

© 1999 г. В.В. МОКЕЕВ

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ КОНСТРУКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ВЯЗКОУПРУГИЕ СРЕДЫ

Описывается метод обобщенных комплексных форм как эффективное средство исследования колебаний конструкций, содержащих вязкоупругие среды. Метод использует для описания вязкоупругих свойств дифференциальные операторы, которые достаточно хорошо аппроксимируют изменение вязкоупругих характеристик в частотной области, а для решения полученных уравнений – разложение по обобщенным комплексным формам. Достоинства метода демонстрируются на примере исследования колебаний ракетного двигателя на твердом топливе (РДТТ). Полученные результаты сравниваются с решениями, найденными другими методами. Исследуется влияние вязкоупругого коэффициента Пуассона на амплитуды вынужденных колебаний РДТТ.

1. Введение. Вязкоупругие материалы, к которым относятся полимеры и композиты, металлы при повышенных температурах, бетон и т.п., находят сегодня широкое применение в промышленности. Существует точка зрения, что можно не разделять материалы на упругие и вязкоупругие, а говорить об упругом и вязкоупругом состоянии одного и того же материала в зависимости от температуры и других факторов. Метод конечных элементов является одним из эффективных средств решения задач динамики конструкций. Однако, наличие вязкоупругих свойств, неоднородность их распределения по конструкции является причиной больших трудностей, с которыми связан конечно-элементный анализ поведения вязкоупругих конструкций даже при статическом нагружении. Это приводит к тому, что задача поиска динамических решений часто становится для таких конструкций почти неразрешимой.

Из существующих в настоящее время конечно-элементных подходов к решению задач динамики вязкоупругих конструкций можно выделить несколько наиболее распространенных. Это методы комплексных собственных значений и методы нормальных форм упругих колебаний. В методах комплексных собственных значений задача сводится к нахождению собственных чисел и векторов, которые являются комплексными. Поскольку собственные векторы удовлетворяют условию ортогональности, разложение в ряд по комплексным формам приводит к несвязанным дифференциальным уравнениям. Недостатками данного подхода является то, что вязкоупругие свойства должны описываться либо моделью Фойхта, либо моделью Сорокина, т.е. модуль накопления вязкоупругих материалов должен быть постоянным по частоте, а модуль потерь – либо линейно изменяться, либо быть постоянным по частоте. Реальные вязкоупругие материалы попросту не обладают такими удобными свойствами.

Использование методов нормальных форм упругих колебаний базируется на предположении, что формы упругих колебаний мало отличаются от форм вязкоупругих колебаний. Это верно для случая, когда вязкоупругие свойства одинаковы для всей конструкции. Однако, если конструкция неоднородная (т.е. ее деформируемые элементы обладают различными вязкоупругими либо упругими свойствами), то формы колебаний упругой конструкции уже не образуют пространство нормальных векторов.

В [2, 3] вязкоупругие свойства описываются интегральными операторами, а полученные уравнения решаются путем разложения по формам упругих колебаний. В [3] показывается, что при расчетах неоднородных вязкоупругих конструкций решение уже не сводится к системе независимых интегро-дифференциальных уравнений. Одним из наиболее простых средств расчета демпфированных конструкций является метод энергии деформаций, описанный в [1]. Идея метода состоит в том, что отношение модального коэффициента потерь вязкоупругой конструкции к коэффициенту потерь вязкоупругого материала можно приравнять к отношению энергии упругой деформации вязкоупругого материала к полной энергии деформации конструкции при деформировании по собственной форме упругих колебаний. Недостатком метода является то, что при описании характеристик материала, зависящих от частоты, он требует введения целого ряда трудоемких корректировок, которые в итоге дают лишь некоторое приближение к точному решению.

Таким образом, применение одних методов ограничивается описанием вязкоупругих свойств достаточно простыми моделями (Фойхта, Сорокина), другие методы не могут учесть неоднородность распределения вязкоупругих свойств по конструкции либо испытывают сложности в процессе моделирования вязкоупругих свойств, изменяющихся в частотной области. Кроме того, в представленных методах вязкоупругие свойства моделируются только одной функцией, т.е. предполагается, что коэффициент Пуассона равен действительной константе.

В [4] описывается метод, базирующийся на описании вязкоупругих свойств дифференциальными операторами и разложением решения в ряд по комплексным формам вязкоупругой конструкции. Здесь данный метод развивается как метод обобщенных комплексных форм, который позволяет моделировать вязкоупругие свойства двумя функциями. В отличие от метода комплексных собственных значений метод обобщенных комплексных форм позволяет учесть реальное изменение вязкоупругих характеристик в частотной области и неоднородность вязкоупругих свойств конструкции. Обобщенные комплексные векторы в отличие от стандартных комплексных векторов являются расширенными, а количество дополнительных степеней свободы зависит от выбранной модели вязкоупругих свойств.

