МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1999

УДК 531.011

© 1999 г. В.И. МАТЮХИН

О РЕАЛИЗАЦИИ НЕГОЛОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ

Проблема реализуемости механических связей рассматривается как проблема существования таких условий, которые приводят к эффекту связи [1–4]. К эффекту связи может привести введение в систему, например, соответствующих (диссипативных) сил, которые называют реализующими. Эффект состоит в том, что движения такой системы оказываются близкими к движениям системы со связями – сходятся к ним при неограниченном росте коэффициента диссипации.

В работе построены реализующие силы, которые обеспечивают близость движений в ином смысле. Эти силы обеспечивают устойчивость таких движений, которые соответствуют движениям системы со связями.

Вопрос о реализации связей касается проблемы корректности моделей неголономных механических систем [1, 3]. Построение эквивалентных моделей для механических систем со связями открывает новые возможности в решении задач их динамики [2, 4].

1. Введение. Для описания динамики механических систем широко используются модели, содержащие связи, в том числе и неголономные[1]. Описание движений механических систем как систем со связями естественно, поскольку в ряде случаев соответствующая динамическая модель оказывается относительно простой. В частности, порядок системы может быть существенно снижен. Однако, с другой стороны, описания систем со связями (в форме уравнений Лагранжа, Аппеля, Воронца, Чаплыгина и т.д.) имеют свою специфику [1–8]. Они могут вызвать затруднения в решении конкретной задачи динамики. Располагая эквивалентным динамическим описанием исследуемой системы (с реализующими силами) можно эти затруднения преодолеть [2–4].

Некоторые системы со связями оказываются некорректными. Это имеет место в тех случаях, когда не удается построить силы, реализующие эти связи [1, 3]. Поэтому в качестве критерия корректности моделей механических систем со связями рассматриваются условия, при которых связи являются реализуемыми. Связь реализуема, когда для системы возможно построение эквивалентной динамической модели (без связей, с реализующими силами). Решению проблемы построения сил, реализующих неголономные связи механических систем, посвящена работа.

Основная особенность работы связана с понятием близости движений. Как уже говорилось выше, обычно близость движений понимается как сходимость движений системы с реализующими силами к движениям системы со связями [1–4]. В работе разыскиваются реализующие силы, которые обеспечивают близость движений в ином смысле. Эти силы должны обеспечить устойчивость любого движения системы с реализующими силами, которое соответствует движению системы со связями.

---

[1] Неголономными рассматривают такие распространенные системы как системы с качением (автомобиль, поезд, самолет на взлетном поле и т.д.), электромеханические системы со скользящими контактами, вопросы динамики этих систем интенсивно разрабатываются [1–5].

2. Постановка задачи. Рассматриваться далее будут две динамические модели механической системы – исходная и упрощенная. Упрощенной будем называть модель механической системы, явно содержащую связи. Исходной будем называть модель системы, где связи не учитываются, а вводятся соответствующие обобщенные силы – силы, реализующие связи.

В качестве исходной (полной, свободной) системы будем рассматривать систему уравнений Аппеля

$$\partial U / \partial \ddot{\pi}_s = \Pi_s + R_s \quad (s = \overline{1, m}) \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_{si}(q, t)\dot{q}_i + f_s(q, t) = \dot{\pi}_s \quad (s = \overline{1, m}) \tag{2.2}$$

В системе (2.1)–(2.2) используются общепринятые стандартные обозначения [1–8]. Через $q_1, \ldots, q_m$ в (2.1) обозначены обобщенные координаты механической системы; $\dot{\pi}_s (s = \overline{1, m})$ – квазискорости, которые задаются соотношениями (2.2). Формы (2.2) предполагаются линейно независимыми [1–8]:

$$\operatorname{rank} F = m, \quad F = \| f_{si} \|_{i,s=1}^{m} \tag{2.3}$$

откуда следует

$$\dot{q}_i = \sum_{s=1}^{m} b_{is}\dot{\pi}_s + b_i = \sum_{s=1}^{m} b_{is}(\dot{\pi}_s - f_s) \quad (i = \overline{1, m}) \tag{2.4}$$

