МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1999

УДК 539.3

© 1999 г. А.В. ГРОБЕР, Ю.А. УСТИНОВ

МЕТОД ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ КВАЗИРЕГУЛЯРНЫХ ТВЕРДЫХ ВОЛНОВОДОВ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

Квазирегулярными будем называть волноводы, имеющие периодическую структуру в направлении распространения волн. Математическое моделирование волновых процессов в периодических структурах имеет несколько направлений. Одно из них, в основе которого лежат дискретные модели, имеет свое начало в работах Ньютона [1], который для определения скорости звука рассматривал воздух как систему одинаковых масс, соединенных одинаковыми пружинами. Более сложные модели, основанные на периодических цепочках масс, пружин и шарниров, широко представлены в монографии [2]. Второе направление основывается на уравнениях сплошных сред. В рамках этого направления рассмотрен ряд задач для акустических и электромагнитных волноводов в виде полуограниченных тел с периодически меняющимся сечением [3, 4], двухмерные задачи о распространении поверхностных упругих и электроупругих волн [5–7], плоская и антиплоская задачи теории упругости для слоистой полосы периодической структуры [8, 9].

Распространенным типом квазирегулярных волноводов являются цилиндрические тела с постоянным и периодически меняющимся сечением, с периодическими вдоль оси физико-механическими свойствами и граничными условиями на боковой поверхности. Они широко используются в качестве механических и электромеханических фильтров и резонаторов [1, 10, 11]. Существенную роль в развитии математической теории и методов расчета регулярных волноводов сыграл метод однородных решений (метод нормальных волн) [12, 13]. В настоящей работе этот метод развивается для квазирегулярных волноводов указанного выше типа на основе теории Флоке – Ляпунова [4, 14] и теории нерегулярных волноводов [13, 15]. Задача сводится к дифференциальному уравнению первого порядка с неограниченным гамильтоновым оператором, что позволяет установить ряд полезных аналогий между свойствами однородных элементарных решений квазирегулярных и регулярных волноводов. Для периодических слоистых структур задача определения спектра мультипликаторов сводится к бесконечной алгебраической системе. Предложенная схема построения решений применяется для исследования распространения сдвиговых волн в слое с периодической системой электродов.

1. Пусть $V_\infty = S \times [-\infty, \infty]$ – область, занятая электроупругой средой, где S – поперечное сечение, $\Gamma = \partial S \times [-\infty, \infty]$ – боковая поверхность, ∂S – граница S. Будем рассматривать V_∞ как волновод, в котором могут распространяться гармонические волны, и отнесем ее к декартовой системе координат $x_1, x_2, x_3 = x$ так, чтобы ось волновода совпадала с осью x. Введем четырехкомпонентные вектор-функции $\mathbf{u}\ \{u_1, u_2, u_3, \phi\}$, $\boldsymbol{\sigma}_m\ \{\sigma_{m1}, \sigma_{m2}, \sigma_{m3}, D_m\}$, где u_k, ϕ, σ_{mk}, D_m – соответственно амплитуды компонент вектора смещений, потенциала электрического поля, тензора напряжений, вектора электрической индукции, $E_k = -\partial_k\phi$ – компоненты вектора напряженности электрического поля, $k, m = 1, 2, 3$. Термодинамические соотношения линейной электроупругости [16] запишем в виде

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{A}_m \partial \mathbf{u} + \mathbf{B}_m \mathbf{u}, \quad \partial = \partial / \partial x \tag{1.1}$$

$$\mathbf{A}_m = \|A_m(i,\ j)\|, \quad \mathbf{B}_m = \|B_m(i,\ j)\| \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$$A_m(i, j) = c_{mij3}, \ A_m(i, 4) = -A_m(4, i) = e_{3mi}, \ A_m(4, 4) = \varepsilon_{m3}, \ B_m(i, j) = c_{mij1}\partial_1 + c_{mij2}\partial_2$$

$$B_m(i,\ 4) = -B_m(4,\ i) = e_{1mi}\partial_1 + e_{2mi}\partial_2, \quad B_m(4,\ 4) = \varepsilon_{m1}\partial_1 + \varepsilon_{m2}\partial_2 \ (i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$$

Здесь c_{mijk}, e_{kmi}, ε_{mk} – соответственно компоненты тензоров модулей упругости, пьезомодулей и диэлектрических проницаемостей, которые, как и плотность материала ρ_p, ниже рассматриваются как кусочно-непрерывные периодические функции переменной x с периодом l.

