МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1999

УДК 539.3

© 1999 г. А.Г. БАГДОЕВ, А.В. ШЕКОЯН

МОДУЛЯЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН

На основе исследования на поперечную устойчивость нелинейного уравнения Шредингера для магнитоупругой среды с диссипацией и дисперсией показано, что квазиплоские и точечные волны устойчивы в поперечном направлении в случае быстрых волн и неустойчивы для вогнутых частей медленных точечных волн в случае не очень малых амплитуд.

На основании соотношений работ [1–4] в [5] выведены нелинейные эволюционные уравнения для вязкотермомагнитоупругой среды. Следует отметить, что в указанных уравнениях нелинейный коэффициент содержит неточность, поэтому в настоящей статье ставится задача вывода эволюционных уравнений для вязкомагнитоупругой среды с дисперсией, что не учтено в монографии [5]. Кроме того, в [5] получено условие устойчивости волн модуляции. В [6–8] изучены формы точечных магнитоупругих и анизотропных упругих волн и показано, что при определенных условиях медленная волна имеет угловые точки и вогнутые участки. В [9] для задачи магнитной газодинамики получено уравнение Шредингера и найдены условия модуляционной устойчивости, однако до конца не проведен анализ устойчивости точечных и квазиплоских волн.

В [10, 11] выведены вариационным методом уравнения модуляции для однородной и неоднородной среды без уточнения слагаемого с лучевым решением.

В публикуемой статье ставится задача методом, отличающимся от методов, использованных в [6–8], исследовать формы точечных волн и соответствующих их огибающих или квазиплоских волн. Затем предполагается получить уравнение Шредингера для вязкомагнитоупругой среды с дисперсией, найти и исследовать условия модуляционной поперечной устойчивости волн. Кроме того, следует изучить поперечную устойчивость волн модуляции в произвольной неоднородной среде, где в отличие от [10, 11] включено лучевое решение и учтены дифракционные слагаемые.

1. Постановка задачи. Рассматривается бесконечная неоднородная вязкомагнитоупругая среда с дисперсией, в которой распространяются точечные или квазиплоские слабые нелинейные волны. В среде есть начальное неоднородное произвольно направленное магнитное поле.

Уравнения движения среды в лагранжевых координатах x_k имеют вид

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial X_k} + \frac{\partial \sigma_{ik}^{(b)}}{\partial x_k} + \frac{\partial \sigma_{ik}^{(g)}}{\partial x_k} \tag{1.1}$$

$$\Pi_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik} \right) \tag{1.2}$$

где ρ – текущая, ρ_0 – начальная плотности, v_i – компоненты вектора скорости частицы, σ_{ik} – тензор лагранжевых нелинейно-упругих напряжений, Π_{ik} – тензор Максвелла,

H_i – компоненты магнитного поля, $X_k = x_k + u_k$ – эйлеровы координаты, u_k – перемещения, причем имеет место $\partial/\partial X_k = \partial/\partial x_k - (\partial u_i/\partial x_k)\,(\partial/\partial x_i)$, $v_i = \partial u_i/\partial t$.

Компонента тензоров вязких и дисперсионных напряжений [2]:

$$\sigma_{ik}^{(b)} = \lambda^{(1)}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik} + \lambda^{(0)}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \tag{1.3}$$

$$\sigma_{ik}^{(g)} = \zeta^{(1)}\frac{\partial^2 v_l}{\partial t\partial x_l}\delta_{ik} + \zeta^{(0)}\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k\partial t} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i\partial t}\right)$$

Нелинейный тензор упругих напряжений $\sigma_{ik}^{(H)}$ найдется по [3]. Тогда полный тензор упругих напряжений будет иметь вид

$$\sigma_{ik} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\delta_{ik} + \sigma_{ik}^{(H)} \tag{1.4}$$

где μ, K – линейные упругие модули.