2. Метод обобщенных комплексных форм. Рассмотрим конструкцию состоящую из упругих и вязкоупругих деформируемых элементов. Если материал элемента упругий, то связь между напряжениями и деформациями для такого элемента устанавливается с помощью закона Гука. Для линейного вязкоупругого материала соотношения между напряжениями и деформациями всегда можно описать в форме, сходной с используемой в теории упругости

$$\sigma = D^* \varepsilon \quad (2.1)$$

где σ , ε – векторы напряжений и деформаций, D^* – матрица вязкоупругих операторов.

Для изотропного вязкоупругого тела матрица D^* полностью определяется двумя дифференциальными операторами $D^* = H_1^* D_1 + H_2^* D_2$. Для изотропной вязкоупругой среды в качестве H_1^* и H_2^* используются параметры, соответствующие модулю сдвига и модуль объемной упругости в упругой постановке задачи. При этом полный вектор напряжений также представляется в виде суммы двух слагаемых $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, каждый из которых связан с полной деформацией соотношением $\sigma_j = H_j^* D_j \varepsilon$.

Дифференциальные операторы $1/H_1^*$ и $1/H_2^*$ представляются в виде суммы элементарных дробей

$$1/H_1^* = \sum_{i=1}^m \frac{1}{a_{1i} + b_{1i} d/dt} \quad (2.2)$$

$$1/H_2^* = \sum_{i=1}^m \frac{1}{a_{2i} + b_{2i} d/dt} \quad (2.3)$$

Полную деформацию ε также представим в виде суммы

$$\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \dots + \varepsilon_{1m} \quad (2.4)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \dots + \varepsilon_{2m}$$

Каждое слагаемое ε_{ji} связано с соответствующим ему напряжением σ_j соотношением

$$\varepsilon_{ji} = \frac{1}{a_{ji} + b_{ji}d/dt} D_j^{-1} \sigma_j \quad (2.5)$$

Аналогично представляется вектор узловых перемещений элемента

$$\delta^e = \delta_{11}^e + \delta_{12}^e + \dots + \delta_{1m}^e \quad (2.6)$$

$$\delta^e = \delta_{21}^e + \delta_{22}^e + \dots + \delta_{2m}^e$$

где каждая из составляющих перемещений δ_{ji}^e связано с вектором полной деформации соотношением

$$\varepsilon_{ji} = B \delta_{ji}^e \quad (2.7)$$

Функционал полной энергии χ для изотропного вязкоупругого элемента с учетом полученных соотношений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \chi = & \delta^{eT} (a_{1i} + b_{1i}d/dt) \int_V B^T D_1 B dV \delta_{1i}^e + \\ & + \delta^{eT} (a_{2k} + b_{2k}d/dt) \int_V B^T D_2 B dV \delta_{2k}^e + \\ & + \delta^{eT} \rho \int_V N^T N dV \ddot{\delta}^e - \delta^{eT} \int_V N^T p^e dV \quad (i=1, \dots, m; k=1, \dots, m) \end{aligned}$$

Минимизируя функционал χ по δ^e , получим систему связанных матричных уравнений, описывающих колебания вязкоупругого конечного элемента

$$\begin{aligned} m^e \ddot{\delta}^e + b_{1i} k_1^e \dot{\delta}_{1i}^e + a_{1i} k_1^e \delta_{1i}^e + \\ + b_{2k} k_2^e \dot{\delta}_{2k}^e + a_{2k} k_1^e \delta_{2k}^e = R^e \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$(i=1, \dots, m; k=1, \dots, m)$$

$$k_1^e = \int_V B^T D_1 B dV, \quad k_2^e = \int_V B^T D_2 B dV, \quad m^e = \int_V N^T N dV$$

Если добавить к полученным уравнениям соотношения (2.6), получим полную систему уравнений, описывающих колебания вязкоупругого элемента. После исключения векторов δ_{11}^e и δ_{21}^e из системы уравнений с помощью соотношений (2.6), полученное уравнение можно представить в виде

$$m_s^e \ddot{\delta}_s^e + c_s^e \dot{\delta}_s^e + k_s^e \delta_s^e = R_s^e \quad (2.9)$$

Здесь m_s^e , c_s^e , k_s^e – матрицы масс, вязкости и жесткости вязкоупругого конечного элемента, содержащие в качестве подматриц матрицы k_j^e и m^e ; δ_s^e – вектор узловых

перемещений вязкоупругого элемента, состоящий из векторов δ^e , δ_{12}^e , $\delta_{13}^e \dots \delta_{1m}^e$ и $\delta_{22}^e, \delta_{23}^e \dots \delta_{2m}^e$; R_s^e – вектор узловых реакций и внешних сил, действующих на вязкоупругий элемент. Структура и вид матриц вязкоупругого конечного элемента зависит от количества дифференциальных операторов, используемых для описания свойств вязкоупругого материала, и от количества членов ряда, которым представляется каждый дифференциальный оператор.

