МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1999

УДК 539.214;539.374

© 1999 г. Д.Д. ИВЛЕВ, А.Ю. ИШЛИНСКИЙ, Л.А. МАКСИМОВА

УСЛОВИЯ ИЗОТРОПИИ И СООТНОШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО АССОЦИИРОВАННОГО ЗАКОНА ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

В работе рассматриваются условия изотропии сплошной среды, для которой определены тензоры напряжений σ_{ij} и скоростей деформации ε_{ij}. В соотношениях пространственной задачи теории идеальной пластичности, предложенных А.Ю. Ишлинским [1], общие условия изотропии могут рассматриваться как соотношения обобщенного ассоциированного закона пластического течения.

1. Сен-Венан [2] сформулировал соотношения плоской задачи теории идеальной пластичности:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0 \tag{1.1}$$

где σ_x, σ_y, τ_{xy} – компоненты напряжения в декартовой системе координат;

условие пластичности максимального касательного напряжения – условие пластичности Треска:

$$\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=k, \quad k-\mathrm{const}, \quad \sigma_1>\sigma_2 \tag{1.2}$$

где σ_1, σ_2 – главные напряжения, k – предел текучести на сдвиг, для случая плоской задачи условие пластичности (1.2) имеет вид

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=4k^2 \tag{1.3}$$

условие изотропии, определяющее совпадение главных направлений тензоров напряжений и скоростей деформаций

$$\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y} \tag{1.4}$$

где φ – угол, образованный направлением главного напряжения σ_1 с осью x, ε_x, ε_y, ε_{xy} – компоненты скорости деформации;

условие несжимаемости

$$\varepsilon_x+\varepsilon_y=0 \tag{1.5}$$

причем

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{1.6}$$

где u, v – компоненты скорости перемещения.

Система пяти уравнений (1.1), (1.3), (1.4), (1.5) относительно пяти неизвестных σ_x, σ_y, τ_{xy}, u, v является замкнутой.

Уравнению изотропии (1.4) можно придать вид

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{\tau_{xy}}{\varepsilon_{xy}} \tag{1.7}$$

или

$$\sigma_x \varepsilon_{xy} + \tau_{xy} \varepsilon_y = \tau_{xy} \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_{xy} \tag{1.8}$$

Леви [3] предложил обобщение результатов Сен-Венана [2] на случай пространственного состояния идеально пластического тела. Условие пластичности (1.2), определяющее соответствие напряженного состояния грани призмы Треска (шестигранная призма Треска является геометрической интерпретацией условия пластичности Треска $|\tau_{\max}| = k$ в пространстве главных напряжений σ_i), Леви [3] записал в виде

$$4(q + k^2)(q + 4k^2)^2 + 27r^2 = 0 \tag{1.9}$$

где $q = \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}$; $r = \sigma'_{ij}\sigma'_{jk}\sigma'_{ki}$ – соответственно второй и третий инварианты девиатора напряжений, $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Соотношения, определяющие пространственное пластическое течение, Леви [3] предложил на основе обобщения соотношения (1.7), предполагая пропорциональность сдвиговых компонент напряжения компонентам скоростей сдвига

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{\varepsilon_y - \varepsilon_z} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{\varepsilon_z - \varepsilon_x} = \frac{\tau_{xy}}{\varepsilon_{xy}} = \frac{\tau_{yz}}{\varepsilon_{yz}} = \frac{\tau_{xz}}{\varepsilon_{xz}} \tag{1.10}$$

а также справедливость условия несжимаемости

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \tag{1.11}$$

Мизес [4] предложил вариант соотношений пространственной задачи теории идеальной пластичности. Вместо условия пластичности (1.9), Мизес [4] ввел условие пластичности

$$q = (\sigma'_{ij})^2 = 4k^2 \tag{1.12}$$

сохранив соотношения (1.10), (1.11).

Позднее Мизес [5] предложил определять соотношения связи $\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}$, исходя из соображений экстремума скорости диссипации

$$D = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{1.13}$$

Присоединяя к выражению (1.13) условие текучести

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \tag{1.14}$$

Мизес [5] рассмотрел условный экстремум функционала

$$D = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \lambda f(\sigma_{ij}), \quad \lambda \geq 0 \tag{1.15}$$

где λ – множитель Лагранжа.

Для действительных компонент скорости деформации ε_{ij}, из условия

$$\partial D / \partial \sigma_{ij} = 0 \tag{1.16}$$

согласно (1.15), следует

$$\varepsilon_{ij} = \lambda \partial f / \partial \sigma_{ij} \tag{1.17}$$

Соотношения (1.17) получили название ассоциированного закона пластического течения. Соотношения (1.10), (1.11) являются следствиями соотношений ассоциированного закона течения (1.17) для условия пластичности Мизеса (1.12). Соотношения (1.10), (1.11) не являются следствиями ассоциированного закона течения (1.17) для условия пластичности Треска (1.9). Другими словами в соотношениях Леви (1.9), (1.10) используется условие пластичности, выражающее соответствие напряженного состояния грани призмы Треска и ассоциированный закон пластического течения при условии пластичности Мизеса (1.12).

Соотношения ассоциированного закона пластического течения при условии пластичности Треска (1.9), согласно (1.17) имеют вид

$$\varepsilon_x = -\lambda\left[a\sigma'_x - 54r\left(\tau^2_{xy} - \sigma'_y\sigma'_z\right) + \frac{1}{3}q\right]$$

$$\varepsilon_{xy} = -2\lambda[a\tau_{xy} - 54r(\tau_{xy}\sigma'_z - \tau_{xz}\tau_{yz})] \quad (xyz) \tag{1.18}$$

$$a = 12(q+4k^2)(q+2k^2), \quad \lambda \geqslant 0$$

где символ (xyz) обозначает, что недостающие выражения определяются круговой перестановкой индексов.

Ассоциированный закон течения, соответствующий сингулярному условию пластичности, обладающим особенностями в виде ребер и т.п., рассматривался Рейсом [6]. Рейс записал ребро условия пластичности, как пересечение двух гладких поверхностей текучести

$$f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad f_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \tag{1.19}$$

и предложил соотношения ассоциированного закона пластического течения в виде

$$\varepsilon_1 = \lambda\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_1} + \mu\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_1}, \quad \varepsilon_2 = \lambda\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_2} + \mu\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_2}, \quad \varepsilon_3 = \lambda\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_3} + \mu\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_3}, \quad \lambda \geqslant 0, \quad \mu \geqslant 0 \tag{1.20}$$

Позднее соотношения ассоциированного закона течения для сингулярных условий пластичности (1.20) получили название соотношений обобщенного ассоциированного закона пластического течения [7, 8].

А.Ю. Ишлинский [1] рассмотрел соотношения теории пространственной задачи теории идеальной пластичности в случае, когда напряженное состояние соответствует пересечению двух гладких поверхностей текучести (1.19). Соотношения, определяющие связь $\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}$ [1], даны в виде условий изотропии, обобщающих условие изотропии в форме (1.8):

$$\begin{aligned}
\sigma_x\varepsilon_{xy} + \tau_{xy}\varepsilon_y + \tau_{xz}\varepsilon_{yz} &= \tau_{xy}\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_{xy} + \tau_{yz}\varepsilon_{xz} \\
\tau_{xy}\varepsilon_{xz} + \sigma_y\varepsilon_{yz} + \tau_{yz}\varepsilon_z &= \tau_{xz}\varepsilon_{xy} + \tau_{yz}\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_{yz} \\
\tau_{xz}\varepsilon_x + \tau_{yz}\varepsilon_{xy} + \sigma_z\varepsilon_{xz} &= \sigma_x\varepsilon_{xz} + \tau_{xy}\varepsilon_{yz} + \tau_{xz}\varepsilon_z
\end{aligned} \tag{1.21}$$

а также условие несжимаемости (1.11).