Полагая $H_i = H_i^0 + h_i$, где H_i^0 есть невозмущенное магнитное поле, можно из (1.1)–(1.4) получить уравнения движения

$$\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} - (\lambda_0 + \mu)\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_l\partial x_i} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial(H_i^0 h_k + H_k^0 h_i - H_l^0 h_l\delta_{ik})}{\partial x_k} - \\
&-\mu\Delta u_i = F + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}\right)(H_i^0 h_k + \\
&+H_k^0 h_i - H_l^0 h_l\delta_{ik}) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial(h_k h_i - \tfrac{1}{2}h_l^2\delta_{ik})}{\partial x_k} + \lambda^{(0)}\Delta v_i + \\
&+(\lambda^{(1)} + \lambda^{(0)})\frac{\partial^2 v_l}{\partial x_i\partial x_l} + (\zeta^{(1)} + \zeta^{(0)})\frac{\partial^3 v_l}{\partial x_i\partial x_l\partial t} + \\
&+\zeta^{(0)}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta v_i), \quad \lambda_0 = K - \frac{2}{3}\mu
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где функция $F_i = \partial\sigma_{ik}^{(H)}/\partial x_k$ имеет вид [3] (A, B, C – нелинейные модули упругости):

$$\begin{aligned}
F_i = &\left(\mu + \frac{1}{4}A\right)\left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k^2}\frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k^2}\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + 2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) + \\
&+\left(K + \frac{1}{3}\mu + \frac{1}{4}A + B\right)\left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right) + \\
&+\left(K - \frac{2}{3}\mu + B\right)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}\frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \left(B + \frac{A}{4}\right)\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \right. \\
&\left.+\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right) + (B + 2C)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Кроме уравнения движения (1.5) имеется уравнение индукции магнитного поля, которое в переменных Лагранжа записывается в виде [4,5]:

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = H_k \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} - H_i \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l} - H_k \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_l} +$$

$$+ H_i \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_l} + \zeta_1 \Delta h_i \tag{1.7}$$

где $\zeta_1 = c^2(4\pi\sigma)^{-1}$, с – скорость света, σ – проводимость.

Коэффициенты $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \zeta_1$ предполагаются малыми порядков $\varepsilon^2, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^3, \varepsilon^2$, где ε – порядок скорости частиц υ_x [5].

Обозначая через $f(x_k t) = 0$ уравнение поверхности волны, $\lambda = -\partial f/\partial t$ – нормальную скорость волны в лагранжевых координатах, $n_k = \partial f/\partial x_k$ – единичный вектор нормали к волне, можно показать, что в первом порядке λ совпадает с нормальной скоростью волны в эйлеровых координатах. Вблизи волны можно получить [5] в главных порядках малости

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial u_i}{\partial f}\lambda, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = n_k \frac{\partial u_i}{\partial f} \tag{1.8}$$

откуда будем иметь

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{n_k}{\lambda}\upsilon_i, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = -\frac{\upsilon_n}{\lambda}, \; \upsilon_n = \upsilon_k n_k \tag{1.9}$$

2. Конкретизация нормальной скорости нелинейной волны для магнитоупругой среды. В дальнейшем принято $x_1 = x,\ x_3 = y,\ x_2 = z$. Удобно выбрать плоскость (x, y), проходящую через невозмущенное магнитное поле $(\overset{\circ}{H}_x, \overset{\circ}{H}_y, 0)$. Далее изучаются только быстрые и медленные магнитоупругие волны, для которых h_z, υ_z малые более высокого порядка [5]. Обозначая $\delta = \partial/\partial f$, из (1.5)–(1.7), (1.9) можно в основных порядках получить линеаризованные условия совместности для $\delta\upsilon_{x,y}$, $\delta h_{x,y}$, которые имеют место и для возмущений

$$h_x \approx 0, \; h_y = \theta_1 \upsilon_y, \; \upsilon_y \approx \varkappa \upsilon_x$$

$$\theta_1 = \frac{H_y(c_n^2 - b^2)}{c_n[c_n^2 - b^2 - H_x^2(4\pi\rho_0)^{-1}]}, \quad \varkappa = -\frac{H_x(c_n^2 - a^2)}{H_y(c_n^2 - b^2)} \tag{2.1}$$