На поперечном сечении S введем гильбертово пространство H четырехкомпонентных вектор-функций, интегрируемых с квадратом, и пространство $H' = H \oplus H$ восьмикомпонентных вектор-функций $\mathbf{w}\{\mathbf{u},\ \boldsymbol{\sigma}_3\}$. Используя введенные обозначения, уравнения стационарных колебаний с частотой ω и электростатики

$$\partial_m \boldsymbol{\sigma}_m + \rho\omega^2 \mathbf{u} = 0, \quad \partial_m D_m = 0, \quad \partial_m = \partial / \partial x_m \ \ (m = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.2}$$

можно представить в виде дифференциального уравнения первого порядка по переменной x относительно вектор-функции $\mathbf{w}$. Имеем

$$\partial \mathbf{w} = i\mathbf{M}\mathbf{w}, \quad \mathbf{M} = \| \mathbf{m}_{\mu\nu} \| \quad (\mu,\ \nu = 1, 2) \tag{1.3}$$

$$\mathbf{m}_{11} = -\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{B}_3, \ \mathbf{m}_{12} = \mathbf{A}_3^{-1}, \ \mathbf{m}_{21} = \partial_\mu \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{B}_3 - \partial_\mu \mathbf{B}_\mu - \omega^2 \mathbf{R}, \ \mathbf{m}_{22} = -\partial_\mu \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_3^{-1}$$

$$\mathbf{R} = \| R_{ij} \|, \quad R_{11} = R_{22} = R_{33} = \rho_p, \quad R_{44} = 0, \quad R_{ij} = 0 \ \ \text{для } i \neq j$$

Здесь и ниже суммирование по повторяющемуся индексу.

Предположим, что акустическим и электрическим излучением через боковую поверхность Г, а также потерями на внутреннее трение можно пренебречь. Из таких предположений вытекает, что средний за период $T = 2\pi/\omega$ поток энергии

$$P = \tfrac{1}{2}\omega\ (\mathbf{J}\mathbf{w},\ \mathbf{w})_{H'} = \tfrac{1}{2} i\omega[(\mathbf{u},\ \boldsymbol{\sigma})_H - (\mathbf{u},\ \boldsymbol{\sigma})_H] \tag{1.4}$$

$$\mathbf{J} = i \| \mathbf{J}_{\mu\nu} \|, \quad \mathbf{J}_{11} = \mathbf{J}_{22} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{J}_{12} = -\mathbf{J}_{21} = -\mathbf{I} \ \ (\mu, \nu = 1, 2)$$

$$(\mathbf{u},\ \boldsymbol{\sigma})_H = \int_S (u_j \sigma_{j3}^* + \phi D_3^*) dS \ \ (j = 1, 2, 3)$$

через поперечное сечение не зависит от x. Здесь $\mathbf{I}$ – тождественный оператор в H, индекс (*) здесь и ниже означает, что данный оператор (вектор, скалярная величина) являются сопряженными.

Свойство 1. Оператор-функция $\mathbf{M}(x)$ является $\mathbf{J}$-самосопряженной, т.е.

$$\mathbf{J}\mathbf{M} = \mathbf{M}^*\mathbf{J} \tag{1.5}$$

Доказательство этого свойства [13, 17] вытекает из следующих соотношений:

$$\partial \mathbf{P} = \tfrac{1}{2}\omega[(\mathbf{J}\partial\mathbf{w},\ \mathbf{w})_{H'} + (\mathbf{J}\mathbf{w},\ \partial\mathbf{w})_{H'}] = \tfrac{1}{2}\omega[(\mathbf{J}i\mathbf{M}\mathbf{w},\ \mathbf{w})_{H'} + (\mathbf{J}\mathbf{w},\ i\mathbf{M}\mathbf{w})_{H'}] =$$

$$= \tfrac{1}{2} i\omega[(\mathbf{J}\mathbf{M}\mathbf{w}, \mathbf{w})_{H'} - (\mathbf{M}^*\mathbf{J}\mathbf{w}, \mathbf{w})_{H'}] = 0$$