В работе [1] указано на принципиальное различие характера пластического течения, определяемого соотношениями Леви – Мизеса (1.10) и соотношениями (1.21): "*для пространственной задачи пластичности имеют место два соотношения между главными напряжениями, подобно гипотезе полной пластичности Хара и Кармана. Этим предлагаемая теория отличается от теории Леви и Мизеса, в которых принимается единственное соотношение. Для построения замкнутой системы уравнений обоим авторам приходится вводить излишне большие ограничения на величины скоростей деформирования, если рассматривается течение пластической среды. Именно прини-*

маются справедливыми четыре соотношения:

$$\frac{\sigma_x-\sigma_y}{\partial u/\partial x-\partial v/\partial y}=\frac{\sigma_x-\sigma_z}{\partial u/\partial x-\partial w/\partial z}=\frac{2\tau_{xy}}{\partial v/\partial x+\partial u/\partial y}=$$

$$=\frac{2\tau_{yz}}{\partial w/\partial y+\partial v/\partial z}=\frac{2\tau_{xz}}{\partial w/\partial x+\partial u/\partial z}$$

где u, v, w – компоненты скорости какой-либо частицы пластической среды. Эти соотношения содержат не только требование коаксильности тензора напряжения и тензора скоростей деформирования, но также и требование пропорциональности касательного напряжения на произвольно ориентированной площадке к соответствующей скорости деформации сдвига (причем коэффициент пропорциональности может меняться при переходе от одной точки тела к другой). В частности, если где-либо в среде возникает напряженное состояние с главными напряжениями

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3+2k$$

то из упомянутых выше теорий следует, что обязательно должно осуществляться равенство $\varepsilon_1=\varepsilon_2$. Согласно же нашей теории, должно быть только

$$\varepsilon_1>0,\qquad \varepsilon_2>0$$

а соотношение между ними может быть произвольным" [1].

2. Рассмотрим вывод условий изотропии (1.21). Предположим, что ориентация осей координат xyz и главных направлений тензора скорости деформации 1, 2, 3 определяется направляющими косинусами l_i, m_i, n_i, приведенными в таблице

	1	2	3
X	l_1	m_1	n_1
Y	l_2	m_2	n_2
Z	l_3	m_3	n_3

Для направляющих косинусов справедливы соотношения

$$\begin{aligned}&l_1^2+m_1^2+n_1^2=1, &&l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=0\\&l_2^2+m_2^2+n_2^2=1, &&m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=0\\&l_3^2+m_3^2+n_3^2=1, &&l_1n_1+l_2n_2+l_3n_3=0\end{aligned}\qquad(2.1)$$

а также

$$\begin{aligned}&l_1^2+l_2^2+l_3^2=1, &&l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0\\&m_1^2+m_2^2+m_3^2=1, &&l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3=0\\&n_1^2+n_2^2+n_3^2=1, &&l_1l_3+m_1m_3+n_1n_3=0\end{aligned}\qquad(2.2)$$

Для определителя Δ имеет место

$$\Delta=\begin{vmatrix}l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ l_3 & m_3 & n_3\end{vmatrix}=1\qquad(2.3)$$

Имеют место также соотношения

$$
\begin{aligned}
&l_1 = m_2n_3 - m_3n_2, \qquad m_1 = n_2l_3 - n_3l_2, \qquad n_1 = l_2m_3 - l_3m_2\\
&l_2 = m_3n_1 - m_1n_3, \qquad m_2 = n_3l_1 - n_1l_3, \qquad n_2 = l_3m_1 - l_1m_3\\
&l_3 = m_1n_2 - m_2n_1, \qquad m_3 = n_1l_2 - n_2l_1, \qquad n_3 = l_1m_2 - l_2m_1
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

Связь компонент скорости деформации в декартовой системе координат с главными компонентами определяются соотношениями

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_3 n_1^2, \qquad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_1 l_1 l_2 + \varepsilon_2 m_1 m_2 + \varepsilon_3 n_1 n_2\\
&\varepsilon_y = \varepsilon_1 l_2^2 + \varepsilon_2 m_2^2 + \varepsilon_3 n_2^2, \qquad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_1 l_2 l_3 + \varepsilon_2 m_2 m_3 + \varepsilon_3 n_2 n_3\\
&\varepsilon_z = \varepsilon_1 l_3^2 + \varepsilon_2 m_3^2 + \varepsilon_3 n_3^2, \qquad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_1 l_1 l_3 + \varepsilon_2 m_1 m_3 + \varepsilon_3 n_1 n_3
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Из системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_3 n_1^2 = \varepsilon_x\\
&\varepsilon_1 l_1 l_2 + \varepsilon_2 m_1 m_2 + \varepsilon_3 n_1 n_2 = \varepsilon_{xy}\\
&\varepsilon_1 l_1 l_3 + \varepsilon_2 m_1 m_3 + \varepsilon_3 n_1 n_3 = \varepsilon_{xz}
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

следует

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_1 = \frac{1}{l_1}(\varepsilon_x l_1 + \varepsilon_{xy} l_2 + \varepsilon_{xz} l_3)\\
&\varepsilon_2 = \frac{1}{m_1}(\varepsilon_x m_1 + \varepsilon_{xy} m_2 + \varepsilon_{xz} m_3)\\
&\varepsilon_3 = \frac{1}{n_1}(\varepsilon_x n_1 + \varepsilon_{xy} n_2 + \varepsilon_{xz} n_3)
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Аналогично (2.6), (2.7) получим

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_1 = \frac{1}{l_2}(\varepsilon_{xy} l_1 + \varepsilon_y l_2 + \varepsilon_{yz} l_3)\\
&\varepsilon_2 = \frac{1}{m_2}(\varepsilon_{xy} m_1 + \varepsilon_y m_2 + \varepsilon_{yz} m_3)\\
&\varepsilon_3 = \frac{1}{n_2}(\varepsilon_{xy} n_1 + \varepsilon_y n_2 + \varepsilon_{yz} n_3)
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