Например, если вязкоупругие свойства описываются двумя дифференциальными операторами H_1^* и H_2^* вида

$$\frac{1}{H_j^*} = \frac{1}{a_{j1} + b_{j1}d/dt} + \frac{1}{a_{j2} + b_{j2}d/dt} \quad (2.10)$$

то уравнение, описывающее поведение вязкоупругого элемента, запишется в виде

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{matrix} m^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \ddot{\delta}^e \\ \ddot{\delta}_{12}^e \\ \ddot{\delta}_{22}^e \end{matrix} \right\| + \\ & + \left\| \begin{matrix} b_{11}k_1^e + b_{21}k_2^e & -b_{11}k_1^e & -b_{21}k_2^e \\ -b_{11}k_1^e & (b_{11} + b_{12})k_1^2 & 0 \\ -b_{21}k_2^e & 0 & (b_{21} + b_{22})k_2^e \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \delta^e \\ \delta_{12}^e \\ \delta_{22}^e \end{matrix} \right\| + \\ & + \left\| \begin{matrix} a_{11}k_1^e + a_{21}k_2^e & -a_{11}k_1^e & -a_{21}k_2^e \\ -a_{11}k_1^e & (a_{11} + a_{12})k_1^2 & 0 \\ -a_{21}k_2^e & 0 & (a_{21} + a_{22})k_2^e \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \delta^e \\ \delta_{12}^e \\ \delta_{22}^e \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} R^e \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \end{aligned} \quad (2.11)$$

При решении проблемы собственных чисел характеристики вязкоупругих конечных элементов необходимо описывать в виде, когда матрицы жесткости и масс элементов моделируют накопление энергии, а матрица вязкости – потери энергии при вязкоупругих колебаниях. Это достигается путем приведения дифференциального оператора H_j^* в частотной области к виду $H_{j1}(\omega) + iH_{j2}(\omega)$, т.е. к явному выделению действительной и мнимой части. Для того чтобы явно выделить действительную и мнимую часть дифференциального оператора в частотной области, необходимо умножить числитель и знаменатель оператора H_j^* на соотношение комплексно-сопряженное в частотной области знаменателю, т.е. на выражение $(a_{j1} + a_{j2}) - (b_{j1} + b_{j2}) d/dt$. После ряда несложных преобразований дифференциальный оператор (2.12) примет следующий вид

$$H_j^* = \frac{x_{j0} + x_{j1}d/dt + x_{j2}d^2/dt^2 + x_{j3}d^3/dt^3}{1 + x_{j4}d^2/dt^2} \quad (2.12)$$

$$x_{j0} = \frac{a_{j1}a_{j2}}{a_{j1} + a_{j2}}, \quad x_{j1} = \frac{a_{j2}^2b_{j1} + a_{j1}^2b_{j2}}{a_{j1} + a_{j2}}, \quad x_{j2} = -\frac{a_{j2}b_{j1}^2 + a_{j1}b_{j2}^2}{a_{j1} + a_{j2}}$$

$$x_{j3} = -\frac{b_{j1}b_{j2}(b_{j1} + b_{j2})}{a_{j1} + a_{j2}}, \quad x_{j4} = -\frac{(b_{j1} + b_{j2})^2}{(a_{j1} + a_{j2})^2}$$

