 1, 2, \dots; j = 1, 2$) из системы (1.12) легко определить контактные напряжения, действующие на том берегу трещины, где заданы смещения, а также раскрытие трещины. В исходных переменных они имеют вид

$$\sigma_{\varphi}^-(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^-(r, 0) = p(r) - i\tau(r) - \frac{1}{2r} \left[\Psi_1 \left(\frac{\ln r - d}{c} \right) + \Psi_2 \left(\frac{\ln r - d}{c} \right) \right] \quad (1.13)$$

$$W(r) = \frac{c}{2v_2} \sum_{j=1}^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} X_n^{(j)} P_{n-1}^{(\gamma_j+1, \sigma_j+1)}(x)}{2n} (1-x)^{\gamma_j+1} (1+x)^{\sigma_j+1} + \right. \\ \left. + (-1)^j X_0^{(j)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1+\sigma_j)}{k+1+\sigma_j} \left(\frac{1+x}{2}\right)^{k+1+\sigma_j} \right\} \quad (x = (\ln r - d)/c, \quad a < r < b) \quad (1.14)$$

Значение напряжений действующих вне трещины на линии $\varphi = 0$ определяются по формуле (1.3) при ($r < a, r > b$), которое при помощи функции $\Psi_k(x)$ ($k = 1-4$) записываются в виде:

$$\sigma_{\varphi}^{\pm}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{\pm}(r, 0) = \frac{i}{4\pi r} \sum_{k=1}^2 \alpha_k \int_{-1}^1 \frac{\Psi_k(s)}{s-x} ds - \frac{ic}{4r} \sum_{k=1}^4 Q_k [c(s-x)] \Psi_k(s) ds; \quad (1.15)$$

$$(0 < r < a, \quad b < r < \infty)$$

$$Q_j(z) = R_{11}(z) + \frac{(-1)^j}{v_2} R_{13}(z) \quad (j = 1, 2)$$

$$Q_j(z) = R_{12}(z) + \frac{(-1)^j}{v_1} R_{14}(z) \quad (j = 3, 4)$$

Как следует из формулы (1.14), особенности напряжения на линии $\varphi = 0$ в конечных точках трещины $r = a$ и $r = b$ определяются первыми двумя слагаемыми. Следовательно, для определения коэффициентов концентрации в этих точках нужно брать эти слагаемые. Подставляя в эти слагаемые значения функций $\Psi_k(x)$ ($k = 1, 2$) из (1.11) и учитывая при этом соотношение [8]:

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n^{(\gamma, \sigma)}(s) ds}{(1-s)^{-\gamma} (1+s)^{-\sigma} (s-x)} = -\frac{\pi}{\sin(\pi\gamma)} \left[\frac{\text{sig}(x) P_n^{(\gamma, \sigma)}(x)}{|1-x|^{-\gamma} |1+x|^{-\sigma}} - \frac{\delta_n}{2} P_{n-1}^{(-\gamma, -\sigma)}(x) \right] \\ \left(\delta_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n \neq 0 \end{cases}, \quad (|x| > 1) \right)$$

для коэффициентов напряжений в конечных точках трещины получим выражения

$$K_I(b) - iK_{II}(b) = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow 1+0} |1-x|^{-\gamma_1} |1+x|^{-\sigma_1} [\sigma_{\varphi}^{\pm}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{\pm}(r, 0)] = \quad (1.16)$$

$$= -\frac{i\alpha_1 \sqrt{2\pi}}{4b \sin(\pi\gamma_1)} \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(1)} P_n^{(\gamma_1, \sigma_1)}(1)$$

$$K_I(a) - iK_{II}(a) = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow -1-0} |1-x|^{-\gamma_2} |1+x|^{-\sigma_2} [\sigma_{\varphi}^{\pm}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{\pm}(r, 0)] = \quad (1.17)$$

$$= -\frac{i\alpha_2 \sqrt{2\pi}}{4a \sin(\pi\gamma_2)} \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(2)} P_n^{(\gamma_2, \sigma_2)}(-1)$$