а также

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_1 = \frac{1}{l_3}(\varepsilon_{xz} l_1 + \varepsilon_{yz} l_2 + \varepsilon_z l_3)\\
&\varepsilon_2 = \frac{1}{m_3}(\varepsilon_{xz} m_1 + \varepsilon_{yz} m_2 + \varepsilon_z m_3)\\
&\varepsilon_3 = \frac{1}{n_3}(\varepsilon_{xz} n_1 + \varepsilon_{yz} n_2 + \varepsilon_z n_3)
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Из (2.7)–(2.9) следуют три соотношения:

$$
\varepsilon_1 = \frac{1}{l_1}(\varepsilon_x l_1 + \varepsilon_{xy} l_2 + \varepsilon_{xz} l_3) = \frac{1}{l_2}(\varepsilon_{xy} l_1 + \varepsilon_y l_2 + \varepsilon_{yz} l_3) = \frac{1}{l_3}(\varepsilon_{xz} l_1 + \varepsilon_{yz} l_2 + \varepsilon_z l_3)
$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{m_1}(\varepsilon_x m_1 + \varepsilon_{xy} m_2 + \varepsilon_{xz} m_3) = \frac{1}{m_2}(\varepsilon_{xy} m_1 + \varepsilon_y m_2 + \varepsilon_{yz} m_3) =$$

$$= \frac{1}{m_3}(\varepsilon_{xz} m_1 + \varepsilon_{yz} m_2 + \varepsilon_z m_3) \qquad (2.10)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{n_1}(\varepsilon_x n_1 + \varepsilon_{xy} n_2 + \varepsilon_{xz} n_3) = \frac{1}{n_2}(\varepsilon_{xy} n_1 + \varepsilon_y n_2 + \varepsilon_{yz} n_3) =$$

$$= \frac{1}{n_3}(\varepsilon_{xz} n_1 + \varepsilon_{yz} n_2 + \varepsilon_z n_3)$$

Для изотропного материала имеет место совпадение главных направлений тензоров напряжений и скорости деформаций. Для компонент напряжений в декартовой системе координат и главных компонент напряжений для изотропного материала имеют место соотношения, вполне аналогичные (2.5)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2, \qquad & \tau_{xy} &= \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2 \\ \sigma_y &= \sigma_1 l_2^2 + \sigma_2 m_2^2 + \sigma_3 n_2^2, & \tau_{yz} &= \sigma_1 l_2 l_3 + \sigma_2 m_2 m_3 + \sigma_3 n_2 n_3 \\ \sigma_z &= \sigma_1 l_3^2 + \sigma_2 m_3^2 + \sigma_3 n_3^2, & \tau_{xz} &= \sigma_1 l_1 l_3 + \sigma_2 m_1 m_3 + \sigma_3 n_1 n_3 \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Для компонент напряжений справедливы формулы, аналогичные (2.10):

$$\sigma_1 = \frac{1}{l_1}(\sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3) = \frac{1}{l_2}(\tau_{xy} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3) = \frac{1}{l_3}(\tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} l_2 + \sigma_z l_3)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{m_1}(\sigma_x m_1 + \tau_{xy} m_2 + \tau_{xz} m_3) = \frac{1}{m_2}(\tau_{xy} m_1 + \sigma_y m_2 + \tau_{yz} m_3) =$$

$$= \frac{1}{m_3}(\tau_{xz} m_1 + \tau_{yz} m_2 + \sigma_z m_3) \qquad (2.12)$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{n_1}(\sigma_x n_1 + \tau_{xy} n_2 + \tau_{xz} n_3) = \frac{1}{n_2}(\tau_{xy} n_1 + \sigma_y n_2 + \tau_{yz} n_3) =$$

$$= \frac{1}{n_3}(\tau_{xz} n_1 + \tau_{yz} n_2 + \sigma_z n_3)$$

Рассмотрим произведения $\sigma_1\varepsilon_1$, $\sigma_2\varepsilon_2$, $\sigma_3\varepsilon_3$. Используя соотношения (2.7–2.9), (2.12), для $\sigma_1\varepsilon_1$ получим

$$\sigma_1\varepsilon_1 = \frac{1}{l_1 l_2}(\sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3)(\varepsilon_{xy} l_1 + \varepsilon_y l_2 + \varepsilon_{yz} l_3) =$$

$$= \frac{1}{l_1 l_2}(\tau_{xy} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3)(\varepsilon_x l_1 + \varepsilon_{xy} l_2 + \varepsilon_{xz} l_3)$$

$$\sigma_1\varepsilon_1 = \frac{1}{l_2 l_3}(\tau_{xy} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3)(\varepsilon_{xz} l_1 + \varepsilon_{yz} l_2 + \varepsilon_z l_3) =$$

$$= \frac{1}{l_2 l_3}(\tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} l_2 + \sigma_z l_3)(\varepsilon_{xy} l_1 + \varepsilon_y l_2 + \varepsilon_{yz} l_3) \qquad (2.13)$$

$$\sigma_1\varepsilon_1 = \frac{1}{l_1 l_3}(\tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} l_2 + \sigma_z l_3)(\varepsilon_x l_1 + \varepsilon_{xy} l_2 + \varepsilon_{xz} l_3) =$$

$$= \frac{1}{l_1 l_3}(\sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3)(\varepsilon_{xz} l_1 + \varepsilon_{yz} l_2 + \varepsilon_z l_3)$$

Аналогично можно получить подобные выражения для произведений $\sigma_2\varepsilon_2$, $\sigma_3\varepsilon_3$, в которых величины косинусов l_i соответственно заменены на m_i, n_i. Из (2.13) получим

$$\begin{aligned}&\sigma_x\varepsilon_{xy}l_1^2+\tau_{xy}\varepsilon_y l_2^2+\tau_{xz}\varepsilon_{yz}l_3^2+\tau_{xy}\varepsilon_{xy}l_1l_2+\tau_{xz}\varepsilon_{xy}l_1l_3+\\&+\sigma_x\varepsilon_y l_1l_2+\tau_{xz}\varepsilon_y l_2l_3+\sigma_x\varepsilon_{yz}l_1l_3+\tau_{xy}\varepsilon_{yz}l_2l_3=\\&=\tau_{xy}\varepsilon_x l_1^2+\sigma_y\varepsilon_{xy}l_2^2+\tau_{yz}\varepsilon_{xz}l_3^2+\tau_{xy}\varepsilon_{xy}l_1l_2+\tau_{xy}\varepsilon_{xz}l_1l_3+\\&+\sigma_y\varepsilon_x l_1l_2+\sigma_y\varepsilon_{xz}l_2l_3+\tau_{yz}\varepsilon_x l_1l_3+\tau_{yz}\varepsilon_{xy}l_2l_3\end{aligned} \tag{2.14}$$

Согласно (2.13) имеют место два аналогичных выражения, если заменить в (2.14) l_i последовательно на m_i и n_i.

Суммируя эти выражения, получим

$$\sigma_x\varepsilon_{xy}+\tau_{xy}\varepsilon_y+\tau_{xz}\varepsilon_{yz}=\tau_{xy}\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_{xy}+\tau_{yz}\varepsilon_{xz} \tag{2.15}$$

а также, согласно круговой перестановке индексов, найдем

$$\begin{aligned}&\tau_{xy}\varepsilon_{xz}+\sigma_y\varepsilon_{yz}+\tau_{yz}\varepsilon_z=\tau_{xz}\varepsilon_{xy}+\tau_{yz}\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_{yz}\\&\tau_{xz}\varepsilon_x+\tau_{yz}\varepsilon_{xy}+\sigma_z\varepsilon_{xz}=\sigma_x\varepsilon_{xz}+\tau_{xy}\varepsilon_{yz}+\tau_{xz}\varepsilon_z\end{aligned} \tag{2.16}$$

Соотношения (2.15), (2.16), введенные А.Ю. Ишлинским [1], справедливы только для изотропного тела и выражают условие совпадения главных осей тензора напряжений и скоростей деформаций.

3. Рассмотрим соотношения ассоциированного закона пластического течения в обобщенных переменных.