$$FB = E, \quad B = \| b_{is} \|_{i=1,m}^{s=1,m} \tag{2.5}$$

где E – единичная матрица. Через $U = U(q, \dot{\pi}, \ddot{\pi}, t)$ в (2.1) обозначена функция ускорения механической системы; $\Pi_s(q, \dot{\pi}, t) + R_s$ $(s = \overline{1, m})$ – обобщенные силы, отвечающие квазикоординатам π_s $(s = \overline{1, m})$. Силы R_s далее будут играть роль сил, которые должны обеспечить реализацию неголономных связей[2].

Для описания движений упрощенной системы (со связями) используем аналогичную систему уравнений Аппеля [1–8]:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \ddot{\varphi}_s} = \tilde{\Pi}_s(q, \dot{\varphi}, t) \quad (s = \overline{1, n}) \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_{si}(q,t)\dot{q}_i + f_s(q,t) = \dot{\varphi}_s \quad (s = \overline{1, n}) \tag{2.7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_{si}(q,t)\dot{q}_i + f_s(q,t) = 0 \quad (s = \overline{n+1, m}) \tag{2.8}$$

где соотношения (2.8) задают $g = m - n$ неголономных связей системы.

Задача состоит в том, чтобы найти такие условия, и, в частности, построить такие силы вида $R_s = R_s(q, \dot{\psi}, t)$, при которых любое движение $(q, \dot{\varphi})$ упрощенной системы (2.6) соответствовало бы устойчивому движению $(q, \dot{\varphi}, 0)$ исходной системы (2.1), где $(q, \dot{\varphi}, \dot{\psi}) = (q, \dot{\pi})$.

3. Множество движений упрощенной системы. Множество таких движений обозначим через ϕ. Для описания этого множества уравнения (2.6) запишем в следующей

[2] В качестве примера системы (2.1), (2.2) можно иметь в виду механическую систему с качением (многозвенную подвеску пневматика) [1]. Или – систему, содержащую управляемую оснастку режущего инструмента, или – манипулятор со специальным обрабатывающим устройством.

развернутой форме [1–8]:

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{u}_{sj}(q,t)\ddot{\varphi}_j = \tilde{\Pi}_s(q,\dot{\varphi},t) + \tilde{S}_s(q,\dot{\varphi},t) \quad (s=\overline{1,n}) \tag{3.1}$$

$$\tilde{u} = \| \tilde{u}_{sj}(q,t) \|_{s,j=1}^{n} = \left\| \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial\ddot{\pi}_s \partial\ddot{\pi}_j} \right\|_{s,j=1}^{n}$$

Функции $\tilde{S}_s = \tilde{S}_s(q,\dot{\varphi},t)$ строятся из выражения для $\partial\tilde{U}/\partial\ddot{\pi}_s$ в (2.6).

Для определенности будем полагать, что к множеству ϕ относятся любые решения $(q(t),\ \dot{\varphi}(t))$ системы (2.6)–(2.8), которые начинаются при некотором $t = t^0$, с начальными условиями из некоторой допустимой области

$$|q_s(t^0)| \leqslant d \quad (s=\overline{1,m}), \quad |\dot{\varphi}_s(t^0)| \leqslant d \quad (s=\overline{1,n}), \quad d = \text{const} > 0 \tag{3.2}$$

Введем также формальные предположения, которые будут использоваться в доказательстве утверждений ниже

$$|q_s(t)| \leqslant D \quad (s=\overline{1,m}), \quad |\dot{\varphi}_s(t)| \leqslant D \quad (s=\overline{1,n}), \quad t \geqslant t^0, \quad (q(t),\dot{\varphi}(t)) \in \phi \tag{3.3}$$

$$|\tilde{u}_{is}(q;t)| \leqslant D, \quad |\tilde{S}_s(q,\dot{\pi},t)| \leqslant D, \ldots \quad (i,s=\overline{1,m}) \tag{3.4}$$

Будем полагать, что (3.4) выполнено для всех функций $\tilde{u}_{is}(q,t)$, $\tilde{S}_s(q,\dot{\varphi},t)$, $u_{is}(q,t)$, $S_s(q,\dot{\pi},t)$, $f_{is}(q,t)$, $f_i(q,t)$, $b_{is}(q,t)$, $b_i(q,t)$ $(i,s=\overline{1,m})$ и их производных, число D может быть достаточно велико.