2. Проведен численный анализ в частном случае $\alpha = \pi/2$, когда упругая однородная полуплоскость по своей срединной линии усилена абсолютно жестким включением, одна из сторон которого оторвана от матрицы. В этом случае, учитывая, что жесткое включение, кроме жесткого перемещения, может претерпевать и поворот, условие сопряжения с включением запишется в виде $W_0(r) = c_0 + i(c_1 + \gamma r)$, где c_0 и c_1 – постоянные, определяющие поступательное перемещение, а γ – постоянная, опре-

деляющая поворот. Заметим, что в этом частном случае удастся вычислить значения всех ядер, входящих в систему определяющих интегральных уравнений (1.8), в явном виде, причем сингулярная часть этих ядер получается в виде $(r_0 - r)^{-1}$. Поэтому, перейдя к новым переменным по формулам

$$r = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}, \quad r_0 = \frac{b-a}{2}s + \frac{b+a}{2}$$

приходим к уравнению типа (1.9), где на этот раз нужно принять, что

$$\Psi_k(x) = \Phi_k \left[\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2} \right], \quad f_k(x) = f_k \left[\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2} \right] \quad (k=1, 2)$$

$$cK_{11}^{(1)}(c(s-x)) = \frac{i\vartheta_1}{\pi\vartheta_2} R_{11}(s, x) - \frac{\sqrt{\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2}}{2\pi\vartheta_2} [R_{21}(s, x) + R_{12}(s, x)]$$

$$cK_{12}^{(1)}(c(s-x)) = -\frac{\sqrt{\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2}}{2\pi\vartheta_2} [R_{21}(s, x) - R_{12}(s, x)]$$

$$cK_{13}^{(1)}(c(s-x)) = -\frac{2i(s+\lambda_0)}{\pi(s+x+2\lambda_0)^2}, \quad cK_{14}^{(1)}(c(s-x)) = 0$$

$$cK_{11}^{(2)}(c(s-x)) = -c\bar{K}_{12}^{(1)}(c(s-x)), \quad cK_{12}^{(2)}(c(s-x)) = -c\bar{K}_{11}^{(1)}(c(s-x))$$

$$cK_{13}^{(2)}(c(s-x)) = 0, \quad cK_{14}^{(2)}(c(s-x)) = -c\bar{K}_{13}^{(1)}(c(s-x))$$

$$R_{11}(s, x) = \frac{1}{(s+x+2\lambda_0)} \left[1 + 2 \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} - 1 \right) \frac{(s+\lambda_0)(s-x)}{(s+x+2\lambda_0)^2} \right]$$

$$R_{12}(s, x) = \frac{1}{(s+x+2\lambda_0)} \left[1 - 2 \frac{(s+\lambda_0)(s-x)}{(s+x+2\lambda_0)^2} \right], \quad \left(\lambda_0 = \frac{a+b}{2} \right)$$

$$R_{21}(s, x) = \frac{1}{(s+x+2\lambda_0)} \left[-\frac{\vartheta_2^2 + \vartheta_1^2}{\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2} + \frac{2(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\vartheta_2 + \vartheta_1} \frac{(s+\lambda_0)(s-x)}{(s+x+2\lambda_0)^2} \right]$$

При этом условие (1.10) принимает вид

$$\int_{-1}^1 \Psi_j(x) dx = \frac{2(P_1 + P_0)}{b-a} \quad (j=1, 2) \quad (2.1)$$

Кроме того, для определения постоянной γ используется условие равенства нулю главного момента усилий, действующих на включение, которое при помощи функций $\Psi_j(x)$ ($j=1, 2$) записывается в виде

$$\operatorname{Re} \int_{-1}^1 [\Psi_1(x) + \Psi_2(x)] x dx = 2M_0, \quad M_0 = \frac{1}{\mu} \int_{-1}^1 x \sigma_{\varphi}^+ \left[\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}, 0 \right] dx \quad (2.2)$$