Условие предельного состояния запишем в виде

$$F(\sigma_{ij})=0 \tag{3.1}$$

Рассмотрим мощность рассеяния механической энергии

$$N=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+2\tau_{xy}\varepsilon_{xy}+2\tau_{yz}\varepsilon_{yz}+2\tau_{xz}\varepsilon_{xz} \tag{3.2}$$

Согласно (2.11), соотношение (3.2) запишем в виде

$$\begin{aligned}&N=(\sigma_1l_1^2+\sigma_2m_1^2+\sigma_3n_1^2)\varepsilon_x+(\sigma_1l_2^2+\sigma_2m_2^2+\sigma_3n_2^2)\varepsilon_y+\\&+(\sigma_1l_3^2+\sigma_2m_3^2+\sigma_3n_3^2)\varepsilon_z+2(\sigma_1l_1l_2+\sigma_2m_1m_2+\sigma_3n_1n_2)\varepsilon_{xy}+\\&+2(\sigma_1l_2l_3+\sigma_2m_2m_3+\sigma_3n_2n_3)\varepsilon_{yz}+2(\sigma_1l_1l_3+\sigma_2m_1m_3+\sigma_3n_1n_3)\varepsilon_{xz}\end{aligned} \tag{3.3}$$

Согласно (2.11), соотношение (3.1) примет вид

$$F(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,l_1,l_2,l_3,m_1,m_2,m_3,n_1,n_2,n_3)=0 \tag{3.4}$$

Соотношения ассоциированного закона пластического течения определяются из условия экстремума функционала, согласно (3.3), (3.4), (2.1):

$$\begin{aligned}&A=N-\lambda F-\mu_1(l_1^2+m_1^2+n_1^2)-\mu_2(l_2^2+m_2^2+n_2^2)-\\&-\mu_3(l_3^2+m_3^2+n_3^2)-2\nu_1(l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3)-\\&-2\nu_2(l_1l_3+m_1m_3+n_1n_3)-2\nu_3(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Из (3.5) получим

$$\varepsilon_1=\lambda\frac{\partial F}{\partial\sigma_1},\quad \varepsilon_2=\lambda\frac{\partial F}{\partial\sigma_2},\quad \varepsilon_3=\lambda\frac{\partial F}{\partial\sigma_3} \tag{3.6}$$

$$\varepsilon_1=\varepsilon_x l_1^2+\varepsilon_y l_2^2+\varepsilon_z l_3^2+2\varepsilon_{xy}l_1l_2+2\varepsilon_{yz}l_2l_3+2\varepsilon_{xz}l_1l_3$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_x m_1^2 + \varepsilon_y m_2^2 + \varepsilon_z m_3^2 + 2\varepsilon_{xy} m_1 m_2 + 2\varepsilon_{yz} m_2 m_3 + 2\varepsilon_{xz} m_1 m_3 \tag{3.7}$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_x n_1^2 + \varepsilon_y n_2^2 + \varepsilon_z n_3^2 + 2\varepsilon_{xy} n_1 n_2 + 2\varepsilon_{yz} n_2 n_3 + 2\varepsilon_{xz} n_1 n_3$$

Величины ε_1, ε_2, ε_3 определяют скорости деформации удлинения вдоль направлений 1, 2, 3 и в общем случае не совпадают с главными компонентами тензора деформаций. Совпадение имеет место только для изотропного тела.

Далее из (3.5) следует

$$\sigma_1(\varepsilon_x l_1 + \varepsilon_{xy} l_2 + \varepsilon_{xz} l_3) = \frac{\lambda \partial F}{2\partial l_1} + \mu_1 l_1 + \nu_3 l_2 + \nu_2 l_3$$

$$\sigma_1(\varepsilon_{xy} l_1 + \varepsilon_y l_2 + \varepsilon_{yz} l_3) = \frac{\lambda \partial F}{2\partial l_2} + \mu_2 l_2 + \nu_1 l_3 + \nu_3 l_1 \tag{3.8}$$

$$\sigma_1(\varepsilon_{xz} l_1 + \varepsilon_{yz} l_2 + \varepsilon_z l_3) = \frac{\lambda \partial F}{2\partial l_3} + \mu_3 l_3 + \nu_2 l_1 + \nu_1 l_2$$

аналогично

$$\sigma_2(\varepsilon_x m_1 + \varepsilon_{xy} m_2 + \varepsilon_{xz} m_3) = \frac{\lambda \partial F}{2\partial m_1} + \mu_1 m_1 + \nu_3 m_2 + \nu_2 m_3$$

$$\sigma_2(\varepsilon_{xy} m_1 + \varepsilon_y m_2 + \varepsilon_{yz} m_3) = \frac{\lambda \partial F}{2\partial m_2} + \mu_2 m_2 + \nu_1 m_3 + \nu_3 m_1 \tag{3.9}$$

$$\sigma_2(\varepsilon_{xz} m_1 + \varepsilon_{yz} m_2 + \varepsilon_z m_3) = \frac{\lambda \partial F}{2\partial m_3} + \mu_3 m_3 + \nu_2 m_1 + \nu_1 m_2$$

$$\sigma_3(\varepsilon_x n_1 + \varepsilon_{xy} n_2 + \varepsilon_{xz} n_3) = \frac{\lambda \partial F}{2\partial n_1} + \mu_1 n_1 + \nu_3 n_2 + \nu_2 n_3$$

$$\sigma_3(\varepsilon_{xy} n_1 + \varepsilon_y n_2 + \varepsilon_{yz} n_3) = \frac{\lambda \partial F}{2\partial n_2} + \mu_2 n_2 + \nu_1 n_3 + \nu_3 n_1 \tag{3.10}$$

$$\sigma_3(\varepsilon_{xz} n_1 + \varepsilon_{yz} n_2 + \varepsilon_z n_3) = \frac{\lambda \partial F}{2\partial n_3} + \mu_3 n_3 + \nu_2 n_1 + \nu_1 n_2$$

Из (3.8)–(3.10) следует

$$\mu_1 = (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_{xy} \tau_{xy} + \varepsilon_{xz} \tau_{xz}) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial l_1} l_1 + \frac{\partial F}{\partial m_1} m_1 + \frac{\partial F}{\partial n_1} n_1\right)$$

$$\mu_2 = (\varepsilon_{xy} \tau_{xy} + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_{yz} \tau_{yz}) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial l_2} l_2 + \frac{\partial F}{\partial m_2} m_2 + \frac{\partial F}{\partial n_2} n_2\right) \tag{3.11}$$

$$\mu_3 = (\varepsilon_{xz} \tau_{xz} + \varepsilon_{yz} \tau_{yz} + \varepsilon_z \sigma_z) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial l_3} l_3 + \frac{\partial F}{\partial m_3} m_3 + \frac{\partial F}{\partial n_3} n_3\right)$$