Следуя теории Флоке – Ляпунова, решения уравнения (1.3) будем отыскивать в виде

$$\mathbf{w}(x_1,\ x_2,\ x) = e^{i\alpha x}\mathbf{v}(x_1,\ x_2,\ x) \tag{1.6}$$

где $\mathbf{v}(x_1, x_2, x) = \mathbf{v}(x)$ – периодическая по x вектор-функция со значениями в H и с периодом, l, α – волновое число. Подставляя (1.6) в (1.3), получаем спектральную задачу

$$(\mathbf{M}+i\partial)\mathbf{v}=\alpha\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}(l)=\mathbf{v}(0) \tag{1.7}$$

Из свойства 1 вытекает следующее свойство.

Свойство 2. Множество Λ собственных значений $\{\alpha_k\}$ задачи (1.7) является неограниченным симметричным, т.е. каждому $\alpha_k^+=\alpha_k$ $(0\leqslant \mathrm{Re}\,\alpha_k^+,\ 0\leqslant \mathrm{Im}\,\alpha_k^+)$ соответствуют еще три $\alpha_{-k}^+=-\alpha_k^*$, $\alpha_k^-=\alpha_k^*$, $\alpha_{-k}^-=-\alpha_k$, где $\alpha_k^-=\alpha_k$ $(0>\mathrm{Re}\,\alpha_k^+,\quad 0\leqslant \mathrm{Im}\,\alpha_k^+)$, и $|\alpha_k|\to\infty$ при $k\to\infty$.

Как и в регулярном волноводе каждому собственному значению $\alpha_k^\pm$, если оно простое, соответствует элементарное решение вида

$$\mathbf{w}_k^\pm(x)=\exp(i\alpha_k^\pm x)\mathbf{v}_k^\pm(x) \tag{1.8}$$

где $\mathbf{v}_k^\pm(x)$ – собственные вектора, соответствующие собственным значениям $\alpha_k^\pm$. Если α_k – n-кратное собственное значение, то ему соответствуют n линейно-независимых элементарных решений, вид которых зависит от структуры корневого подпространства. В частности, если спектральная задача при $\alpha=\alpha_k^\pm$ имеет один собственный вектор $\mathbf{v}_{k0}^\pm$ и присоединенные векторы $\mathbf{v}_{kj}$ $(j=1,\ldots,n-1)$, эти элементарные решения имеют вид

$$\mathbf{w}_{kj}^\pm=\exp(i\alpha_k^\pm x)\sum_{s=0}^{j}\frac{x^{j-s}}{(j-s)!}\mathbf{v}_{ks}^\pm \tag{1.9}$$

Собственные $\mathbf{v}_k^\pm$ и присоединенные $\mathbf{v}_{ks}^\pm$ вектор-функции при каждом фиксированном x обладают свойством обобщенной ортогональности, которое может быть полезным при решении краевых задач для квазирегулярного полуограниченного волновода или волновода конечной длины. Чтобы сформулировать это свойство, предположим, что спектр состоит из простых собственных значений и является объединением двух подмножеств $\Lambda=\Lambda_R\cup\Lambda_C$, где $\alpha_r\in\Lambda_R$ – вещественное собственное значение, $\alpha_k\in\Lambda_C$ – комплексное собственное значение. Введем индифинитное скалярное произведение произвольных вектор-функций $\mathbf{v}$, $\mathbf{g}$ в H':

$$[\mathbf{v},\ \mathbf{g}]=(\mathbf{J}\ \ \mathbf{v},\ \mathbf{g})_{H'} \tag{1.10}$$

Свойство 3. Пусть $\mathbf{v}_n^\pm$ – собственные вектор-функции, соответствующие $\alpha_n^\pm$; и $\mathbf{z}_n^\pm=\mathbf{v}_n^\pm$, если $\alpha_n^\pm\in\Lambda_R$; и $\mathbf{z}_n^+=\mathbf{v}_n^-$, $\mathbf{z}_n^-=\mathbf{v}_n^+$, если $\alpha_n^\pm\in\Lambda_C$. Имеют место следующие соотношения обобщенной ортогональности:

$$[\mathbf{v}_n^\pm,\ \mathbf{z}_k^\pm]=d_n^\pm\delta_{nk} \tag{1.11}$$

где δ_{nk} – символ Кронекера, при этом $d_n^-=-d_n^+$, если $\alpha_n^\pm\in\Lambda_R$, и $d_n^-=d_n^{+*}$, $d_{-n}^\pm=-d_{-n}^\pm$, если $\alpha_n^\pm\in\Lambda_C$.