Представляя решения полученной системы в виде (1.11), процедуру ее решения можно в точности повторить. При этом, из (2.1) для свободных членов разложения (1.11) получаются выражения

$$X_0^{(j)} = \frac{4(P_1 + P_0) \operatorname{ch}(\mu_j \pi)}{\pi(b-a)} \quad (j=1, 2) \quad (2.3)$$

а условие (2.2) приводит к соотношению

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1+4\mu_1^2}{4 \operatorname{ch}(\pi\mu_1)} X_1^{(1)} + \frac{1+4\mu_2^2}{4 \operatorname{ch}(\pi\mu_2)} X_1^{(2)} \right\} = 2M_0 \quad (2.4)$$

Формулы для характерных величин (1.13), (1.16) и (1.17) принимают вид

$$\sigma_{\varphi}^-(r, 0) - i\tau_{\varphi}^-(r, 0) = P(r) - i\tau(r) - \frac{1}{2r} \left[\Psi_1 \left(\frac{(2r-b-a)}{b-a} \right) + \Psi_2 \left(\frac{(2r-b-a)}{b-a} \right) \right] \quad (2.5)$$

$$K_I(b) - iK_{II}(b) = -\frac{i\alpha_1 \sqrt{2\pi}}{4 \sin(\pi\gamma_1)} \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(1)} P_n^{(\gamma_1, \sigma_1)}(1) \quad (2.6)$$

$$K_I(a) - iK_{II}(a) = \frac{i\alpha_2 \sqrt{2\pi}}{4 \sin(\pi\gamma_2)} \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(2)} P_n^{(\gamma_2, \sigma_2)}(-1) \quad (2.7)$$

а формула (1.14) остается верной, если в ней положить $c = 1$.

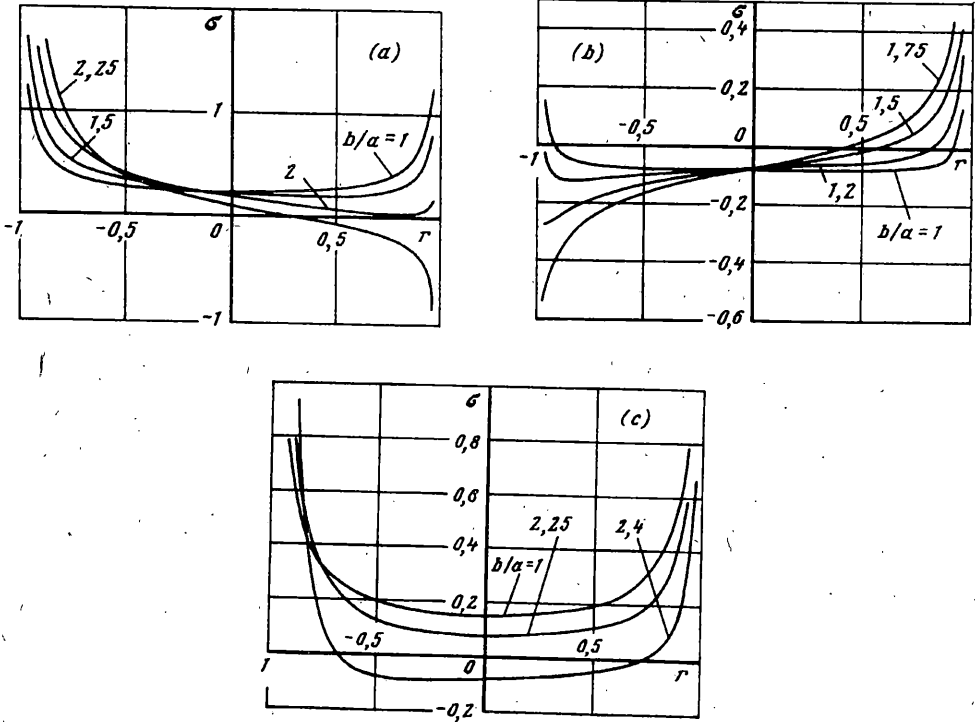
Численный анализ проведен для трех случаев приложения равномерно распределенной нормальной нагрузки интенсивности $P_0/(b-a)$: a) только на свободную грань включения; b) только на свободный берег трещины; c) и на свободную грань включения, и на свободный берег трещины. При этом принято, что $\nu = 0,3$; $2P_0/\mu(d-a) = 1$.