а также

$$\nu_1 = \varepsilon_{xy} \tau_{xz} + \varepsilon_y \tau_{yz} + \varepsilon_{yz} \sigma_z - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial l_2} l_3 + \frac{\partial F}{\partial m_2} m_3 + \frac{\partial F}{\partial n_2} n_3\right) =$$

$$= \varepsilon_{xz} \tau_{xy} + \varepsilon_{yz} \sigma_y + \varepsilon_z \tau_{yz} - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial l_3} l_2 + \frac{\partial F}{\partial m_3} m_2 + \frac{\partial F}{\partial n_3} n_2\right) \tag{3.12}$$

$$\nu_2 = \varepsilon_x \tau_{xz} + \varepsilon_{xy} \tau_{yz} + \varepsilon_{xz} \sigma_z - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial l_1} l_3 + \frac{\partial F}{\partial m_1} m_3 + \frac{\partial F}{\partial n_1} n_3\right) =$$

$$= \varepsilon_{xz} \sigma_x + \varepsilon_{yz} \tau_{xy} + \varepsilon_z \tau_{xz} - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial l_3} l_1 + \frac{\partial F}{\partial m_3} m_1 + \frac{\partial F}{\partial n_3} n_1\right) \tag{3.13}$$

$$\nu_3 = \varepsilon_x \tau_{xz} + \varepsilon_y \tau_{yz} + \varepsilon_{yz} \sigma_z - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial l_1} l_2 + \frac{\partial F}{\partial m_1} m_2 + \frac{\partial F}{\partial n_1} n_2\right) =$$

$$= \varepsilon_{xz} \tau_{xy} + \varepsilon_{yz} \sigma_y + \varepsilon_z \tau_{yz} - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial l_2} l_1 + \frac{\partial F}{\partial m_2} m_1 + \frac{\partial F}{\partial n_2} n_1\right) \tag{3.14}$$

Уравнения (3.11) определяют выражения для множителей Лагранжа μ_1, μ_2, μ_3.

Собственно, соотношения ассоциированного течения определяют выражения (3.12)–(3.14).

Для определения шестнадцати неизвестных σ_1, σ_2, σ_3, u, v, w (компоненты скорости перемещения), λ, l_i, m_i, n_i имеет место шестнадцать уравнений: три уравнения равновесия, уравнение (3.4), шесть соотношений ассоциированного закона течения (3.6), (3.12)–(3.14) и шесть соотношений ортогональности единичных ортов (2.2).

Для изотропного случая условие пластичности (3.4) не зависит от направляющих косинусов

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \tag{3.15}$$

и соотношения ассоциированного закона течения (3.12)–(3.14) приобретают вид [1]:

$$\begin{gathered}
\sigma_x \varepsilon_{xy} + \tau_{xy} \varepsilon_y + \tau_{xz} \varepsilon_{yz} = \varepsilon_x \tau_{xy} + \varepsilon_{xy} \sigma_y + \varepsilon_{xz} \tau_{yz} \\
\tau_{xy} \varepsilon_{xz} + \sigma_y \varepsilon_{yz} + \tau_{yz} \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} \tau_{xz} + \varepsilon_y \tau_{yz} + \varepsilon_{yz} \sigma_z \\
\tau_{xz} \varepsilon_x + \tau_{yz} \varepsilon_{xy} + \sigma_z \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xz} \sigma_x + \varepsilon_{yz} \tau_{xy} + \varepsilon_z \tau_{xz}
\end{gathered} \tag{3.16}$$

4. Введем компоненты девиатора напряжений

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij}\sigma, \quad \sigma = \tfrac{1}{3}\sigma_{ii} = \tfrac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{4.1}$$

где δ_{ij} – единичный тензор Кронекера.

Положим

$$\sigma_1 = \sigma + \sigma'_1, \quad \sigma_2 = \sigma + \sigma'_2, \quad \sigma_3 = \sigma + \sigma'_3 \tag{4.2}$$

Очевидно

$$\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0, \quad \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0 \tag{4.3}$$

Из (4.2), (2.11) следует

$$\begin{gathered}
\sigma'_x = \sigma'_1 l_1^2 + \sigma'_2 m_1^2 + \sigma'_3 n_1^2 \quad (xyz) \\
\tau'_{xy} = \sigma'_1 l_1 l_2 + \sigma'_2 m_1 m_2 + \sigma'_3 n_1 n_2 \quad (123)
\end{gathered} \tag{4.4}$$

где (xyz), (123) означают, что недостающие выражения получаются круговой перестановкой индексов.

В дальнейшем обозначим компоненты девиатора

$$\sigma'_{ij} = s_{ij}, \quad \sigma'_i = s_i \tag{4.5}$$

Согласно (3.3), (4.1), (4.4), (4.5) получим

$$N = 3\sigma\varepsilon + (s_1 l_1^2 + s_2 m_1^2 + s_3 n_1^2)\varepsilon_x + (s_1 l_2^2 + s_2 m_2^2 + s_3 n_2^2)\varepsilon_y +$$
$$+(s_1 l_2^3 + s_2 m_3^2 + s_3 n_3^2)\varepsilon_z + 2(s_1 l_1 l_2 + s_2 m_1 m_2 + s_3 n_1 n_2)\varepsilon_{xy} + \qquad (4.6)$$
$$+2(s_1 l_2 l_3 + s_2 m_2 m_3 + s_3 n_2 n_3)\varepsilon_{yz} + 2(s_1 l_1 l_3 + s_2 m_1 m_3 + s_3 n_1 n_3)\varepsilon_{xz}$$
$$\varepsilon = \tfrac{1}{3}\varepsilon_{ii} = \tfrac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

Соотношение (3.4), согласно (4.1), (4.5) примет вид

$$F(\sigma, s_1, s_2, s_3, l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3) = 0 \qquad (4.7)$$

Соотношения ассоциированного закона пластического течения определяются из условия экстремума функционала, используя соотношения (2.1), (4.3):

$$A = N - \lambda F - \mu(s_1 + s_2 + s_3) + \mu_1(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) -$$
$$-\mu_2(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) - \mu_3(l_3^2 + m_3^2 + n_3^2) - 2\nu_1(l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3) - \qquad (4.8)$$
$$-2\nu_2(l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3) - 2\nu_3(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)$$

Из (4.6)–(4.8) получим

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{3}\frac{\partial F}{\partial \sigma}, \quad \varepsilon_1 = \lambda\frac{\partial F}{\partial s_1} + \mu, \quad \varepsilon_2 = \lambda\frac{\partial F}{\partial s_2} + \mu, \quad \varepsilon_3 = \lambda\frac{\partial F}{\partial s_3} + \mu \qquad (4.9)$$

где ε_1, ε_2, ε_3 определяются согласно (3.7).

Из (4.9) следует

$$3\mu = \frac{\partial F}{\partial \sigma} - \lambda\left(\frac{\partial F}{\partial s_1} + \frac{\partial F}{\partial s_2} + \frac{\partial F}{\partial s_3}\right) \qquad (4.10)$$

Далее имеют место формулы, вполне аналогичные (3.8–3.14), в которых следует заменить выражения компонент σ_{ij}, σ_i на s_{ij}, s_i.

Рассмотрим случай изотропного материала

$$F(\sigma, s_1, s_2, s_3) = 0 \qquad (4.11)$$

В этом случае имеют место формулы (4.9), (4.10), соотношения ассоциированного закона принимают вид

$$\sigma'_x\varepsilon_{xy} + \tau_{xy}\varepsilon_y + \tau_{xz}\varepsilon_{yz} = \varepsilon_x\tau_{xy} + \varepsilon_{xy}\sigma'_y + \varepsilon_{xz}\tau_{yz}$$
$$\tau_{xy}\varepsilon_{xz} + \sigma'_y\varepsilon_{yz} + \tau_{yz}\varepsilon_z = \varepsilon_{xy}\tau_{xz} + \varepsilon_y\tau_{yz} + \varepsilon_{yz}\sigma'_z \qquad (4.12)$$
$$\tau_{xz}\varepsilon_x + \tau_{yz}\varepsilon_{xy} + \sigma'_z\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xz}\sigma'_x + \varepsilon_{yz}\tau_{xy} + \varepsilon_z\tau_{xz}$$

Переходя в (4.12) от компонент девиатора к компонентам полных напряжений (4.1), получим, что соотношения (4.12) переходят в (3.16).