Для доказательства ортогональности вида (1.11) рассмотрим уравнение (1.7) для двух произвольных собственных значений α_n, α_k: $-i\partial\mathbf{v}_n=(\mathbf{M}-\alpha_n)\mathbf{v}_n$, $-i\partial\mathbf{v}_k=(\mathbf{M}-$ $-\alpha_k)\mathbf{v}_k$.

Используя скалярное произведение (1.10), умножим первое уравнение слева на $\mathbf{v}_k$, второе справа на $\mathbf{v}_n$ и, беря их разность, с учетом (1.5) получаем

$$i\partial f_{mn}=[\mathbf{v}_k,\ \mathbf{M}\mathbf{v}_n]-[\mathbf{M}\mathbf{v}_k,\ \mathbf{v}_n]-(\alpha_n^*-\alpha_m)f_{mn}=(\alpha_n^*-\alpha_m)f_{kn},\ \ f_{kn}=[\mathbf{v}_k,\ \mathbf{v}_n]$$

или

$$f_{kn}(x) = \exp[-i(\alpha_n^* - \alpha_m)x] f_{mn}(0), \quad f_{mn}(0) = f_{mn}(l) \tag{1.12}$$

Из соотношений (1.12), при условии $\alpha_n^* - \alpha_m \neq 2\pi s$, где s – целое число, вытекает соотношение (1.11), которое справедливо для произвольного x.

Замечание 1. Множество Λ_R при всяком фиксированном ω является конечным. Если вещественные собственные значения отсутствуют ($\Lambda_R = \varnothing$) для некоторой области изменения ω, то такую область принято называть областью (полосой) запирания волновода, а области значений ω, для которых $\Lambda_R = \varnothing$ принято называть полосой пропускания.

Замечание 2. Соотношения обобщенной ортогональности (1.11) по форме совпадают с соотношениями обобщенной ортогональности (биортогональности) элементарных решений регулярных волноводов [13]. Различие состоит в том, что в случае регулярного волновода вектор-функции $\mathbf{v}_n^{\pm}$, $\mathbf{z}_n^{\pm}$ не зависят от x.

Из свойства 3 вытекает, что в неограниченном квазирегулярном волноводе, так же как и неограниченном регулярном волноводе энергию могут переносить только элементарные решения, соответствующие вещественным собственным значениям. При этом групповая скорость c_g связана с потоком энергии P выражением

$$c_g = \omega'(\alpha) = \frac{P}{E}, \quad E = l^{-1}\omega^2 \int\limits_0^l (\mathbf{Ra}, \mathbf{a})dx \ \ (\mathbf{u} = e^{i\alpha x}\mathbf{a}) \tag{1.13}$$

Здесь E – среднее за период T значение энергии, отнесенной к единице длины волновода, $\mathbf{a}$ – амплитуда $\mathbf{u}$. Формула (1.13) отождествляет групповую скорость с лучевой. Однако это отождествление (как и в случае регулярного волновода [13]) возможно, пока $\omega'(\alpha) \neq 0$.

Перечисленные свойства устанавливают достаточно полную аналогию между основными свойствами элементарных решений регулярных и квазирегулярных волноводов и позволяют значительное число известных результатов для первых перенести на вторые. В частности, как и в [17] дать корректную постановку задач на основе энергетического принципа излучения. Следует отметить, что задачи исследования спектра и построения элементарных решений даже в сравнительно простых случаях становятся существенно более сложными.

2. Рассмотрим вопрос о построении множества элементарных решений для квазирегулярного волновода в случае, когда $\mathbf{M}(x)$ является кусочнопостоянной оператор-функцией с периодом l. Обозначим ось x через L и представим

$$L = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} L_k, \quad L_k = L_k^{(1)} \cup L_k^{(2)}, \quad L_k^{(1)} = [x_k^{(1)}, \ x_k], \quad L_k^{(2)} = [x_k, \ x_k^{(2)}]$$

$$x_k^{(1)} = (k-1)l, \quad x_k^{(2)} = kl, \quad x_k = (k-1)l + l_1$$

где l_1, l_2 – длины отрезков $L_k^{(1)}$, $L_k^{(2)}$, $l_1 + l_2 = l$.