Уравнения движения конечного элемента при описании его вязкоупругих свойств

дифференциальным оператором (2.12) имеют вид

$$\begin{aligned}
 & \left\| \begin{array}{ccc} m^e - \sum_{j=1}^2 \frac{b_{j2}^2}{a_{j1} + a_{j2}} k_j^e & -\frac{b_{12}(b_{11} + b_{12})}{a_{11} + a_{12}} k_1^e & -\frac{b_{22}(b_{21} + b_{22})}{a_{21} + a_{22}} k_2^e \\ -\frac{b_{12}(b_{11} + b_{12})}{a_{11} + a_{12}} k_1^e & -\frac{(b_{11} + b_{12})^2}{a_{11} + a_{12}} k_1^e & 0 \\ -\frac{b_{22}(b_{21} + b_{22})}{a_{21} + a_{22}} k_2^e & 0 & -\frac{(b_{21} + b_{22})^2}{a_{21} + a_{22}} k_2^e \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \delta^e \\ \delta_{p1}^e \\ \delta_{p2}^e \end{array} \right\| + \\
 & + \left\| \begin{array}{ccc} \frac{a_{11}b_{12}}{a_{11} + a_{12}} k_1^e + \frac{a_{21}b_{22}}{a_{21} + a_{22}} k_2^e & 0 & 0 \\ -\frac{b_{11}a_{12} - b_{12}a_{11}}{a_{11} + a_{12}} k_1^e & 0 & 0 \\ -\frac{b_{21}a_{22} - b_{22}a_{21}}{a_{21} + a_{22}} k_2^e & 0 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \delta^e \\ \delta_{p1}^e \\ \delta_{p2}^e \end{array} \right\| + \\
 & + \left\| \begin{array}{ccc} a_{12}k_1^e + a_{22}k_2^e & a_{12}k_1^e & a_{22}k_2^e \\ a_{12}k_1^e & (a_{11} + a_{12})k_1^e & 0 \\ a_{22}k_2^e & 0 & (a_{21} + a_{22})k_2^e \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \delta^e \\ \delta_{p1}^e \\ \delta_{p2}^e \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} R^e \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \\
 & \delta_{p1}^e = \delta_{12}^e - \delta^e, \quad \delta_{p2}^e = \delta_{22}^e - \delta^2
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Явное разделение дифференциального оператора в частотной области на действительную и мнимую части приводит к уравнениям с симметричными матрицами жесткости и масс и несимметричной матрицей вязкости. Коэффициенты дифференциального оператора $x_{j0}, x_{j1}, x_{j2}, x_{j3}, x_{j4}$ выбираются из условия наилучшего совпадения комплексной характеристики модуля объемной упругости или модуля сдвига, полученной по результатам динамических испытаний вязкоупругого материала, и комплексного модуля дифференциального оператора.

Таким образом колебания вязкоупругой конструкции описываются дифференциальным матричным уравнением вида

$$M_s \ddot{\delta}_s + C_s \dot{\delta}_s + K_s \delta_s = F_s \tag{2.14}$$

где M_s, C_s, K_s – матрицы масс, вязкости и жесткости вязкоупругой конструкции, составленные из матриц масс, вязкости и жесткости упругих и вязкоупругих конечных элементов, δ_s' – вектор узловых перемещений вязкоупругой конструкции, составленный из векторов узловых перемещений упругих и вязкоупругих конечных элементов.

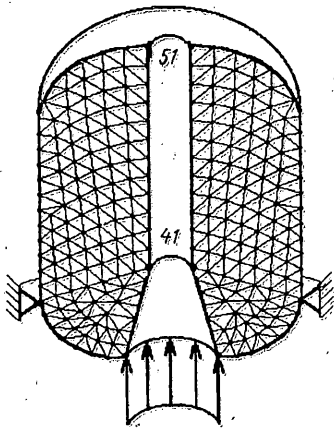
Решение уравнения (2.14) ищется в виде линейной комбинации собственных векторов, полученных в результате решения задачи собственных значений уравнения

$$(p^2 M_s + p C_s + K_s) \delta_0 = 0 \tag{2.15}$$

Это – задача комплексных собственных значений и векторов. Так как матрица C_s несимметрична, то каждому собственному значению p_i соответствует один правый δ_{0i}^{right} и один левый δ_{0i}^{left} собственный вектор. Матричное уравнение (2.15) решается с помощью подхода, описанного в работе [4].

Решение уравнения (2.14) определяется по формуле

$$\delta_s = \sum_i \delta_{0i}^{right} q_i(t) \tag{2.16}$$



Фиг. 1

Подставляя (2.16) в уравнение (2.14) и умножая его транспонированную матрицу левых собственных векторов и учитывая условия ортогональности, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 - p_1 q_1 &= (\delta_{01}^{left})^T F_s \\ \dot{q}_2 - p_2 q_2 &= (\delta_{02}^{left})^T F_s \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dot{q}_n - p_n q_n = (\delta_{0n}^{left})^T F_s$$

3. Исследование динамического поведения РДТТ.

Метод обобщенных комплексных форм, реализованный в пакете программ ДИАС, применялся для расчета различных конструкций [4]. Сопоставление результатов показывает хорошее совпадение с точными решениями, которые могут быть найдены в частных случаях. В этом разделе возможности метода обобщенных комплексных форм демонстрируются на примере динамического анализа вынужденных колебаний ракетного двигателя на твердом топливе РДТТ.

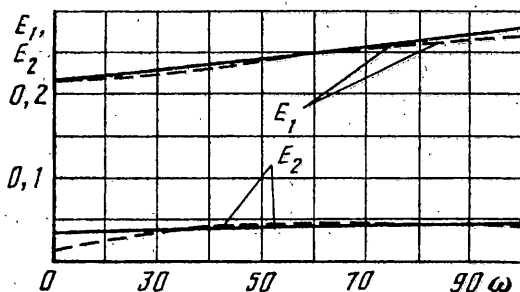
Задача определения нагруженности РДТТ при вибрациях и ударах является одной из важнейших задач, возникающих в процессе проектирования аэрокосмических конструкций, использующих твердое топливо. Трудности решения этой задачи обусловлены тем, что твердое топливо обладает ярко выраженными вязкоупругими свойствами.