В случае, когда условие предельного состояния (4.7) (4.11) не зависит от величины σ:

$$F(s_1, s_2, s_3) = 0 \qquad (4.13)$$

согласно (4.9), имеет место условие несжимаемости

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \qquad (4,14)$$

Три уравнения равновесия, три уравнения (4.12), уравнение несжимаемости (4.14), условие предельного состояния (4.13) определяют систему восьми уравнений относительно девяти неизвестных. Для замыкания системы уравнений следует привлечь соотношения (4.9), (4.10), (2.1).

В случае, когда условие предельного состояния определяется соотношениями

$$F_1(s_1, s_2, s_3) = 0, \quad F_2(s_1, s_2, s_3) = 0 \tag{4.15}$$

система девяти уравнений: трех уравнений равновесия, двух условий пластичности (4.15), трех условий изотропии (4.12), условия несжимаемости (4.14), относительно девяти неизвестных: шести компонент напряжений σ_{ij} и трех компонент скорости перемещений u, v, w становится замкнутой.

Случай (4.15) рассмотрен в [1].

5. Рассмотрим случай полной пластичности

$$\sigma_1 = \sigma_2, \; \Sigma = \sigma_3 - \sigma_1 \tag{5.1}$$

Соотношения (2.11) согласно (5.1) примут вид

$$\begin{aligned} &\sigma_x = \sigma_1 + \Sigma n_1^2, \quad \tau_{xy} = \Sigma n_1 n_2 \\ &\sigma_y = \sigma_1 + \Sigma n_2^2, \quad \tau_{yz} = \Sigma n_2 n_3 \\ &\sigma_z = \sigma_1 + \Sigma n_3^2, \quad \tau_{xz} = \Sigma n_1 n_3 \end{aligned} \tag{5.2}$$

откуда

$$\sigma_1 = \sigma - \tfrac{1}{3}\Sigma \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} &(\sigma_x - \sigma + \tfrac{1}{3}\Sigma)(\sigma_y - \sigma + \tfrac{1}{3}\Sigma) = \tau_{xy}^2 \\ &(\sigma_y - \sigma + \tfrac{1}{3}\Sigma)(\sigma_z - \sigma + \tfrac{1}{3}\Sigma) = \tau_{yz}^2 \\ &(\sigma_z - \sigma + \tfrac{1}{3}\Sigma)(\sigma_x - \sigma + \tfrac{1}{3}\Sigma) = \tau_{xz}^2 \end{aligned} \tag{5.4}$$

а также

$$\begin{aligned} &(\sigma_x - \sigma + \tfrac{1}{3}\Sigma)\tau_{yz} = \tau_{xy}\tau_{xz} \\ &(\sigma_y - \sigma + \tfrac{1}{3}\Sigma)\tau_{xz} = \tau_{xy}\tau_{yz} \\ &(\sigma_z - \sigma + \tfrac{1}{3}\Sigma)\tau_{xy} = \tau_{xz}\tau_{yz} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Условие предельного состояния (3.4), согласно (4.2), примет вид

$$F(\sigma, \Sigma, n_1, n_2, n_3) = 0 \tag{5.6}$$

Выражение мощности рассеяния механической энергии, согласно (5.2), (5.3), запишем в виде

$$N = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = 3\sigma\varepsilon + \Sigma(\varepsilon_3 - \varepsilon) \tag{5.7}$$

Соотношения ассоциированного закона течения определяются из условия экстремума функционала

$$A = N - \lambda F - \mu(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1) \tag{5.8}$$

где μ – множитель Лагранжа.

Из (5.8), (5.7), (5.6) получим

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{3}\frac{\partial F}{\partial \sigma}, \quad \varepsilon_3 = \lambda\left(\frac{1}{3}\frac{\partial F}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \Sigma}\right) \tag{5.9}$$

$$\varepsilon_x n_1 + \varepsilon_{xy} n_2 + \varepsilon_{xz} n_3 = \frac{1}{\Sigma}\left[\frac{\lambda}{2}\frac{\partial F}{\partial n_1} n_1 + \mu n_1\right]$$

$$\varepsilon_{xy}n_1+\varepsilon_y n_2+\varepsilon_{yz}n_3=\frac{1}{\Sigma}\left[\frac{\lambda}{2}\frac{\partial F}{\partial n_2}n_2+\mu n_2\right] \tag{5.10}$$

$$\varepsilon_{xz}n_1+\varepsilon_{yz}n_2+\varepsilon_z n_3=\frac{1}{\Sigma}\left[\frac{\lambda}{2}\frac{\partial F}{\partial n_3}n_3+\mu n_3\right]$$

Из (5.10), (5.9) следует

$$\lambda\left(\frac{1}{3}\frac{\partial F}{\partial\sigma}+\frac{\partial F}{\partial\Sigma}\right)=\frac{1}{\Sigma}\left[\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial n_1}n_1+\frac{\partial F}{\partial n_2}n_2+\frac{\partial F}{\partial n_3}n_3\right)+\mu\right] \tag{5.11}$$

Соотношение (5.11) определяет множитель Лагранжа μ.

Соотношения (5.9), (5.10), (5.11) определяют искомые соотношения ассоциированного закона пластического течения.

Для изотропного материала величина F не зависит от n_i, выражения ассоциированного закона течения (5.9–5.11) принимают вид

$$\frac{1}{n_1}(\varepsilon_x n_1+\varepsilon_{xy}n_2+\varepsilon_{xz}n_3)=\frac{1}{n_2}(\varepsilon_{xy}n_1+\varepsilon_y n_2+\varepsilon_{yz}n_3)= \tag{5.12}$$

$$=\frac{1}{3}(\varepsilon_{xz}n_1+\varepsilon_{yz}n_2+\varepsilon_z n_3)=\lambda\left(\frac{1}{3}\frac{\partial F}{\partial\sigma}+\frac{\partial F}{\partial\Sigma}\right)$$

Из (5.12) следуют три соотношения, два из которых являются независимыми

$$\varepsilon_x n_1 n_2+\varepsilon_{xy}n_2^2+\varepsilon_{xz}n_2 n_3=\varepsilon_{xy}n_1^2+\varepsilon_y n_1 n_2+\varepsilon_{yz}n_1 n_3$$

$$\varepsilon_{xy}n_1 n_3+\varepsilon_y n_2 n_3+\varepsilon_{yz}n_3^2=\varepsilon_{xz}n_1 n_2+\varepsilon_{yz}n_2^2+\varepsilon_z n_2 n_3 \tag{5.13}$$

$$\varepsilon_{xz}n_1^2+\varepsilon_{yz}n_1 n_2+\varepsilon_z n_1 n_3=\varepsilon_x n_1 n_3+\varepsilon_{xy}n_2 n_3+\varepsilon_{xz}n_3^2$$

Если подставить в соотношение (5.13) выражения $n_i n_j$ согласно (5.2), то получим условие изотропии. Таким образом, в случае полной пластичности только два из них являются независимыми. Выражения (5.10), (5.13) не зависят от количества аналитических выражений условия пластичности (5.6) для изотропного тела.