Согласно постановке задачи далее будем рассматривать соответствующие движения исходной системы. Движению $(q,\ \dot{\varphi})$ упрощенной системы (2.6)–(2.8) отвечает движение исходной системы (2.1), (2.2) вида $(q,\ \dot{\varphi},\ 0)$. Введем множество таких движений

$$\Phi = [(q,\dot{\varphi},0) : (q,\dot{\varphi}) \in \phi] \tag{3.5}$$

Найдем далее условия, при которых $(q,\ \dot{\varphi},0) \in \Phi$ является движением исходной системы.

4. Движения исходной системы. С этой целью исходную систему (2.1) запишем в форме (3.1):

$$\sum_{j=1}^{m} u_{sj}\ddot{\pi}_j = \Pi_s + S_s + R_s \quad (s=\overline{1,m}) \tag{4.1}$$

или

$$L_s = 0, \quad L_s(q,\dot{\varphi},\dot{\psi},\ddot{\varphi},\ddot{\psi},t) = \sum_{j=1}^{m} u_{sj}\ddot{\pi}_j - \Pi_s - S_s - R_s \quad (s=\overline{1,m}) \tag{4.2}$$

где матрица u в (4.1) положительно определена [9–13]:

$$G = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{m} u_{ik}(q,t)\varkappa_i\varkappa_k, \quad \rho_1^2 |\varkappa|^2 \leqslant G \leqslant \rho_2^2 |\varkappa|^2, \quad |\varkappa|^2 = \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i^2 \tag{4.3}$$

Здесь $\rho_i = \text{const}$, неравенство $0 < \rho_1 \leqslant \rho_2 < \infty$, следует из (3.4).

На движениях вида $(q,\ \dot{\varphi},\ 0)$ исходная система (4.1) примет вид

$$\sum_{j=1}^{n} u_{sj}\ddot{\varphi}_j = \Pi_s(q,\dot{\varphi},0,t) + S_s(q,\dot{\varphi},0,t) + R_s^0 \quad (s=\overline{1,m}) \tag{4.4}$$

$$R_s^0(q,\dot{\varphi},t) = R_s(q,\dot{\varphi},\dot{\psi},t)|_{\dot{\psi}=0} \tag{4.5}$$

Возникает вопрос, удовлетворяют ли движения (q, $\dot{\varphi}$, 0) из множества Ф соотношениям (4.4)? Т.е. соответствуют ли движения упрощенной системы (2.6) со связями невозмущенным движениям исходной системы (2.1) с реализующими силами?

Лемма. Движение (q, $\dot{\varphi}$, 0) ∈ Ф удовлетворяет (4.4), если

$$R_i(q,\dot{\varphi},\dot{\psi},t)\,|_{\dot{\psi}=0} = r_i(q,\dot{\varphi},t) \quad (i=\overline{1,m}) \tag{4.6}$$

где через $r_i(q, \dot{\varphi}, t)$ обозначены реакции связей $\dot{\psi}_i = 0$ $(i = \overline{n+1,m})$.

Лемма имеет естественный механический смысл: на движении (q, $\dot{\varphi}$, 0) ∈ Ф исходной системы значения реализующих сил $R_i(q, \dot{\varphi},\dot{\psi},t)\,|_{\dot{\psi}=0}$ должны совпадать с реакциями $r_i(q, \dot{\varphi}, t)$ связей $\dot{\psi}=0$ упрощенной системы[3]. В этом случае (q, $\dot{\varphi}$, 0) является движением исходной системы (и не является в противном случае). Необходимо таким образом построить такие функции $R_i(q, \dot{\pi}, t)$, которые удовлетворяли бы условию (4.6) леммы для движений (q, $\dot{\varphi}$, 0) ∈ Ф и обеспечивали устойчивость этих движений.