Метод обобщенных комплексных форм сравнивается с двумя другими методами (методом комплексного модуля и методом энергии деформации), используемыми для нахождения решений недемпфированные нормальные формы колебаний упругой конструкции. При использовании метода комплексного модуля задача вынужденных колебаний сводится с помощью разложения решения в ряд по формам колебаний упругой конструкции к системе простых дифференциальных уравнений второго порядка. При решении этих уравнений в частотной области в них непосредственно подставляется комплексный модуль вязкоупругого материала

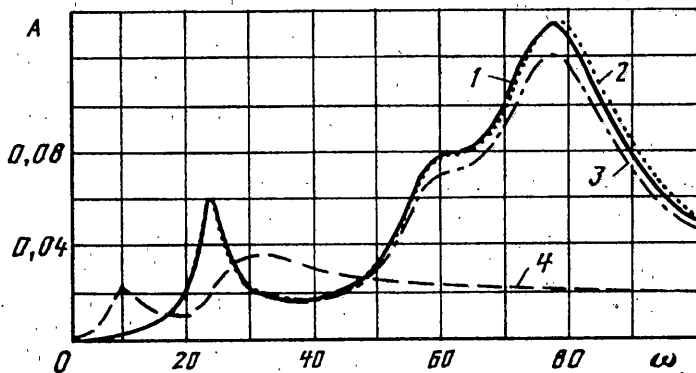
$$(-\omega^2 + E(i\omega)\omega_k^2)q_k(i\omega) = \delta_{0k}^T F(i\omega) \quad (3.1)$$

где ω_k, δ_{0k} – собственные частоты и векторы упругой конструкции, $E(i\omega)$ – комплексный модуль вязкоупругого материала, $F(i\omega)$ – вектор внешнего воздействия, q_k – обобщенные координаты, k – номер тона собственных колебаний. Такая процедура корректна только, если вязкоупругие свойства одинаковы для всей конструкции. Важным вопросом является изучение влияния вязкоупругой функции, соответствующей коэффициенту Пуассона твердого топлива, на амплитуды вынужденных колебаний. Сложность вопроса заключается в том, что в настоящее время нет достаточного количества данных для достоверного описания коэффициента Пуассона как функции частоты.

Рассматриваются колебания конструкции гипотетического РДТТ (фиг. 1). Первая задача связана с исследованием установившихся осесимметричных колебаний топливного заряда РДТТ. Твердое топливо моделируется осесимметричными кольцевыми элементами с треугольным поперечным сечением. Топливный заряд крепится по внешней цилиндрической поверхности. Материал топлива принимается изотропным и вязкоупругим. Коэффициент Пуассона топлива полагается равным действительной константе 0,496, плотность 1600 кг/м³. Вязкоупругие свойства описываются комплексным модулем, показанным на фиг. 2 (сплошная линия). На этой же фигуре представлен комплексный модуль дифференциального оператора (2.12), аппроксими-



Фиг. 2



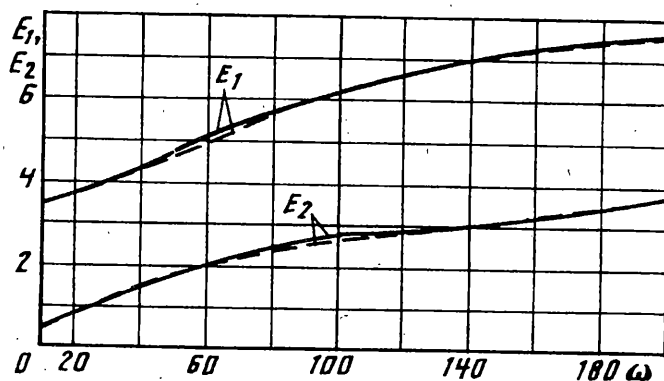
Фиг. 3

мирующей вязкоупругие свойства топлива в диапазоне $0 \dots 100$ Гц (штриховая линия).

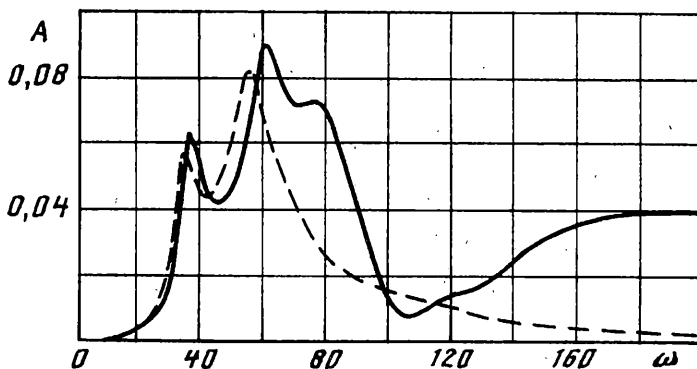
Топливный заряд нагружается продольной осесимметричной силой, распределенной по узловой окружности и изменяющейся во времени по закону $\cos(\omega t)$ с амплитудой 100 Н. Сила приложена к нижнему торцу заряда. Исследуется зависимость амплитуд колебаний топлива заряда от частоты возмущающей силы. На фиг. 3 представлены амплитудно-частотные характеристики топливного заряда для ускорения A [$\text{м}/\text{с}^2$] узловой окружности 51 , полученные в диапазоне $0 \dots 100$ Гц методом обобщенных комплексных форм (кривая 1), методом комплексного модуля (кривая 2), методом энергии деформаций с корректировкой (кривая 3) и без корректировки частот (кривая 4).