6. Условия изотропии (1.21) имеют место для любого изотропного идеально пластического тела. В случае, когда условие пластичности выражается одной гладкой функцией текучести

$$F(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=0 \tag{6.1}$$

согласно ассоциированному закону пластического течения имеют место соотношения (3.6):

$$\varepsilon_1=\lambda\frac{\partial F}{\partial\sigma_1},\quad \varepsilon_2=\lambda\frac{\partial F}{\partial\sigma_2},\quad \varepsilon_3=\lambda\frac{\partial F}{\partial\sigma_3} \tag{6.2}$$

Условия (6.2) накладывают ограничения на характер пластического деформирования, определяемого условиями изотропии (1.21). Для несжимаемого материала из (1.11), (6.2) следует

$$\partial F/\partial\sigma_1+\partial F/\partial\sigma_2+\partial F/\partial\sigma_3=0 \tag{6.3}$$

Для пластического течения, согласно (6.2) имеет место

$$\frac{\varepsilon_1}{\partial F/\partial\sigma_1}=\frac{\varepsilon_2}{\partial F/\partial\sigma_2}=\frac{\varepsilon_3}{\partial F/\partial\sigma_3} \tag{6.4}$$

Например, для условия пластичности Мизеса

$$F(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=6\varkappa^2 \tag{6.5}$$

соотношения (6.2) принимают вид

$$\varepsilon_1=3\lambda(\sigma_1-\sigma),\ \ \varepsilon_2=3\lambda(\sigma_2-\sigma),\ \ \varepsilon_3=3\lambda(\sigma_3-\sigma) \tag{6.6}$$

Из соотношений (6.6), (2.5), (2.13) следуют соотношения ассоциированного закона течения Мизеса (1.10):

$$\varepsilon_x=3\lambda(\sigma_x-\sigma),\ \ \varepsilon_{xy}=3\lambda\tau_{xy}\ \ (xyz) \tag{6.7}$$

Случай определения условия пластичности в виде двух функций текучести:

$$F_1(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=0,\ \ F_2(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=0 \tag{6.8}$$

рассмотрен в работе [1]. В этом случае, соотношения, аналогичные (6.2) имеют вид

$$\varepsilon_1=\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial\sigma_1}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial\sigma_1},\ \ \varepsilon_2=\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial\sigma_2}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial\sigma_2},\ \ \varepsilon_3=\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial\sigma_3}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial\sigma_3} \tag{6.9}$$

Соотношения (6.9) определяют зависимость $\sigma-\varepsilon$, в случае, независимости функций F_1, F_2 от величины σ, согласно (4.9) имеет место условие несжимаемости $\varepsilon=0$. Два других соотношения:

$$\varepsilon_1-\varepsilon_2=\lambda_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial\sigma_1}-\frac{\partial F_1}{\partial\sigma_2}\right)+\lambda_2\left(\frac{\partial F_2}{\partial\sigma_1}-\frac{\partial F_2}{\partial\sigma_2}\right) \tag{6.10}$$

$$\varepsilon_2-\varepsilon_3=\lambda_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial\sigma_2}-\frac{\partial F_1}{\partial\sigma_3}\right)+\lambda_2\left(\frac{\partial F_2}{\partial\sigma_2}-\frac{\partial F_2}{\partial\sigma_3}\right)$$

служат для определения величин λ_1, λ_2 и не накладывают никаких ограничений на характер пластического течения, определяемого соотношениями изотропии (1.21), играющим роль соотношений обобщенного ассоциированного закона течения при условиях (6.8).

В случае условия полной пластичности (5.1)–(5.5) условие изотропии (1.21) имеет место, но среди трех условий (1.21) лишь два независимых.

7. Рассмотрим некоторые линеаризированные соотношения теории идеальной пластичности. Предположим, что исходное и деформированное состояние является однородным и изотропным

$$\sigma_1^0,\sigma_2^0,\sigma_3^0,\varepsilon_1^0,\varepsilon_2^0,\varepsilon_3^0-\mathrm{const} \tag{7.1}$$

Оси координат xyz направлены соответственно вдоль главных направлений 123:

$$\sigma_x^0=\sigma_1^0,\ \ \sigma_y^0=\sigma_2^0,\ \ \sigma_z^0=\sigma_3^0,\ \ \tau_{xy}^0=\tau_{yz}^0=\tau_{xz}^0=0 \tag{7.2}$$

$$\varepsilon_x^0=\varepsilon_1^0,\ \ \varepsilon_y^0=\varepsilon_2^0,\ \ \varepsilon_z^0=\varepsilon_3^0,\ \ \varepsilon_{xy}^0=\varepsilon_{yz}^0=\varepsilon_{xz}^0=0$$

Компоненты возмущенного состояния представим в виде

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^0+\sigma'_{ij},\ \ \varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^0+\varepsilon'_{ij},\ \ u_i=u_i^0+u'_i \tag{7.3}$$

Здесь, и в дальнейшем индекс штрих наверху приписан компонентам возмущения, не путать с индексом штрих наверху, приписанным компонентам девиатора.

Из (7.2), (7.3), (2.5), (2.11), (1.21) следует

$$\sigma'_x=\sigma'_1,\ \ \sigma'_y=\sigma'_2, \sigma'_z=\sigma'_3,\ \ \varepsilon'_x=\varepsilon'_1,\ \ \varepsilon'_y=\varepsilon'_2,\ \ \varepsilon'_z=\varepsilon'_3 \tag{7.4}$$

$$\tau'_{xy}=\frac{\sigma_1^0-\sigma_2^0}{\varepsilon_1^0-\varepsilon_2^0}\varepsilon'_{xy},\ \ \tau'_{yz}=\frac{\sigma_2^0-\sigma_3^0}{\varepsilon_2^0-\varepsilon_3^0}\varepsilon'_{yz},\ \ \tau'_{xz}=\frac{\sigma_1^0-\sigma_3^0}{\varepsilon_1^0-\varepsilon_3^0}\varepsilon'_{xz} \tag{7.5}$$

Согласно (7.5), для изотропного тела приращения главных касательных напряжений и скоростей сдвигов происходят пропорционально исходным главным касательным напряжениям и скоростям сдвигов.