Вычислены контактные напряжения под включением, угол поворота включения γ (положительное направление – против часовой стрелки) и модули коэффициентов концентрации напряжений в концевых точках трещины. В качестве основного параметра, в зависимости от которого исследовалось поведение указанных выше величин, принято отношение $b/a > 1$, которое при условии $b-a = a(b/a - 1) = \text{const}$ указывает на удаленность трещины постоянной длины от границы рассматриваемой полуплоскости. При этом значению $b/a = 1$ соответствует бесконечно удаленная трещина, что приводит к решению задачи для упругой плоскости с частично оторванным включением.

На фиг. 1 (a, b, c) и фиг. 2 (a, b, c) представлены графики распределения нормальных и тангенциальных напряжений под включением соответственно вышеуказанным случаям нагружения для различных значений параметра b/a . В таблицах 1–3 приведены значения угла поворота включения γ и модули коэффициентов концентрации напряжений K_1 и K_2 соответственно у концов $r = a$ и $r = b$.

Из представленных результатов можно сделать следующие выводы: в случае (a) при приближении включения к грани полуплоскости γ и K_1 возрастают, а K_2 уменьшается, достигая нуля при некотором значении b/a в интервале (2, 2.5), и начинает возрастать, поскольку напряжения в окрестности этой точки меняют знак на противоположный. В случае (b) подобная картина, но уже при значении b/a в интервале (1.5, 2), имеет место у вершины $r = a$, при этом нормальные контактные напряжения в средней части зоны контакта становятся отрицательными, что может привести к частичному отрыву нижнего берега трещины от включения. В случае же (c) как γ , так и коэффициенты K_1 и K_2 возрастают, а нормальные контактные напряжения почти симметричны относительно средней точки зоны контакта. Это обусловлено тем, что внешняя нагрузка в этом случае самоуравновешена и влияние свободной границы на напряженно-деформированное состояние в окрестности включения менее выражено, чем в первых двух случаях, когда внешняя нагрузка не самоуравновешена.

3. Рассмотрим еще один частный случай поставленной задачи, когда $\alpha = \pi$, т.е. случай, когда однородная упругая плоскость по своей срединной линии ослаблена одной полубесконечной и одной конечной трещинами. Причем на одном берегу конечной трещины заданы смещения, а на другом берегу компоненты напряжения. Эта задача является частным случаем задачи, рассмотренной в [9], где при помощи комплексных



Фиг. 1

потенциалов теории упругости решение поставленной задачи сведено к решению задачи Римана для двух функций и показана возможность ее замкнутого решения. Покажем, что полученная нами система определяющих уравнений (1.5) и (1.6) в это частном случае также допускает замкнутое решение. Действительно, в указанном случае ядра, входящие в систему определяющих интегральных уравнений, имеют довольно простые выражения, что дает возможность, вводя функции $\chi_1(r) = [\vartheta_1 \chi(r) - W'(r)]$, $\chi_2(r) = \vartheta_2 \chi(r)$, эту систему записать в виде

$$\chi_1(r) - \frac{2\mu_0}{\pi i} \int_a^b \frac{\sqrt{r_0} \chi_1(r_0) dr_0}{\sqrt{r(r_0 - r)}} + \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{\chi_2(r_0) dr_0}{(r_0 - r)} = f_1(r) \quad (3.1)$$

$$\chi_2(r) - \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{\sqrt{r_0} \chi_1(r_0) dr_0}{\sqrt{r(r_0 - r)}} = f_2(r) \quad (a < r < b) \quad (3.2)$$