где a, b – скорости продольных и поперечных упругих волн, c_n – линейные значения λ, причем для c_n имеет место уравнение [5]

$$(c_n^2 - a^2)\left(c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right) = \frac{H_y^2}{4\pi\rho_0}(c_n^2 - b^2) \tag{2.2}$$

При дальнейшем изучении условий совместности выбрана ось x по нормали, ось y – по касательной к невозмущенной волне. При получении условий совместности на линейной характеристике следует полагать [4]:

$$\partial/\partial t = -\lambda\delta, \; \partial/\partial x_k = n_k\delta \tag{2.3}$$

Тогда можно показать, что в основных порядках производные по z выпадут из уравнений [5, 7] и примут вид

$$\rho_0 \frac{\partial \upsilon_x}{\partial t} - \mu\Delta u_x - (\lambda_0 + \mu)\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\mathbf{u} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial H_y h_y}{\partial x} =$$

$$= F_x - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial h_y^2}{\partial x} + \left(\lambda^{(1)} + 2\lambda^{(0)}\right)\frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial x^2} + \left(\zeta^{(1)} + 2\zeta^{(0)}\right)\frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial x \partial t}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \upsilon_y}{\partial t} - \mu\Delta u_y - (\lambda_0+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\mathbf{u} - \frac{1}{4\pi}H_x\frac{\partial h_y}{\partial x} =$$

$$= F_y + \lambda^{(0)}\frac{\partial^2 \upsilon_y}{\partial x^2} + \zeta^{(0)}\frac{\partial^3 \upsilon_y}{\partial x^2 \partial t}$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial t} = H_x\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} - (H_y+h_y)\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} - H_x\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} +$$

$$+ H_y\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \zeta_1\frac{\partial h_1^2}{\partial x^2} \qquad (2.4)$$

Здесь градус при $\overset{\circ}{H_i}$ опущен, и в малых нелинейных, диссипативных и дисперсионных членах оставлены производные по нормали к волне (x). Заменяя в (2.4) $\partial/\partial t$ на $-\lambda\delta$, $\partial/\partial x$ на $n_k\delta$, можно получить условия совместности на нелинейной волне с формальным включением диссипативных и дисперсионных слагаемых

$$-(\lambda^2-a^2)\delta\upsilon_x + \frac{\lambda}{4\pi\rho_0}H_y\delta h_y = \frac{c_n}{\rho_0}F_x - \frac{c_n}{4\pi\rho_0}h_y\delta h_y +$$

$$+\frac{c_n}{\rho_0}\left(\lambda^{(1)}+2\lambda^{(0)}\right)\delta^2\upsilon_x - c_n^2\rho_0(\zeta^{(1)}+2\zeta^{(0)})\delta^3\upsilon_x \qquad (2.5)$$

$$-(\lambda^2-b^2)\delta\upsilon_y - \lambda(4\pi\rho_0)^{-1}H_x\delta h_y = \frac{c_n}{\rho_0}F_y +$$

$$+ \lambda^{(0)}\frac{c_n}{\rho_0}\delta^2\upsilon_y - \zeta^{(0)}\frac{c_n}{\rho_0}\delta^3\upsilon_y$$

$$-\lambda\delta h_y = H_x\delta\upsilon_y - H_y\delta\upsilon_x - h_y\delta\upsilon_z + H_x\frac{\upsilon_x}{c_n}\delta\upsilon_y -$$

$$-H_y\frac{\upsilon_x}{c_n}\delta\upsilon_x + \zeta_1\delta^2 h_y$$

В нулевом порядке из (2.5) находятся условия совместности на линейной волне [10, 11]. Следует отметить, что выражения для F_i получаются из (1.6) удерживанием лишь главных производных по x и они имеют вид