Пусть $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{(\mu)}$ и $\mathbf{w} = \mathbf{W}^{(\mu)}$ при $x \in L_k^{(\mu)}$, где $\mathbf{M}^{(\mu)}$ – не зависящие от x оператор-функции (μ = 1; 2). Будем отыскивать решение в виде [13]:

$$\mathbf{W}^{(1)} = \sum_n \ (C_n^{(1)+}\mathbf{W}_n^{(1)+}(x - x_k^{(1)}) + C_n^{(1)-}\mathbf{W}_n^{(1)-}(x - x_k)) \quad \text{при} \ \ x_k^{(1)} \leqslant x \leqslant x_k \tag{2.1}$$

$$\mathbf{W}^{(2)} = \sum_n \ (C_n^{(2)+}\mathbf{W}_n^{(2)+}(x - x_k) + C_n^{(2)-}\mathbf{W}_n^{(2)-}(x - x_k^{(2)})) \quad \text{при} \ \ x_k \leqslant x \leqslant x_k^{(2)} \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{W}_n^{(\mu)\pm}$ – элементарные решения однородных волноводов, $C_n^{(\mu)\pm}$ – неизвестные постоянные. Для построения алгебраической системы уравнений, позволяющей определить эти неизвестные, предположим, что при $x = x_k$ выполняется условие непрерывности

$$\mathbf{W}^{(1)}(x_k) = \mathbf{W}^{(2)}(x_k) \tag{2.3}$$

которое выражает непрерывность вектора смещений $\mathbf{u}$, потенциала ϕ, вектора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и компоненты D_x вектора электрической индукции.

Введем обозначение $\rho = e^{i\alpha l}$ и запишем условие Флоке

$$\mathbf{W}^{(2)}(x_k^{(2)}) = \rho \mathbf{W}^{(1)}(x_k^{(1)}) \tag{2.4}$$

Построение алгебраической системы уравнений для определения коэффициентов разложений (2.1), (2.2) осуществим, опираясь на соотношения (2.3), (2.4), теорему о полноте в пространстве H' системы векторов $\{\mathbf{V}_n^{(\mu)+}\}$, $\mathbf{V}_n^{(\mu)-}\}$, где $\mathbf{V}_n^{(\mu)\pm} = \mathbf{W}_n^{(\mu)\pm}(0)$ [13], и соотношения обобщенной ортогональности (1.9) (см. замечание 2).

Умножая уравнения (2.3) с помощью скалярного произведения (1.10) на элементы системы $\{\mathbf{Z}_p^{(2)+}, \mathbf{Z}_p^{(2)-}\}$, (2.4) – на элементы системы $\{\mathbf{Z}_p^{(1)+}, \mathbf{Z}_p^{(1)-}\}$, получаем следующую однородную бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$\sum_n [a_{np}^{++} C_n^{(1)+} + a_{np}^{-+} C_n^{(1)-}] = d_p^{(2)+} C_p^{(2)+}$$

$$\sum_n [a_{np}^{+-} C_n^{(1)+} + a_{np}^{--} C_n^{(1)-}] = d_p^{(2)-} \exp(-i\alpha_p^{(2)-} l_2) C_p^{(2)-} \tag{2.5}$$

$$\sum_n [b_{np}^{++} C_n^{(2)+} + b_{np}^{-+} C_n^{(2)-}] = \rho d_p^{(1)+} C_p^{(1)+}$$

$$\sum_n [b_{np}^{+-} C_n^{(2)+} + b_{np}^{--} C_n^{(2)-}] = \rho d_p^{(1)-} \exp(-i\alpha_p^{(1)-} l_1) C_p^{(1)-} \tag{2.6}$$

$$a_{np}^{++} = [\mathbf{W}_n^{(1)+}(l_1),\ \mathbf{Z}_p^{(2)+}], \qquad a_{np}^{-+} = [\mathbf{W}_n^{(1)-}(0),\ \mathbf{Z}_p^{(2)+}]$$

$$a_{np}^{+-} = [\mathbf{W}_n^{(1)+}(l_1),\ \mathbf{Z}_p^{(2)-}], \qquad a_{np}^{--} = [\mathbf{W}_n^{(1)-}(0),\ \mathbf{Z}_p^{(2)-}]$$