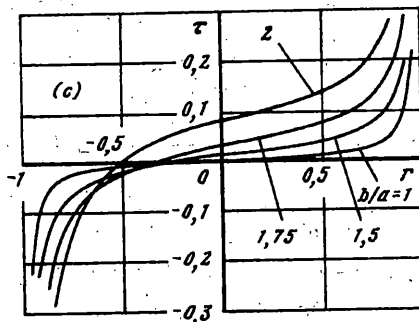
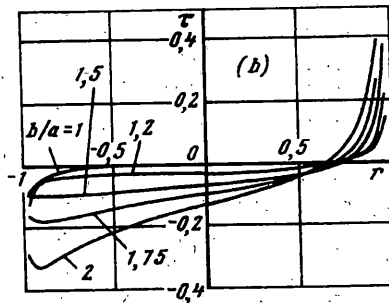
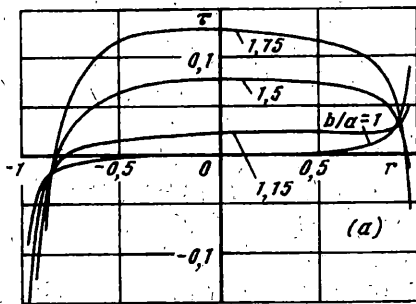
При этом условия (1.7) принимают вид

$$\int_a^b \chi_j(r) dr = \vartheta_j (P_1 + P_0) \quad (j = 1, 2) \quad (3.3)$$

$$f_1(r) = 2[\vartheta_1 \chi_0(r) + W'_0(r)], \quad f_2(r) = \vartheta_2 \chi_0(r) \quad (\mu_0 = \vartheta_1 / \vartheta_2)$$

Чтобы решить систему интегральных уравнений (3.1) введем в рассмотрение комплексные функции

$$\Omega_j(z) = (1 - (-1)^j \mu^*) \{ \Phi_1(z) - (-1)^j \Phi_2(z) \} \quad (j = 1, 2) \quad (3.4)$$



Фиг. 2

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \sqrt{\frac{r_0}{z}} \frac{\chi_1(r_0)}{r_0 - z} dr_0, \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\chi_1(r_0)}{r_0 - z} dr \quad (3.5)$$

$$\left(\mu^* = \frac{1+i\sqrt{\varepsilon}}{1-i\sqrt{\varepsilon}} \right)$$

Очевидно, что функции $\Omega_j(z)$ ($j = 1, 2$) аналитичны в комплексной плоскости (z) разрезанной вдоль оси ox по интервалам $(-\infty, 0)$ и (a, b) . На этих же интервалах, используя формулы Племеля – Сохоцкого, уравнения (3.1) и значения функции \sqrt{z} на берегах этих разрезов, легко установить, что функции $\Omega_j(z)$ ($j = 1, 2$) удовлетворяют функциональным соотношениям:

$$\Omega_1^+(t) = v_1(t)\Omega_2^-(t) + F_1^*(t) \quad (t \in L = (-\infty, 0) \cup (a, b)) \quad (3.6)$$

$$\Omega_2^+(t) = v_2(t)\Omega_1^-(t) + F_2^*(t)$$

$$v_1(t) = \begin{cases} 1/i\sqrt{\varepsilon} & (-\infty < t < 0), \\ i\sqrt{\varepsilon} & (a < t < b) \end{cases}, \quad v_2(t) = i\sqrt{\varepsilon}$$

$$F_j^*(t) = \begin{cases} F_j(t) & (a < t < b) \\ 0 & (-\infty < t < 0) \end{cases}$$

$$F_j(t) = -\mu^* \frac{f_1(t) + \lambda_1 f_2(t)}{1 + 2\mu_0 - \lambda_1} (-1)^j + \frac{f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)}{1 + 2\mu_0 - \lambda_2} \quad (j = 1, 2)$$

$$\lambda_j = \frac{[1 - 2v - (-1)^j g]}{2(1 - v)}$$

Таблица 1

b/a	γ	K_1	K_2
1	0	0,19947	0,19947
1,15	0,012	0,21842	0,18189
1,2	0,016	0,22488	0,17651
1,5	0,04	0,2718	0,14571
1,75	0,063	0,33733	0,12012
2	0,093	0,47218	0,09896
2,25	0,143	0,87007	0,12644