$$F_x = \frac{2}{c_n^2}\rho_0 A_1\upsilon_x\delta\upsilon_x, \quad F_y = -\frac{2}{c_n^2}\rho_0 A_2\upsilon_x\delta\upsilon_x \qquad (2.6)$$

$$A_1 = \frac{1}{\rho_0}\left(2\mu + A + 3B + \frac{3}{2}K + C\right) + \frac{\varkappa^2}{\rho_0}\left(\frac{2}{3}\mu + \frac{1}{4}A + \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}B\right),$$

$$A_2 = -\frac{\varkappa}{\rho_0}\left(\frac{4}{3}\mu + \frac{1}{2}A + K + B\right) \qquad (2.7)$$

Исключая из (2.5) $\delta\upsilon_y$, δh_y, можно получить условие для нормальной скорости волны λ с включением диссипации и дисперсии

$$\lambda = c_n + \lambda^1\upsilon_x, \quad \lambda = c_n + \Gamma\upsilon_x - Dc_n\frac{\delta^2\upsilon_x}{\delta\upsilon_x} + Ec_n^2\frac{\delta^3\upsilon_x}{\delta\upsilon_x}$$

$$-2D_1c_n\lambda^1 = H_y^2(4\pi\rho_0 c_n)^{-1}(b^2-c_n^2) + \left(c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right)\left(2\frac{A_1}{c_n} - \frac{c_n\theta_1^2}{4\pi\rho_0}\right) -$$

$$-\frac{1}{c_n}\left(c_n^2-b^2+\frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right)(c_n^2-a^2)+2H_yH_xA_2(c_n4\pi\rho_0)^{-1}+$$

$$+\frac{H_y\zeta_1\theta_1}{4\pi\rho_0}(c_n^2-b^2)\frac{\delta^2 v_x}{v_x\delta v_x}-\frac{H_yc_n\varkappa\lambda^{(0)}H_x}{4\pi\rho_0^2}\frac{\delta^2 v_x}{v_x\delta v_x}-$$

$$-\frac{c_n}{\rho_0}\left(\lambda^{(1)}+2\lambda^{(0)}\right)\left[\frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}+b^2-c_n^2\right]\frac{\delta^2 v_x}{v_x\delta v_x}+ \tag{2.8}$$

$$+\frac{H_yc_n^2\varkappa\zeta^{(0)}H_y}{4\pi\rho_0^2}\frac{\delta^2 v_x}{v_x\delta v_x}+$$

$$+c_n^2\rho_0^{-1}\left(\zeta^{(1)}+2\zeta^{(0)}\right)\left[H_x^2(4\pi\rho_0)^{-1}+b^2-c_n^2\right]\frac{\delta^3 v_x}{v_x\delta v_x}$$

$$D_1=2c_n^2-a^2-b^2-a_1^2,\ \ a_1^2=(H_x^2+H_y^2)(4\pi\rho_0)^{-1}$$

3. Изучение модуляционной стабильности для квазиплоских и точечных волн. Исследуем вначале приосевые лучи, для которых можно ось x направить по начальному магнитному полю и полагать $H_y=0$, $H_x=H_0$. Тогда из (2.2), (2.8) можно получить для быстрых и медленных волн

$$c_n=a,\ \ \theta_1=\varkappa=0$$

$$-2\rho_0a\lambda^1=\frac{1}{a}\left(2\mu+A+3B+\frac{3}{2}K+C\right)+$$

$$+a\left(\lambda^{(1)}+2\lambda^{(0)}\right)\frac{\delta^2 v_x}{v_x\delta v_x}-a^2\left(\zeta^{(1)}+2\zeta^{(0)}\right)\frac{\partial^3 v_x}{v_x\partial v_x} \tag{3.1}$$