Для доказательства леммы введем некоторые функции $r_i = r_i(q, \dot{\varphi}, t)$ из условий

$$\sum_{j=1}^{n} u_{sj}\ddot{\varphi}_j = \Pi_s(q,\dot{\varphi},0,t) + S_s(q,\dot{\varphi},0,t) + r_i(q,\dot{\varphi},t) \quad (s=\overline{1,m}) \tag{4.7}$$

где учтем соотношения (4.4). Пусть на рассматриваемую механическую систему наложены связи $\dot{\psi}_i = 0$ $(i = \overline{n+1,m})$. Тогда в рамках аналитической механики введенные функции r_i описывают реакции, отвечающие этим связям [6–8]. В этом смысле соотношения (4.4) оказываются эквивалентными условию (4.6) леммы.

Заметим, что явное выражение для реакций r_i $(i = \overline{1,n})$ задают соотношения (4.4), записанные в виде

$$r_i(q,\dot{\varphi},t) = 0 \quad (i=\overline{1,n}) \tag{4.8}$$

$$r_i(q,\dot{\varphi},t) = \sum_{j=1}^{n} u_{sj}\ddot{\varphi}_j(q,\dot{\varphi},t) - \Pi_s(q,\dot{\varphi},0,t) - S_s(q,\dot{\varphi},0,t) \quad (\overline{n+1,m}) \tag{4.9}$$

Предполагается, что в (4.9) величины $\ddot{\varphi}_j$ имеют вид

$$\ddot{\varphi}_j = \sum_{j=1}^{n} u_{sj}^{-1}[\Pi_s(q,\dot{\varphi},0,t) + S_s(q,\dot{\varphi},0,t)] \quad (s=\overline{1,n}) \tag{4.10}$$

Соотношения (4.10) следуют из равенств (4.8) и соотношений $i = \overline{1,n}$ (4.7)

$$\sum_{j=1}^{n} u_{sj}\ddot{\varphi}_j = \Pi_s(q,\dot{\varphi},0,t) + S_s(q,\dot{\varphi},0,t) \quad (s=\overline{1,n}) \tag{4.11}$$

где учитываются также соотношения (4.3).

С учетом (4.8) будем далее полагать, что

$$R_i^0 = R_i = 0 \quad (i=\overline{1,n}) \tag{4.12}$$

Тогда из условия (4.6) леммы будут выполнены соотношения (4.4), т.е. (q, $\dot{\varphi}$, 0) ∈ Ф будет движением исходной системы (4.1).

Заметим далее, что соотношения (4.11) совпадают с уравнениями (3.1). Совпадение

---

[3] Заметим, что при $R_i = r_i$ движение в исходной системе будет осуществляться в силу связей $\dot{\psi}_i = 0 (i = \overline{n+1,m})$, если только $\dot{\psi}_i(t^0) = 0$ $(i = \overline{n+1,m})$. В отличие от этого реализующие силы R_i должны обеспечить движение в силу связей и при наличии начальных отклонений.

следует из равенств

$$\tilde{u}_{ik}(q,t) = u_{ik}(q,t), \quad \tilde{\Pi}_i(q,\dot{\varphi},t) = \Pi_i(q,\dot{\varphi},0,t), \ldots \quad (i,k = \overline{1,n}) \tag{4.13}$$

для функций из соотношений (4.11) и (3.1). Равенства (4.13) вытекают из способа построения обобщённых сил и энергии ускорений механических систем [6–8]. При этом необходимо учесть, что системы уравнений (3.1) и (4.11) описывают движения по существу одной и той же механической системы П.2. Обобщенные координаты q_i ($i = \overline{1,m}$) систем (3.1) и (4.11) совпадают. Отличие состоит только в том, что $\dot{\pi}_i$ ($i = \overline{n+1,m}$) в (4.11) рассматриваются как квазискорости со значениями $\dot{\pi}_i = 0$ ($i = \overline{n+1,m}$). В системе (3.1) вместо этого введены механические связи (2.8) вида $\dot{\psi}_i = 0$ ($i = \overline{n+1,m}$). Лемма доказана.