$$d_p^{(2)+} = [\mathbf{W}_p^{(2)+}(0),\ \mathbf{Z}_p^{(2)+}], \qquad d_p^{(2)-} = [\mathbf{W}_p^{(2)-}(-l_2),\ \mathbf{Z}_p^{(2)-}]$$

$$b_{np}^{++} = [\mathbf{W}_n^{(2)+}(l_2),\ \mathbf{Z}_p^{(1)+}], \qquad b_{np}^{-+} = [\mathbf{W}_n^{(2)-}(0),\ \mathbf{Z}_p^{(1)+}]$$

$$b_{np}^{+-} = [\mathbf{W}_n^{(2)+}(l_2),\ \mathbf{Z}_p^{(1)-}], \qquad b_{np}^{--} = [\mathbf{W}_n^{(2)-}(0),\ \mathbf{Z}_p^{(1)-}]$$

$$d_p^{(1)+} = [\mathbf{W}_p^{(1)+}(0),\ \mathbf{Z}_p^{(1)+}], \qquad d_p^{(1)-} = [\mathbf{W}_p^{(1)-}(-l_1),\ \mathbf{Z}_p^{(1)-}]$$

Замечание 3. Выбранный вид решения (2.1), (2.2) обеспечивает отсутствие экспоненциального роста коэффициентов системы уравнений (2.5), (2.6) и, тем самым, облегчает организацию вычислений.

Обозначим через $\{\rho_t = \exp(il\alpha_t)\}$ множество собственных значений системы (2.5), (2.6) (ρ_t принято называть мультипликаторами [14]). Каждому простому собственному значению ρ_t соответствуют множества постоянных $\{C_{nt}^{(1)+}\}$, $\{C_{nt}^{(1)-}\}$, $\{C_{nt}^{(2)+}\}$, $\{C_{nt}^{(2)-}\}$, которые на основании формул (2.1), (2.2) определяют однородное решение $\mathbf{w}^{(\mu)}(x)$ квазирегулярного волновода.

3. Опираясь на описанную выше теорию, рассмотрим задачу о распространении сдвиговых волн в бесконечном электроупругом слое (антиплоскую задачу), на лицевых поверхностях которого нанесена периодическая система электродов. Обозначим через h полутолщину слоя и отнесем к ней все линейные размеры. Введем безразмерные координаты $x = x_3/h$, $y = x_2/h$, $z = x_1/h$ $(-1 \leqslant y \leqslant 1,\ -\infty < z < \infty)$. В рассматриваемой задаче

$u_1 = u(x, y)$, $u_2 = u_3 = 0$, $\phi = \phi(x, y)$, $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$, $\sigma_{xz} = \sigma_{xz}(x, y)$, $\sigma_{yz} = \sigma_{xz}(x, y)$, $D_1 = D_z = 0$, $D_2 = D_y(x, y)$, $D_3 = D_x(x, y)$, $\mathbf{u}\{u, \phi\}$, $\boldsymbol{\sigma}\{\sigma_{xz}, D_x\}$. Поскольку все полевые характеристики зависят только от двух переменных x, y, то поперечное сечение S вырождается в отрезок прямой $y \in [-1, 1]$, а боковая поверхность Γ – в прямые $y = \pm 1$. Будем считать, что материал слоя – поляризованная по толщине керамика. В принятых предположениях термодинамические соотношения электроупругости, уравнения стационарных колебаний и электростатики [15] принимают вид

$$h\sigma_{xz} = c_{44}^E \partial_x u + e_{15}\partial_x \phi, \quad h\sigma_{yz} = c_{44}^E \partial_y u + e_{15}\partial_y \phi, \tag{3.1}$$

$$hD_x = -e_{15}\partial_x u + \varepsilon_{11}\partial_x \phi, \quad hD_y = -e_{15}\partial_y u + \varepsilon_{11}\partial_y \phi,$$

$$\partial_x \sigma_{xz} + \partial_y \sigma_{yz} + h^2 \rho \omega^2 u = 0, \quad \partial_x D_x + \partial_y D_y = 0 \tag{3.2}$$