Как видно из рисунка, метод обобщенных комплексных форм дает решение, совпадающее с результатами, полученными методом комплексного модуля (кривые 1 и 2 на рисунке фактически сливаются). Метод энергии деформации без корректировки частот дает достаточно грубое решение. Это объясняется тем, что изменение модуля накопления вязкоупругого топлива в частотной области оказывает существенное влияние на собственные частоты топливного заряда. Корректировка собственных частот, учитывающая реальные изменения вязкоупругих свойств в частотной области, а для однородной конструкции это несложная процедура, позволяет уменьшить погрешности до приемлемого уровня.

Во второй задаче рассматриваются установившиеся колебания конструкции, состоящей из топливного заряда, корпуса, днищ (фиг. 1) и закрепленной в районе нижнего шпангоута. Материал корпуса и днищ РДТТ полагается ортотропным. Материал твердого топлива принимается изотропным и вязкоупругим. Первоначально колебания РДТТ исследуются в предположении, что коэффициент Пуассона равен действительной константе $0,496$. На фиг. 4 показан комплексный модуль твердого топлива

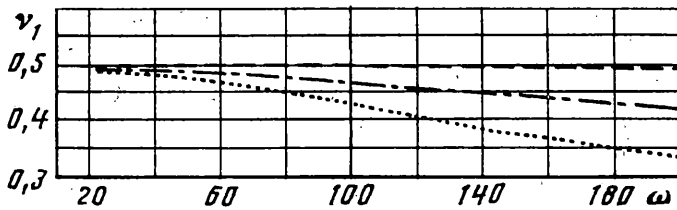


Фиг. 4

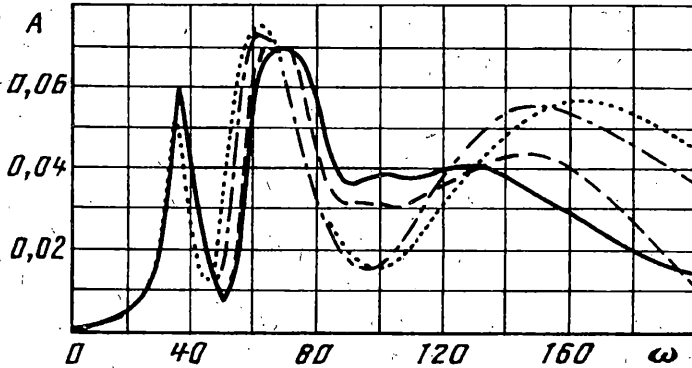


Фиг. 5

(сплошная линия). Вязкоупругие свойства топлива аппроксимируются дифференциальным оператором (2.12), комплексный модуль которого изображен на этой же фигуре штриховой линией. Корпус и днища РДТТ аппроксимируются осесимметричными оболочечными элементами, обладающими свойствами мембраны и жесткостью на изгиб, а твердое топливо – осесимметричными кольцевыми элементами с треугольным поперечным сечением. Конечно-элементная модель РДТТ показана на фиг. 1. Конструкция нагружается продольной осесимметричной силой, изменяющейся во времени по закону $\cos(\omega t)$ с амплитудой 100 Н. Сила приложена к нижнему днищу РДТТ. Исследуется зависимость амплитуд колебаний РДТТ от частоты возмущающей силы. Задача решается двумя методами: методом обобщенных комплексных форм и методом энергии деформации. При использовании метода энергии деформаций корректировка частот не проводится, так как для неоднородной вязкоупругой конструкции это не простая задача и в практических расчетах не применяемая. На фиг. 5 представлены амплитудно-частотные характеристики топливного заряда для ускорений A [м/с²] узловой окружности 51, полученные методом обобщенных комплексных форм (сплошная линия), методом энергии деформаций (штриховая линия). Полученные результаты хорошо согласуются в области первой резонансной частоты, несколько хуже – в области второй и значительно различаются в области частот, лежащих выше частоты второго резонансного пика. Таким образом, учет изменения модуля накопления в частотной области и неоднородность распределения вязкоупругих свойств по конструкции приводят к существенному изменению решения в области частот выше второй резонансной частоты.