5. Построение реализующих сил в классе линейных. Исследуем сначала возможность решения поставленной задачи в рамках линейных зависимостей

$$R_i = -k_i\dot{\psi}_i \quad (i = \overline{n+1,m}), \quad k_i = \mathrm{const} > 0 \tag{5.1}$$

Система (3.1) при учете (5.1) примет вид

$$L_i = 0 \quad (i = \overline{1,n}), \quad L_i = -k_i\dot{\psi}_i \quad (i = \overline{n+1,m}) \tag{5.2}$$

Теорема 1. Пусть для движения (q, $\dot{\varphi}$, 0) системы (5.2) выполнено условие (4.6) и справедливы неравенства

$$k_i \geqslant K \quad (i = \overline{n+1,m}), \quad K = \mathrm{const} > 0 \tag{5.3}$$

Тогда (q, $\dot{\varphi}$, 0) будет экспоненциально устойчивым движением системы (5.2) по переменным[4] $\dot{\psi}_i$ ($i = \overline{n+1,m}$).

В доказательстве теоремы 1 устанавливается основной факт – движение системы (5.2) в режиме

$$\dot{\psi}_i = 0 \quad (i = \overline{n+1,m}) \tag{5.4}$$

Доказательство теоремы 1 следует схемам [9–13]. Основные моменты доказательства состоят в следующем. Для обоснования (5.4) используется функция Ляпунова $G = G(q, \varkappa, t)$ из (4.3), где величины $\varkappa_k$ заданы соотношениями

$$\varkappa_i = 0 \quad (i = \overline{1,n}), \quad \varkappa_i = \dot{\psi}_i \quad (i = \overline{n+1,m}) \tag{5.5}$$

Из равенства $G = 0$ при учете неравенств (4.3), непосредственно вытекают равенства $\varkappa_i = 0$ ($i = \overline{1,m}$), т.е. соотношения (5.4).

Для обоснования равенства $G = 0$ строится производная функции Ляпунова G в силу системы (5.2)

$$\dot{G} = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{m} \dot{u}_{ik}\varkappa_i\varkappa_k + \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i[\Pi_i(q,\dot{\varphi},\dot{\psi},t) + S_i(q,\dot{\varphi},\dot{\psi},t) - k_i\varkappa_i] = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{m} \dot{u}_{ik}\varkappa_i\varkappa_k + \tag{5.6}$$

$$+\sum_{i=1}^{m} \varkappa_i[\Pi_i(q,\dot{\varphi},\dot{\psi},t) - \Pi_i(q,\dot{\varphi},0,t) + S_i(q,\dot{\varphi},\dot{\psi},t) - S_i(q,\dot{\varphi},0,t) - k_i\varkappa_i]$$

---

[4] Имеется в виду следующее свойство системы (5.2): $\forall\varepsilon\exists\delta$, что неравенства $|\dot{\psi}_i(t)| \leqslant \varepsilon$ ($i = \overline{n+1,m}$) следуют из неравенств $|\dot{\psi}_i(t^0)| \leqslant \varepsilon$ ($i = \overline{n+1,m}$) и включения $\varphi(t) \in \tilde{\Phi}$, где $\tilde{\Phi}$ – некоторое заданное множество функций $\varphi(t)$. В теореме в качестве $\tilde{\Phi}$ рассматривается подмножество множества Φ, которое отвечает условию (4.6). Указанное свойство аналогично устойчивости по части переменных (Румянцев В.В., 1957), а также устойчивости инвариантных множеств (Зубов В.И., 1957).