что совпадает со значением [5] для упругой среды, и $c_n^2=b^2+a_1^2$, где λ^1 – также конечные при $H_y\approx 0$. Однако, как следует из (2.1), на волне $c_n=a$ $v_y=0$, а на волне $c_n^2=b^2+a_1^2$ $v_x=0$, т.е. они продольные и поперечные волны. Тогда в эволюционном уравнении для поперечной волны, записанном для ненулевой компоненты v_y, нелинейный член отсутствут. Эволюционное уравнение для однородной среды получается использованием формулы для скорости нелинейной волны (2.8) с формальным включением малых диссипаций и дисперсии, а также вычислением производных по поперечной координате y и имеет вид [5] в плоской задаче

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial\tau}-\frac{1}{2}L(u)=-\frac{1}{c_n}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\Gamma u\frac{\partial u}{\partial\tau}-D\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}+E\frac{\partial^3 u}{\partial\tau^3}\right) \tag{3.2}$$

$$\tau=xc_n^{-1}-t,\ \ f=c_n\tau$$

где для квазипродольных волн на оси $c_n=a$, $u=v_x$, а для квазипоперечных волн на оси $c_n^2=b^2+a_1^2$, $\varkappa^{-1}=0$, $\varkappa^{-1}v_y=v_x=0$; при этом нелинейный член в (3.2) должен быть отброшен и u заменено на v_y.

$$D_1Dc_n^2=(8\pi\rho_0)^{-1}H_y\zeta_1\theta_1(c_n^2-b^2)+$$

$$+c_n(2\rho_0)^{-1}\left(c_n^2-b^2-a_x^2\right)\left(\lambda^{(1)}+2\lambda^{(0)}\right)-\varkappa(8\pi\rho_0^2)^{-1}H_yH_xc_n\lambda^{(0)} \tag{3.3}$$

$$D_1Ec_n=\frac{1}{2\rho_0}\left(\zeta^{(1)}+2\zeta^{(0)}\right)\left(c_n^2-b^2-a_x^2\right)-\frac{H_yH_x\varkappa}{8\pi\rho_0^2}\zeta^{(0)}$$

$$a_x^2=(4\pi\rho_0)^{-1}H_x^2,\quad L(u)=\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{3.4}$$

где $\alpha_1=\alpha_1\ (\alpha_2)$ – дисперсионное линейное уравнение, которое получается из формулы для c_n (2.2):

$$c_n^2=\frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2},\ \ \alpha_2\approx 0,\ \ \frac{H_x^2+H_y^2}{4\pi\rho_0}=a_1^2=\frac{H_0^2}{4\pi\rho_0},$$

$$\frac{H_y^2}{4\pi\rho_0}=\frac{a_1^2\alpha_2^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2} \tag{3.5}$$

Тогда можно для точек вблизи оси x получить для обеих волн

$$\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}=-\frac{c_n^4-b^2a^2-b^2a_1^2}{c_n(2c_n^2-a^2-b^2-a_1^2)} \tag{3.6}$$

Причем соответственно для волн $c_n=a$ и $c_n^2=b^2+a_1^2$ найдем

$$\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_2^2=-c_n^{-1}(a^4-b^2a^2-b^2a_1^2)(a^2-b^2-a_1^2)^{-1}$$

$$\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_2^2=-c_n^{-1}(b^4+b^2a_1^2+a^4-a^2b^2)(b^2+a_1^2-a^2)^{-1} \tag{3.7}$$

Согласно исследованиям работ [6–8], имеют место быстрая (A) и медленная (BC) точечные волны, групповые поляры которых наглядно показаны на фигуре. Следует отметить, что, как показано в [6, 8], начальное магнитное поле направлено по оси симметрии волн фигуры.

Для получения модуляционной устойчивости волн существен знак $\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_2^2$ [5]. Исследуем его. Пусть имеют место неравенство (*1*) $a^2>b^2+a_1^2$, т.е. продольная волна быстрая. Согласно (3.7), для $c_n=a$ числитель $a_1^2(a^2-b^2)>0$, откуда следует $\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_2^2<0$.