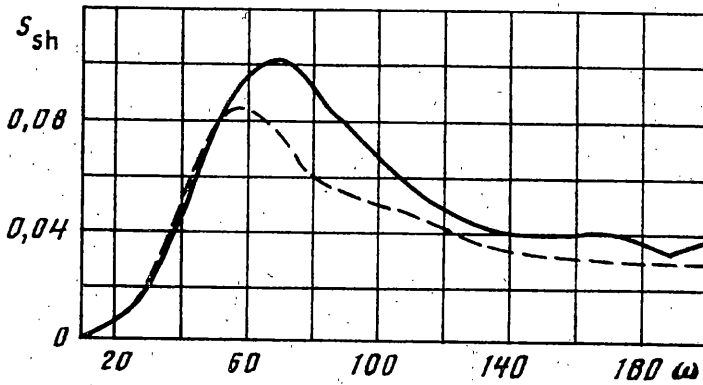
Фиг. 6



Фиг. 7

Для вязкоупругих конструкций на результаты вычислений может оказывать значительное влияние вязкоупругая функция, соответствующая коэффициенту Пуассона твердого топлива. Так как для достоверного описания вязкоупругого коэффициента Пуассона как функции от частоты в настоящее время нет достаточного количества данных, рассматриваются три возможных случая вязкоупругих свойств (a), (b) и (c). Каждый из вариантов вязкоупругих свойств описывается двумя функциями: комплексным модулем упругости (фиг. 4), который для случаев (a), (b) и (c) принимается одинаковым, и комплексным коэффициентом Пуассона, который для каждого случая описывается своей функцией. Вязкоупругий коэффициент Пуассона описывается для случая (a) малым, для случая (b) средним и для случая (c) большим изменением действительной части комплексного коэффициента Пуассона. Мнимая часть полагается пренебрежимо малой. На фиг. 6 показано изменение действительной части коэффициента Пуассона для трех случаев вязкоупругих свойств: случай (a) – штриховая линия, случай (b) – штрихпунктирная линия, и случай (c) – пунктирная линия.

На фиг. 7 представлены амплитудно-частотные характеристики РДТТ для ускорения $A [m/c^2]$ узловой окружности 41, полученные методом обобщенных комплексных форм для трех случаев вязкоупругих свойств: случай (a) (штриховая линия), случай (b) (штрихпунктирная линия) и случай (c) (пунктирная линия). На этом же рисунке для сравнения показана амплитудно-частотная характеристика, вычисленная при постоянном коэффициенте Пуассона (сплошная линия). Сравнение результатов показывает, что для всех трех случаев вязкости результаты хорошо согласуются лишь до первой резонансной частоты. В частотном диапазоне выше первого резонансного пика малое изменение коэффициента Пуассона приводит к небольшим несовпадениям с кривой, полученной при постоянном коэффициенте Пуассона (расхождения не превышают 10%). Среднее и большое изменение коэффициента Пуассона приводят к более существенным изменениям амплитудно-частотной характеристики. Смещается второй резонансный пик, что можно объяснить тем, что даже небольшое изменение коэф-



Фиг. 8

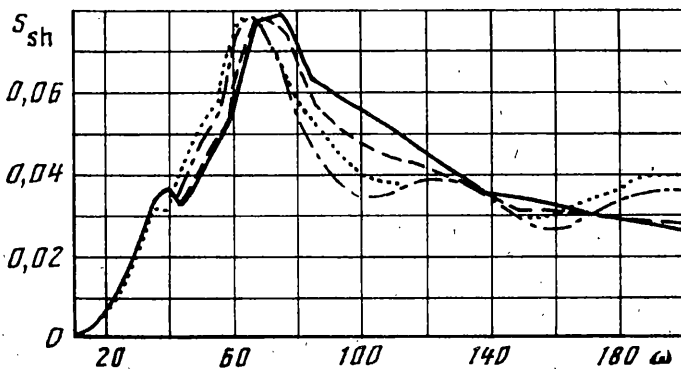
коэффициента Пуассона для почти несжимаемого материала, приводит к значительному увеличению вязкоупругой функции, соответствующей объемному модулю. Такое изменение приводит не только к смещению резонансных пиков, но и меняет характер поведения амплитудно-частотной кривой в области более высоких частот.

Третья задача связана с расчетом неустановившихся колебаний РДТТ, который был исследован в предыдущей задаче (фиг. 1). Конструкция нагружается продольной осесимметричной силой, изменение во времени которого описывается следующей формулой: если $t < \tau$, то $F = F_0 \sin(\pi t/\tau)$, если $t > \tau$, то $F = 0$, где F – сосредоточенная сила. Параметры внешнего воздействия $\tau = 0,01$ с, $F_0 = 100$ Н/м². Сила приложена к нижнему днущу РДТТ. Как и в предыдущей задаче первоначально исследуются колебания РДТТ в предположении, что коэффициент Пуассона равен действительной константе. Вязкоупругие свойства, описываются комплексным модулем, показанным на фиг. 4 (сплошная линия).