С учетом (3.4) правая часть (5.6) мажорируется и строится оценка для $\dot{G}$ [9–13]:

$$\dot{G} \leqslant (A - k/\rho_2)G + BG\sqrt{G}, \quad k = \min(k_i) \tag{5.7}$$

где $A \geqslant 0, B \geqslant 0$ константы, существующие из (3.4), ρ_2 из (4.3).

Из анализа неравенства (5.7) устанавливается, что его решение $G(t) = 0$ является экспоненциально устойчивым, если справедливо неравенство (5.3) вида

$$A < k/\rho_2 \tag{5.8}$$

При учете (3.2) отсюда вытекает, что система (5.2) выходит на режим (5.4), что утверждается в теореме 1.

Заметим, что условие (4.6) для системы (5.2) имеет вид

$$r_i(q, \dot{\varphi}, t) = 0 \quad (i = \overline{1,m}) \tag{5.9}$$

поскольку для $R_i = -k_i\dot{\psi}_i$ из (5.1) верно $R_i|_{\dot{\psi}=0} = 0$. Это значит, что при соответствующем движении упрощенной системы реакции r_i ее связей $\dot{\psi}_i = 0$ должны быть равными нулю. Условие (5.9) является достаточно сильным и может быть выполнено только для некоторых движений из Ф. Таким образом в рамках линейных зависимостей решение поставленной задачи не достигается. В связи с этим далее решение задачи исследуется в нелинейном классе обобщенных сил, реализующих неголономные связи.

6. Нелинейные реализующие силы. Рассмотрим снова систему (5.2), в которой будем полагать, что коэффициенты k_i могут быть достаточно большими. Таким образом речь идет о выполнении соотношений связи $\dot{\psi}_i = 0$ на движениях системы (5.2) при $k_i \to \infty$.

В такой постановке задача непосредственно примыкает к классу задач, связанных с вопросом о реализуемости связей механических систем [1–4]. Задача сводится к исследованию движения $(q^k(t), \dot{\varphi}^k(t), \dot{\psi}^k(t))$ системы (5.2), отвечающего параметрам k_i. Связь считается реализуемой, если выполнено условие сходимости

$$(q^k(t), \dot{\varphi}^k(t), \dot{\psi}^k(t)) \to (q(t), \dot{\varphi}(t), 0), \quad k_i \to \infty \tag{6.1}$$

где $(q(t), \dot{\varphi}(t))$ удовлетворяет упрощенной системе (3.1).

Заметим, что при $k_i \to \infty$ силы $R_i = -k_i\dot{\psi}_i$ в системе (5.2) могут принимать достаточно большие по модулю значения (даже при малых $\dot{\psi}_i$). При этом реакции будут иметь только ограниченные значения

$$r_i(q, \dot{\varphi}, t) = 0 \quad (i = \overline{1,n}), \quad |r_i(q, \dot{\varphi}, t)| \leqslant r^i \quad (i = \overline{n+1,m}) \tag{6.2}$$

где $r^i = \text{const} < \infty$ из условий (3.3), (3.4).

В связи с этим естественно далее рассмотреть решение задачи в классе ограниченных реализующих сил механической системы. Для этого введем соответствующую область допустимых сил, например, вида

$$R_i = 0 \quad (i = \overline{1,n}), \quad |R_i| \leqslant R^i, \quad R^i = r^i + \eta \quad (i = \overline{n+1,m}) \tag{6.3}$$

где число $\eta > 0$ может быть достаточно мало.

В рассматриваемом классе (6.3) ограниченных реализующих сил соотношения (5.1) при $k_i \to \infty$ примут вид

$$R_i = -R^i \operatorname{sign}(\dot{\psi}_i) \quad (i = \overline{n+1,m}) \tag{6.4}$$

где $\operatorname{sign}(x)$ – разрывная функция при $x = 0$ [14–15], а система (5.2) перейдет в систему

$$L_i = 0 \quad (i = \overline{1,n}), \quad L_i = -R^i \operatorname{sign}(\dot{\psi}_i) \quad (i = \overline{n+1,m}) \tag{6.5}$$

Теорема 2. Любое движение системы (6.5) из Φ будет экспоненциально устойчивым по переменным $\dot\psi_i \quad (i=\overline{n+1,m})$.