Таблица 2

b/a	γ	K_1	K_2
1	0	0,12218	0,12218
1,15	-0,0122	0,10145	0,14463
1,2	-0,016	0,09525	0,15207
1,5	-0,038	0,06164	0,19941
1,75	-0,056	0,03749	0,24786
2	-0,078	0,04680	0,31616
2,25	-0,107	0,15359	0,44031
2,5	-0,126	1,13701	0,91169

Таблица 3

b/a	γ	K_1	K_2
1	0	0,31877	0,31877
1,15	0,00007	0,31942	0,31913
1,2	0,0002	0,32001	0,31934
1,5	0,0020	0,33084	0,32126
1,75	0,006	0,36004	0,32444
2	0,015	0,44126	0,33127
2,25	0,036	0,71962	0,34752
2,4	0,0717	1,42697	0,36778

При этом функции $\chi_j(t)$ ($j = 1, 2$) определяются через функции $\Omega_j(z)$ ($j = 1, 2$) по формулам

$$\chi_j(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\Omega_1^+(t) - \Omega_1^-(t)}{\mu^* + 1} + (-1)^j \frac{\Omega_2^+(t) - \Omega_2^-(t)}{\mu^* - 1} \right] \quad (a < t < b) \quad (3.7)$$

Система функциональных уравнений (2.3) является краевой задачей Римана для двух функций $\Omega_j(z)$ ($j = 1, 2$), замкнутое решение которой построено в [9]. Следовательно полученная определяющая система интегральных уравнений в этом частном случае допускает замкнутое решение.

В качестве примера приведем решение поставленной задачи в случае $a = 0$, $\chi_0(r) = 0$ и $W_0(r) = \text{const}$, что соответствует случаю, когда конечная трещина соединяется с полубесконечной трещиной образуя, тем самым, одну полубесконечную трещину, на конечном интервале которой ($0 < r < b$) нижний берег трещины усилен абсолютно жестким, тонким включением. При этом берега трещин свободны от нагрузок, а не включения действуют усилия равнодействующее которых равно P_0 .

В этом случае $F_j(t) = 0$ ($j = 1, 2$) и мы будем иметь однородную задачу Римана для двух функций, решения которой легко построить следуя [9]. Они имеют вид

$$\Omega_j(z) = cz^{-\beta/2}(z-b)^{\beta/2-1} \left[\frac{\sqrt{b}-\sqrt{b-z}}{\sqrt{b}+\sqrt{b-z}} \right]^{(-1)^j \beta/2} \quad (j=1,2) \quad (3.8)$$

Здесь $\beta = 1/2 - i \ln \varepsilon/2\pi$, c — неизвестная постоянная, подлежащая определению и при больших значениях z :

$$z^{\beta/2}(z-b)^{1-\beta/2} = z + O(z^{-1}), \quad \left[\frac{\sqrt{b}-\sqrt{b-z}}{\sqrt{b}+\sqrt{b-z}} \right]^{(-1)^j \beta/2} = \exp[(-1)^j \pi i \beta/2] + O(z^{-1})$$

Для определения постоянной c будем использовать поведение функции $\Phi_2(z)$ на бесконечности. Из представлений (3.5) этой функции следует, что при больших z $\Phi_2(z) = -\vartheta_2 P_0/2\pi i z + O(z^{-2})$. С другой стороны из (3.4):

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{\Omega_1(z)}{\mu^* + 1} + \frac{\Omega_2(z)}{\mu^* - 1} \right]$$