В результате расчета вынужденных колебаний получены зависимости ускорений различных элементов модели РДТТ. Для сравнения результатов в частотной области используются ударные спектры. Ударный спектр временной зависимости ускорения $a(t)$ представляет максимальное ускорение простого осциллятора в зависимости от его резонансной частоты при движении его основания с ускорением $a(t)$ [5]. В зависимости от величины демпфирования, допускаемого в осцилляторе, различаются демпфированные и недемпфированные ударные спектры. Здесь и ниже под ударным спектром подразумевается демпфированный ударный спектр, полученный при декременте колебаний 0,3. На фиг. 8 представлены ударные спектры ускорения S_{sh} [м/с²] РДТТ для узловой окружности 51, полученные методом обобщенных комплексных форм (сплошная линия) и методом энергии деформаций (штриховая линия). Полученные ударные спектры хорошо согласуются до первой резонансной частоты, в остальном диапазоне частот различия в спектрах достигают 20 ... 30%. Представленные результаты не противоречат решению, найденному для задачи установившихся колебаний.

Исследуется влияние вязкоупругого коэффициента Пуассона на амплитуды неустановившихся колебаний РДТТ. Как и в предыдущей задаче, рассматриваются три случая вязкоупругих свойств (а) малое, (б) среднее и (с) большое изменение коэффициента Пуассона. Изменения действительной части комплексного коэффициента Пуассона для трех случаев вязкости показаны на фиг. 6. Мнимая часть полагается пренебрежимо малой.

На фиг. 9 показаны ударные спектры ускорений S_{sh} [м/с²] РДТТ для узловой окружности 41, вычисленные методом обобщенных комплексных форм для трех случаев вязкоупругих свойств: случай (а) (штриховая линия), случай (б) (штрихпунктирная линия) и случай (с) (пунктирная линия). На этой же фигуре для сравнения показан



Фиг. 9

ударный спектр, вычисленный при постоянном коэффициенте Пуассона (базовое решение – сплошная линия). Из зависимостей, представленных на рисунке, можно видеть, что полученные результаты хорошо совпадают друг с другом для частот, лежащих ниже первой собственной частоты конструкции. Эта особенность отмечалась и для задачи расчета резонансных колебаний. Спектр, вычисленный при малом изменении коэффициента Пуассона, достаточно хорошо согласуется с решением, полученным при постоянном коэффициенте Пуассона (расхождение не превышает 10%). При среднем и большом изменении коэффициента Пуассона происходит смещение пика в области 70 Гц, а в остальном диапазоне расхождения с базовым решением достигают 20 ... 30%. Вычисленные результаты подтверждают выводы, сделанные при анализе резонансных режимов нагружения.

Следует отметить, что результаты, связанные с исследованием влияния коэффициента Пуассона на нагруженность конструкций, носят предварительный характер и требуют дальнейшего изучения.

4: Заключение. Дан обзор методов моделирования динамического поведения вязкоупругих конструкций. Отмечены важные особенности методов и показано, что ни один из них не обладает качествами эффективного метода, позволяющего учесть изменение вязкоупругих свойств в частотной области и неоднородность их распределения по конструкции. В связи с этим одним из перспективных в настоящее время методов решения задач динамики вязкоупругих конструкций является, по-видимому, метод обобщенных комплексных форм. Возможности метода демонстрируются на задаче вынужденных колебаний РДТТ. В частном случае для однородного вязкоупругого заряда получено хорошее согласие с методом комплексного модуля. Дано сравнение с решениями, найденными методом энергии деформаций. Проведено изучение влияния вязкоупругого коэффициента Пуассона на амплитуды вынужденных колебаний РДТТ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джонсон К.Д., Кинхольц Д.А. Расчет демпфированных колебаний в конструкциях, содержащих закрепленные вязкоупругие слои, методом конечных элементов // *Аэрокосмич. техника*. 1983. Т. 1. № 4. С. 124–133.
2. Колтунов М.А., Мирсаидов М., Трояновский И.Е. Установившиеся колебания осесимметричных вязкоупругих оболочек // *Механика полимеров*. 1978. № 2. С. 290–295.
3. Майборода В.П., Трояновский И.Е. Собственные колебания неоднородных вязкоупругих тел // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1983. № 2. С. 117–123.
4. Гриненко Н.И., Мокеев В.В. Анализ динамики неоднородных вязкоупругих конструкций методом конечных элементов // *Механика композитных материалов*. № 3. 1989. С. 475–481.
5. Харрис С.М., Крид Ч.И. Справочник по ударным нагрузкам. Л., Судостроение, 1980. 359 с. Челябинск

Поступила в редакцию
20.10.1997