Доказательство теоремы 2 следует схемам [9–13] и доказательству теоремы 1. Однако в этом случае вместо (5.7) справедливо неравенство

$$\dot G \leqslant \sqrt{G}[A\sqrt{G}+BG-\eta/\rho_2] \tag{6.6}$$

где число η из (6.3). Решение $G(t)=0$ неравенства (6.6) является сильно асимптотически устойчивым [11]. Это означает, что $G(t)=0$, $t\geqslant t_1$, где t_1 – некоторый конечный интервал времени. При учете (4.3) отсюда вытекает, что система (6.5) выходит на режим (5.4) при $t\geqslant t_1$, отсюда следует теорема 2.

Существенное усиление утверждения теоремы 2 по сравнению с теоремой 1 связано с тем, что в ней устойчивость обосновывается не для некоторых, а для любых движений из Φ, т.е. для (6.5) лемма справедлива $\forall(q,\dot\varphi,0)\in\Phi$.

Действительно, всевозможные движения вида $(q,\dot\varphi,0)$ системы (6.5) описываются соотношениями (4.4), (4.12) вида

$$L_i\equiv 0 \;\; (i=\overline{1,n}), \qquad |L_i|\leqslant R^i \quad (i=\overline{n+1,m}) \tag{6.7}$$

В (6.7) учитывается, что

$$R_i\big|_{\dot\psi=0} = -R^i\,\mathrm{sign}(\dot\psi_i)\big|_{\dot\psi=0}\in[-R^i,+R^i] \quad (i=\overline{n+1,m}) \tag{6.8}$$

А для $(q,\dot\varphi,0)\in\Phi$ справедливы неравенства (6.7) вида

$$L_i\equiv 0 \;\; (i=\overline{1,n}), \qquad |L_i|\leqslant R^i-\eta \;\; (i=\overline{n+1,m}) \tag{6.9}$$

которые следуют из (4.6) вида $R_i^0=r_i$ и (6.2) вида $r_i\leqslant R^i-\eta$.

7. Заключение. Таким образом согласно теореме 2 выбор сил R_i в форме (6.4) позволяет решить поставленную задачу. Эта задача связана с построением эквивалентного динамического описания (6.5) для механической системы со связями (2.6). Описание может быть использовано для исследования динамики механической системы, например, так, как это сделано в [2].

Теорема 2 может быть также использована для решения проблемы корректности описания динамики механической системы в форме (2.6)–(2.8), т.е. как системы со связями (2.8). Именно, следуя [1–3], соотношение (2.8) будем рассматривать как механическую связь, если существуют реальные силы, которые могут обеспечить движение механической системы в силу (2.8). Т.е. реализующие силы должны рассматриваться как приближенные описания (макроописания, обобщенные описания) реальных контактных сил, которые возникают между элементами механической системы при ее движении в соответствии с соотношениями связей.

В связи с этим отметим некоторые свойства введенных сил R_i, которые являются необходимыми. Именно, введенные силы (6.4) $R_i=-R^i\,\mathrm{sign}(\dot\psi_i)$ $(i=\overline{n+1,m})$ можно рассматривать как аналог диссипативных сил Релея [6–8]. Для этого силы (6.4) записываются в форме

$$-R^i\,\mathrm{sign}(\dot\psi_i)=-\partial\theta/\partial\dot\psi_i \quad (i=\overline{n+1,m}) \tag{7.1}$$

где функция Релея имеет вид

$$\theta=\sum_{i=n+1}^{m} R^i\,|\dot\psi_i| \tag{7.2}$$

Силы (7.1) являются разрывными, поэтому их можно также рассматривать аналогами сил кулоновского (сухого) трения.