Условия наличия угловых точек и вогнутых частей для медленной волны, согласно [8], имеют вид

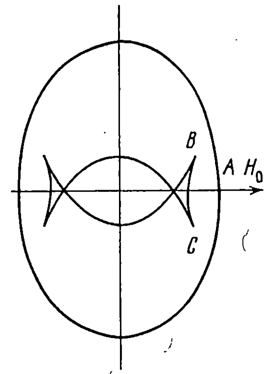
$$a^4-a^2b^2-a_1^2b^2>0 \tag{3.8}$$

$$a_1^4+a_1^2b^2+b^4-a^2b^2>0$$

Из (3.7) и (3.8) следует, что в случае (*1*) волна определяется линией A (фиг.), для которой на оси $c_n=a$ (выпуклая), ($\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_2^2<0$), а волна $c_n^2=b^2+a_1^2$, согласно (3.7), (3.8), определяется линией BC (вогнутой), причем для нее $\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_2^2>0$.

Рассмотрим другой случай (*2*) $a^2<b^2+a_1^2$. Из (3.7), (3.8) следует, что волна $c_n=a$ (кривая BC) вогнутая, т.е. $\partial^2\alpha_1/\partial\alpha_2^2>0$, а волна $c_n^2=b^2+a_1$, изображаемая линией A, выпуклая.

Для исследования модуляционной устойчивости нелинейных волн следует из (3.2) получить уравнения модуляций. Как показано в [9], разыскивая решение u уравнения



(3.2) в виде квазимонохроматических волн, в которых для первой гармоники

$$u \approx \frac{1}{2} U_1 \exp(i\alpha\tau - i\omega t - \nu\alpha^2 t) + \text{к.с.}$$

$$\omega = -E\alpha^3 c_n^{-1}, \quad \nu = D c_n^{-1} \tag{3.9}$$

можно для U_1 получить нелинейное уравнение Шредингера

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial \tau} + i\alpha \frac{\partial U_1}{\partial t} = c_n^{-1}(\varkappa_1 + i\varkappa_2) | U_1 |^2 U_1 + \frac{1}{2} L(U_1) \tag{3.10}$$

$$\varkappa_1 = 3\alpha^2 E\zeta, \quad \varkappa_2 = \alpha D\zeta, \quad \zeta = \tfrac{1}{8}\Gamma^2 (9E^2\alpha^2 + D^2)^{-1} \exp(-2\nu\alpha^2 t) \tag{3.11}$$

Записывая $U_1 = a_2 \exp(i\varphi)$, отбрасывая в (3.10) производные по τ, давая малые возмущения амплитуде и фазе $a_2 = a_0 + a'$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$ и полагая

$$a' = A' \exp[i(\omega' t - \beta' y)], \quad \varphi' = \Phi \exp[i(\omega' t - \beta' y)] \tag{3.12}$$

можно получить условие поперечной устойчивости волн модуляций $\mathrm{Im}\,\omega' > 0$ [9]:

$$\omega' = \frac{3i}{2} a_0^2 \varkappa_2 \pm \left\{ -\frac{9 a_0^4 \varkappa_2^2}{4} + \frac{1}{2\alpha\alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} (\beta')^2 \cdot \left[\frac{1}{2} (\beta')^2 (\alpha_1 \alpha)^{-1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} - 2 a_0^2 \varkappa_1 \right] \right\}^{1/2} \tag{3.13}$$

При получении (3.13) предположено, что диссипация ν в (3.11) мала или велика, что позволяет в условиях устойчивости считать множитель exp $(-\nu\alpha^2 t)$ постоянным. Указанное рассмотрение будет строгим в случае отсутствия диссипации ($\varkappa_2 = 0$). Кроме того, существен знак параметра дисперсии E и диссипации D, входящих в (3.11). Согласно (3.3), для волны $c_n = a$:

$$E = \frac{a}{2\rho_0} (\zeta^{(1)} + 2\zeta^{(0)}) > 0, \quad \varkappa_1 > 0 \tag{3.14}$$