Ленеаризированные уравнения теории идеальной пластичности позволяют выделить основные, характерные особенности процесса деформирования [2]. Рассмотрим грань условия пластичности Треска

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k, \sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \sigma_1 \tag{7.6}$$

Согласно ассоциированному закону течения (1.17), из (7.6) следует

$$\varepsilon_1 = \lambda, \quad \varepsilon_2 = -\lambda, \quad \varepsilon_3 = 0, \quad \lambda \geq 0 \tag{7.7}$$

Соотношения связи $\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}$ для грани условия пластичности Треска могут быть записаны в виде (1.18), можно предложить другую форму записи связи $\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}$ при условии пластичности (7.6). В данном случае имеют место восемь уравнений: три уравнения равновесия, условие пластичности (7.6) или (1.12), три соотношения изотропии (1.21) и условие несжимаемости (1.11) относительно девяти неизвестных σ_{ij}, u_i. Недостающее девятое соотношение следует из (7.7): третий инвариант скорости деформации равен нулю

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz} - \varepsilon_x\varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_y\varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_z\varepsilon_{xy}^2 = 0 \tag{7.8}$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned}
&\partial\sigma'_x/\partial x + \partial\tau'_{xy}/\partial y + \partial\tau'_{xz}/\partial z = 0\\
&\partial\tau'_{xy}/\partial x + \partial\sigma'_y/\partial y + \partial\tau'_{yz}/\partial z = 0\\
&\partial\tau'_{xz}/\partial x + \partial\tau'_{yz}/\partial y + \partial\sigma'_z/\partial z = 0
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Согласно (7.1)–(7.8) будем иметь

$$\sigma'_x = \sigma'_y \tag{7.10}$$

$$\tau'_{xy} = \frac{k}{\varepsilon_x^0}\varepsilon'_{xy}, \quad \tau'_{yz} = \frac{\sigma_z^0 - \sigma_y^0}{\varepsilon_x^0}\varepsilon'_{yz}, \quad \tau'_{xz} = \frac{\sigma_x^0 - \sigma_z^0}{\varepsilon_x^0}\varepsilon'_{xz} \tag{7.11}$$

$$\varepsilon'_x + \varepsilon'_y = 0, \quad \varepsilon'_z = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \tag{7.12}$$

Из (7.9)–(7.12) получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{k}{2\varepsilon_x^0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right) + \frac{\sigma_x^0 - \sigma_z^0}{2\varepsilon_x^0}\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} = 0\\
&\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{k}{2\varepsilon_x^0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right) + \frac{\sigma_z^0 - \sigma_y^0}{2\varepsilon_x^0}\frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} = 0\\
&\frac{\partial\sigma'_z}{\partial z} + \frac{\sigma_x^0 - \sigma_z^0}{2\varepsilon_x^0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}\right) + \frac{\sigma_z^0 - \sigma_y^0}{2\varepsilon_x^0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y}\right) = 0
\end{aligned} \tag{7.13}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad \xi = \sigma'_x = \sigma'_y \tag{7.14}$$

Условию несжимаемости (7.14) удовлетворим, полагая

$$u' = -\partial\Psi/\partial y, \quad v' = \partial\Psi/\partial x \tag{7.15}$$

Исключая переменную ξ из двух первых уравнений (7.13), используя (7.15), получим уравнение для определения функции Ψ:

$$\varkappa\Delta\Delta\Psi+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[(\sigma_z^0-\sigma_y^0)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+(\sigma_x^0-\sigma_z^0)\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right]=0 \tag{7.16}$$

$$\Delta=\partial^2/\partial x^2-\partial^2/\partial y^2$$

Отметим частный случай

$$\sigma_z^0=\tfrac{1}{2}(\sigma_x^0+\sigma_y^0) \tag{7.17}$$

Согласно (7.17), (7.6), уравнение (7.16) примет вид

$$\Delta\Delta\Psi+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right]=0 \tag{7.18}$$

Случай, когда функция Ψ не зависит от координаты z, соответствует случаю плоской деформации, рассмотренному в [4].

Рассмотрим ребро условия пластичности, образованное пересечением плоскостей

$$\sigma_1-\sigma_2=2k_1,\quad \sigma_1-\sigma_3=2k_2 \tag{7.19}$$

При $k_1=k$, $k_2=-k$ имеет место условие пластичности максимального приведенного напряжения [5].

Согласно (7.1)–(7.5) получим

$$\sigma_x'=\sigma_y'=\sigma_z'=\sigma' \tag{7.20}$$

Обозначая

$$\frac{\sigma_1^0-\sigma_2^0}{\varepsilon_1^0-\varepsilon_2^0}=a_{12},\quad \frac{\sigma_2^0-\sigma_3^0}{\varepsilon_2^0-\varepsilon_3^0}=a_{23},\quad \frac{\sigma_1^0-\sigma_3^0}{\varepsilon_1^0-\varepsilon_3^0}=a_{13} \tag{7.21}$$

согласно (7.20), (7.5), (7.21) получим систему четырех уравнений для определения четырех неизвестных σ', u', v', w':

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma'}{\partial x}+\frac{a_{12}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)+\frac{a_{13}}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u'}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial x}\right)=0\\
\frac{\partial\sigma'}{\partial y}+\frac{a_{12}}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)+\frac{a_{23}}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v'}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial y}\right)=0\\
\frac{\partial\sigma_z'}{\partial z}+\frac{a_{13}}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u'}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial x}\right)+\frac{a_{23}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v'}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial y}\right)=0\\
\partial u'/\partial x+\partial v'/\partial y+\partial w'/\partial z=0
\end{gathered} \tag{7.22}$$

В случае, когда имеет место условие полной пластичности (5.1) при условии $\sigma_1^0=\sigma_2^0$, согласно (7.5):

$$\tau_{xy}'=0 \tag{7.23}$$

Из (7.9), (7.20), (7.23) следует

$$\frac{\partial\sigma'}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xz}'}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\sigma'}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}'}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\sigma'}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}'}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}'}{\partial y}=0 \tag{7.24}$$

Полагая

$$\sigma' = -\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \tau'_{xz} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau'_{yz} = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{7.25}$$

из (7.24), (7.25) получим

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 - \partial^2 u / \partial z^2 = 0 \tag{7.26}$$

а также условие несжимаемости (1.11). В работе [1] указано на принципиальное различие характера пластического течения, определяемого соотношениями Леви – Мизеса (1.10) и соотношениями

$$\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} = \frac{2}{a_{13}} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} = \frac{2}{a_{23}} \frac{\partial u}{\partial y} \tag{7.27}$$

Из (7.27) и условия несжимаемости

$$\partial u' / \partial x + \partial v' / \partial y + \partial w' / \partial z = 0 \tag{7.28}$$

получим [10]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{2}{a_{13}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{a_{23}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{7.29}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости // Уч. зап. МГУ. Механика. 1946. Вып. 117. С. 90–108.
2. *Сен-Венан Б.* Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределом упругости. Теория пластичности, Сб. переводов. М.: Ил, 1948, с. 11–19.
3. *Леви М.* К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределом упругости. Теория пластичности, Сб. переводов. М.: Ил, 1948, с. 20–23.
4. *Мизес Р.* Механика твердых тел в пластически деформированном состоянии. Теория пластичности, Сб. переводов. М.: Ил, 1948, с. 57–69.
5. *Mises R.* Mechanic der plastischen Formanderung von Kristallen // ZAMM. 1928. Bd. 8. H. 3. P. 161–184.
6. *Reuss A.* Vereintachte Berechnung der plastischen Formanderungsgeschwindingkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungs-fliesbedingung // ZAMM. 1933. Bd. 13. P. 365.
7. *Койтер В.* Общие теоремы в теории упруго пластических сред. М.: Ил, 1961.
8. *Прагер В.* Теория пластичности: обзор новейших успехов. М.: Мир, 1969.
9. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
10. *Максимова Л.А.* О соотношениях общей плоской задачи теории идеальной пластичности // Изв. ИТАЧР. 1998. № 4. С. 16–27.

Москва,
Чебоксары

Поступила в редакцию
2.09.1999