Заметим далее, что совсем не обязательно, что реализующие силы должны иметь достаточно специальную форму (6.4). Можно показать, что к эффекту связи могут приводить реализующие силы общего вида. Именно, теорема 2 будет справедлива в случае, когда вместо (6.4) реализующие силы R_i имеют следующий общий вид

$$R_i = \tilde{R}_i(\dot{\psi}_i) \quad (i = \overline{n+1, m}) \tag{7.3}$$

Если отклонения $Z_i(\dot{\psi}_i) = -R^i \operatorname{sign}(\dot{\psi}_i) - \tilde{R}_i(\dot{\psi}_i)$ не нулевые $Z_i(\dot{\psi}_i) \neq 0$, то в общем случае экспоненциальная устойчивость (теорема 2) уже не будет иметь места. Однако, будет (простая) устойчивость по Ляпунову, если отклонения $Z_i(\dot{\psi}_i)$ достаточно малы в смысле выполнения соотношений

$$N \leqslant \delta, \quad N = \sum_{i=n+1}^{m} Z_i(\dot{\psi}_i)\dot{\psi}_i \tag{7.4}$$

где число $\delta > 0$ достаточно мало [12, 13]. Величина N имеет смысл мощности сил отклонений Z_i, а неравенство $N \leqslant \delta$ выражает условие ограниченности сил $Z_i = R_i - \tilde{R}_i$ по мощности.

Условие (7.4) является достаточно слабым. В частности, (7.4) допускает гладкую зависимость $\tilde{R}_i$ от $\dot{\psi}_i$ и позволяет отказаться, например, от сильного предположения о разрывном характере реализующих сил в (6.4)[5].

Заметим также, что силы (6.4) являются ограниченными, их значения (в определенном смысле) совпадают с реакциями, если система движется в силу соотношений связи, по размаху силы по существу совпадают с реакциями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97-01-0039).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
2. *Карапетян А.В.* О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 42–51.
3. *Козлов В.В.* Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 3. С. 550–554.
4. *Бэйо Е., Серна М.А.* Методы штрафных функций в динамическом анализе механизмов с упругими звеньями // Современное машиностроение. Сер. Б. 1990. № 4. С. 79–87.
5. *Карапетян А.В., Румянцева В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техн. Сер. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 6. 128 с.
6. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1, 2. М.: Физматгиз, 1960. 515 с.
7. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М: Физматгиз. 1960. 296 с.
8. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз. 1961. 824 с.
9. *Матюхин В.И., Пятницкий Е.С.* Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 67–81.

---

[5] В форме (7.3) могут быть описаны различные возможные и неучтенные в (6.4) динамические факторы реального процесса взаимодействия в точке контакта тел механической системы: запаздывание, гистерезис, люфт, инерционность [1]. Условие (7.4) выражает слабость влияния указанных факторов. В частности, (7.4) будет выполнено, если влияние исчезает через достаточно малый интервал времени (например, если имеет место только малая инерционность процесса взаимодействия или запаздывание мало) [12, 13]. Это налагает только нестеснительные условия на организацию сил, реализующих механические связи, что указывает на нелокальность (грубость) утверждения теоремы 2.

10. *Матюхин В.И.* Устойчивость движения манипуляционных роботов в режиме декомпозиции // Автоматика и телемеханика. 1989. № 3. С. 33–44.
11. *Матюхин В.И.* Сильная устойчивость движений механических систем. // Автоматика и телемеханика. 1996. № 1. С. 37–56.
12. *Матюхин В.И.* Устойчивость движений механических систем при учете постоянно действующих возмущений // Автоматика и телемеханика. 1993. № 11. С. 124–134.
13. *Матюхин В.И.* Устойчивость движений манипулятора при учете слабой динамики управляющих устройств // Автоматика и телемеханика. 1996. № 4. С. 24–38.
14. *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 368 с.
15. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

Москва

Поступила в редакцию 24.07.1997