и для волны $c_n^2 = b^2 + a_1^2$:

$$E = c_n \zeta^{(0)} (2\rho_0)^{-1} > 0, \quad \varkappa_1 > 0 \tag{3.15}$$

Отметим также, что для обеих волн

$$D > 0, \quad \varkappa_2 > 0 \tag{3.16}$$

Так как $\varkappa_2 > 0$ при $\partial^2\alpha_1 / \partial\alpha_2^2 < 0$, то знак мнимой части (3.13) определяется первым членом в правой части для ω' и решение устойчиво. Таким образом, для выпуклых волн имеет место поперечная устойчивость волны. При $\partial^2\alpha_1 / \partial\alpha_2^2 > 0$ и

$$2a_0^2\varkappa_1 - \frac{(\beta')^2}{2\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} < 0 \tag{3.17}$$

для незначительных амплитуд решение снова устойчиво. Для $\partial^2\alpha_1 / \partial\alpha_2^2 > 0$ и

$$2a_0^2\varkappa_1 - \frac{(\beta')^2}{2\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} > 0 \tag{3.18}$$

решение неустойчиво. Итак, для вогнутых участков медленной магнитоупругой волны решение может быть устойчивым только для небольших амплитуд.

Таким образом, в случае (*1*) упругая волна $c_n = a$ устойчива и медленная волна $c_n^2 = b^2 + a_1^2$ в силу отсутствия нелинейного члена в (3.2) и (3.13) также устойчива. В случае (*2*) быстрая волна $c_n^2 = b_1^2 + a_1^2$ устойчива, а медленная волна для достаточно больших a_0 неустойчива. Те же результаты получаются для магнитозвуковых волн [9] в проводящей жидкости с пузырьками газа, для которых медленная волна всегда имеет угловые точки и волна $c_n = a$ устойчива при $a > a_1$ и неустойчива для достаточно больших амплитуд a_0 при $a < a_0$.

Проведенные рассмотрения имеют место и для неоднородной среды, причем для коэффициента в нелинейном дисперсионном соотношении можно полагать $(\partial\omega / \partial a_2^2)_0 = \varkappa_1$ и при отсутствии диссипации [5] можно получить для любой части волны условие устойчивости в адиабатическом приближении в виде

$$-(\partial\omega / \partial a_2^2)_0 \partial^2\alpha_1 / \partial\alpha_2^2 > 0 \tag{3.19}$$

что согласуется с (3.15).

Для получения условия поперечной устойчивости волны (3.19) в неоднородной среде и в случае произвольной волны можно записать получаемые из вариационного принципа уравнения для волновых чисел $\alpha_i' = \partial\tau' / \partial x_i$ и частоты $\omega = -\partial\tau' / \partial t$ [10, 11]:

$$\frac{\partial\alpha_i'}{\partial t} + \frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha_j'}\frac{\partial\alpha_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial a_2^2}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\omega}{\partial a_2^2}\right)_0 - \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\left(\frac{1}{2a_2}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_k'\partial\alpha_j'}\frac{\partial^2 a_2}{\partial x_k\partial x_j}\right) = 0 \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial a_2^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_2^2\frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha_i'}\right) + \frac{a_2^2}{g}\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha_i'}\frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial g}{\partial\alpha_i'}\frac{\partial w_0}{\partial x_i}\right) = 0, \quad \alpha_i' = \alpha\alpha_i, \quad \tau' = \alpha\tau$$

где α – невозмущенная частота, a_2 – амплитуда волны, $\omega_0(\alpha_i\, x_i)$ – линейная частота, $G(\omega_0, \alpha_i, x_i) = 0$ – линейное дисперсионное уравнение, $g = \partial G/\partial\omega$; причем для магнитоупругой среды [5] можно выбрать

$$-G = \rho(\omega^2 - \omega_0^2), \quad g \approx 2\rho\omega_0(\alpha_i, x_i).$$

Обозначая $F(x_i, t) = 0$, уравнение волны модуляций можно получить из условия действительности характеристик полученной системы, отбрасывая последнее слагаемое в уравнении для α_i':

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}\left(\frac{\partial\omega}{\partial a_2}\right)_0 > 0$$