поведение которой при больших значениях аргумента можно представить при помощи следующей формулы:

$$\Phi_2(z) = -\frac{c}{\sqrt{g(1+\mu^*)z}} + O(z^{-2})$$

Сравнивая эти два представления найдем

$$c = -\frac{\sqrt{g}\vartheta_2(1+\mu^*)P_0}{2\pi i} + O(z^{-2}) \quad (3.9)$$

Далее, используя формулы (3.1) и (3.7) для функции $\chi(r)$ и $W(r)$ получим выражения

$$\chi(r) = \frac{(1-\nu)P_0}{\pi\sqrt{\varepsilon}} \left[\frac{\sqrt{b}-\sqrt{b-r}}{\sqrt{b}+\sqrt{b-r}} \right]^{-\beta/2} r^{-\beta/2}(b-r)^{\beta/2-1} \quad (0 < r < b) \quad (3.10)$$

$$W'(r) = -\frac{\vartheta_2 P_0}{2\pi i} \left[\frac{\sqrt{b}-\sqrt{b-r}}{\sqrt{b}+\sqrt{b-r}} \right]^{\beta/2} r^{-\beta/2}(b-r)^{\beta/2-1} \quad (3.11)$$

Интегрируя (3.11) от нуля до r , и учитывая, что $W(b) = 0$ находим

$$W(r) = \frac{\vartheta_2 P_0}{\pi i \Gamma(\beta)} (1-r/b)^{\beta/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\beta+n)}{(\beta+n)!} (1-r/b)^{n/2} \quad (0 < r < b) \quad (3.12)$$

Теперь определим напряжения вне трещины по линии $\varphi = 0$ и коэффициенты интенсивностей напряжений в концевой точке трещины $r = b$. С этой целью используем формулу (1.3), которая при помощи функции $\chi_j(r)$ ($j = 1, 2$), когда $\alpha = \pi$ при-

нимает вид

$$\sigma_{\varphi}^{+}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{+}(r, 0) = -\frac{1}{2\pi i \vartheta_2 \sqrt{r}} \int_0^b \frac{\sqrt{r_0} \chi_1(r_0)}{(r_0 - r)} dr_0 = -\frac{1}{2\vartheta_2} \left[\frac{\Omega_1(r)}{1 + \mu^*} + \frac{\Omega_2(r)}{1 - \mu^*} \right] \quad (r > b) \quad (3.13)$$

Подставляя сюда значение функции $\Omega_j(r)$ ($j = 1, 2$) получим выражение

$$\sigma_{\varphi}^{+}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{+}(r, 0) = \frac{\sqrt{g} P_0}{4\pi i r^{\beta/2} (r-b)^{1-\beta/2}} \left\{ \left[\frac{\sqrt{b} - i\sqrt{r-b}}{\sqrt{b} + i\sqrt{r-b}} \right]^{-\beta/2} - g^{-1} \left[\frac{\sqrt{b} - i\sqrt{r-b}}{\sqrt{b} + i\sqrt{r-b}} \right]^{\beta/2} \right\} \quad (3.14)$$

Следовательно, коэффициент концентрации напряжений в точке $r = b$ будет следующим:

$$K_I(b) - iK_{II}(b) = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow b+0} (r-b)^{1-\beta/2} r^{\beta/2} [\sigma_{\varphi}^{\pm}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{\pm}(r, 0)] = -\frac{(1-g)P_0}{2i\sqrt{2\pi}g} \quad (3.15)$$

Используя формулу (3.10), можно определить также коэффициенты концентрации контактных напряжений, действующих под включением в точках $r = 0$ и $r = b$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л.А. Галина. М.: Наука, 1976. 492 с.
2. Акопян В.Н. Об одной контактной задаче для упругого клина, усиленного жестким включением // ДАН АрмССР. 1989. Т. 88. №2. С. 77-81.
3. Акопян В.Н. Напряженно-деформированное состояние составного клина, усиленного жестким включением // Механика деформируемого твердого тела. Ереван: Изд-во АН Армении, 1993. С. 63-78.
4. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 707 с.
5. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 367 с.
6. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1972. Т. 25. № 2. С. 15-35.
7. Попов Г.Я. Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 3. С. 551-563.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966. 295 с.
9. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 907-912.

Ереван

Поступила в редакцию
11.06.1997