Записывая

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=\frac{\partial F}{\partial \tau}\alpha_1+\frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x_1},\quad \frac{\partial F}{\partial x_2}=\frac{\partial F}{\partial \tau}\alpha_2+\frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x_2},$$

где τ, θ – лучевые координаты, $\tau = \mathrm{const}$ – фронт линейной волны, $\theta = \mathrm{const}$ – уравнение луча и, используя условие ортогональности для луча

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1}=\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \theta}{\partial x_2}$$

учитывая, что ось x_1 направлена по нормали к волне ($\alpha_2 \approx 0$), можно условие устойчивости для волны получить другим путем, найденным в [5]:

$$J\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)>0,\quad J=\alpha_1^2\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)^2\frac{\partial^2\omega_0}{\partial \alpha_1^2}+2\frac{\partial F}{\partial \tau}\frac{\partial F}{\partial \theta}\Lambda_1-\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2\frac{\partial \omega_0}{\partial \alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial \alpha_2^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_2}\right)^2$$

$$\Lambda_1=\alpha_j\frac{\partial^2\omega_0}{\partial \alpha_1\partial \alpha_j}\frac{\partial \theta}{\partial x_k}\approx\frac{\partial^2\omega_0}{\partial \alpha_1^2}\alpha_1\frac{\partial \theta}{\partial x_1}+\frac{\partial^2\omega_0}{\partial \alpha_1\partial \alpha_2}\alpha_1\frac{\partial \theta}{\partial x_2}.$$

Отсюда определяется условие поперечной устойчивости, для которого F не зависит от τ, т.е. $\partial F/\partial \tau = 0$, в виде (3.19).

Можно расширить условие устойчивости, учитывая дифракционные члены и отбрасывая слагаемое в уравнении (3.20) для a_2^2, содержащее лучевое решение [5]:

$$-a_2^2\frac{d(\ln K^2)}{dt},\quad K=\frac{\mathrm{const}}{(\rho J)^{1/2}},\quad J=\left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(t,\theta)}\right|$$

в виде

$$a_0^2 J(\partial\omega/\partial a^2)+\tfrac{1}{4}J^2\geq 0$$

где для поперечной устойчивости

$$J=-\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2\frac{\partial \omega_0}{\partial \alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial \alpha_2^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_2}\right)^2,$$

что согласуется с (3.13) в недиссипативной задаче ($\beta' = \partial F/\partial\theta$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
2. *Николаевский В.Н.* К изучению волн в сейсмоактивных средах // Проблемы нелинейной сейсмики. М.: Наука, 1987. С. 190–202.
3. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 519 с.
4. *Jeffrey A., Taniuti T.* Non-linear wave propagation. New York; London: Acad. Press, 1964. 369 p.
5. *Багдоев А.Г.* Распространение волн в сплошных средах. Ереван: Изд. АН АрмССР, 1981. 307 с.

6. *Ахинян Ж.О., Багдоев А.Г.* Определение движения магнитоупругой среды при точечных воздействиях // Прикл. механика. 1977. Т. 13. № 4. С. 9–14.
7. *Buchwald V.T.* Elastic waves in anisotropic media // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1959. V. 253. № 1275. P. 563–580.
8. *Даноян З.Н.* К плоской задаче распространения магнитоупругих колебаний от точечного источника // Изв. АН АрмССР. Механика. 1975. Т. 28. № 1. С. 20–33.
9. *Багдоев А.Г., Петросян Л.Г.* Распространение волн в микрополярной электропроводящей жидкости // Изв. АН АрмССР. Механика. 1983. Т. 36. № 5. С. 3–16.
10. *Whitham G.B.* Linear and Non-linear Waves. New York: Wiley, 1974. 636 p.
11. *Bagdoev A.G., Movsisian L.A.* Some problems of stability of propagation of non-linear waves in shells and plates // Intern. J. Non-linear Mechanics. 1984. V. 19. № 3. P. 245–253.

Ереван

Поступила в редакцию
3.11.1997