На участках $L_k^{(1)}$ лицевых поверхностей выполняются граничные условия

$$\sigma_{yz}(x, \pm h) = 0, \quad D_y(x, \pm h) = 0 \tag{3.3}$$

а на участках $L_k^{(2)}$:

$$\sigma_{yz}(x, \pm h) = 0, \quad \phi(x, \pm h) = 0 \tag{3.4}$$

Подставляя в (3.1), (3.2) $u = \exp(i\beta x)a(y)$, $\phi = \exp(i\beta x)\psi(y)$, после элементарных преобразований получаем

$$c_{44}^E(a'' + (1 + d^2)\Omega^2 a - \beta^2 a) + e_{15}(\psi'' - \beta^2\psi) = 0 \tag{3.5}$$

$$-e_{15}(a'' - \beta^2 a) + \varepsilon_{11}(\psi'' - \beta^2\psi) = 0$$

$$a' = \partial_y a, \ \gamma^2 = \Omega^2 - \beta^2, \ \Omega^2 = h^2\rho_p\omega^2 / c_{44}^D, \ c_{44}^D = c_{44}^E(1 + d^2), \ d^2 = e_{15}^2 / \varepsilon_{11}c_{44}^E$$

при этом граничные условия (3.3), (3.4) преобразуются в следующие:

$$a'(\pm 1) = 0, \quad \psi'(\pm 1) = 0 \tag{3.6}$$

$$e_{15}a'(\pm 1) - \varepsilon_{11}\psi'(\pm 1) = 0, \quad \psi(\pm 1) = 0 \tag{3.7}$$

При построении решений спектральных задач (3.5), (3.6) и (3.5), (3.7) их удобно разбить на симметричные (A1, A2) и антисимметричные (B1, B2). Каждой из четырех задач соответствует свое множество элементарных решений. Приведем их.

Задача A1. Множество элементарных решений состоит из двух подмножеств:

$$\mathbf{W}_0^{(1)\pm}(x) = \{0, \ \pm ix + 1, \ \pm ie_{15}, \ \pm i\varepsilon_{11}\}, \quad \mathbf{W}_{2m}^{(1)\pm}(x) = \exp(\pm i\beta_{2m}x)\cos\gamma_m y \mathbf{V}_{2m}^{(1)\pm} \tag{3.8}$$

$$\mathbf{V}_{2m}^{(1)\pm}\{0, \ 1, \ \pm i\beta_{2m}e_{15}, \ \pm i\beta_{2m}\varepsilon_{11}\}, \quad \beta_{2m} = i\gamma_m, \ \gamma_m = m\pi \ (m = 1, 2, \ldots)$$

$$\mathbf{W}_{2m-1}^{(1)\pm}(x) = \exp(+i\beta_{2m-1}x)\cos\gamma_m y \mathbf{V}_{2m-1}^{(1)\pm} \tag{3.9}$$

$$\mathbf{V}_{2m-1}^{(1)\pm} = \{1, \ e_{15} / \varepsilon_{11}, \ \pm i\beta_{2m-1}c_{44}^D, \ 0\}$$

$$\beta_{2m-1} = (\Omega^2 - \gamma_m^2)^{1/2}, \quad \gamma_m = m\pi \ (m = 1, 2, \ldots)$$

Задача A2. Элементарные решения имеют вид

$$\mathbf{W}_p^{(2)\pm}(x) = \exp(\pm\alpha_p x)\mathbf{V}_p^{(2)\pm}, \quad \mathbf{V}_p^{(2)\pm} = \{a_p(y), \ \psi_p(y), \ \pm\sigma_p(y), \ \pm d_p(y)\} \tag{3.10}$$

$$a_p(y) = \operatorname{ch}\beta_p \cos\gamma_p y, \quad \psi_p(y) = e_{15} / \varepsilon_{11}(\operatorname{ch}\beta_p \cos\gamma_p y - \cos\gamma_p \operatorname{ch}\beta_p y)$$

$$\sigma_p(y) = i\beta_p c_{44}^D(\operatorname{ch}\beta_p \cos\gamma_p y - d^2 \cos\gamma_p \operatorname{ch}\beta_p y), \quad d_p(y) = -i\beta_p e_{15} \cos\gamma_p \operatorname{ch}\beta_p y$$

Таблица 1

N	ς = 0,1	ς = 0,2	ς = 0,3	ς = 0,4	ς = 0,5	ς = 0,6	ς = 0,7	ς = 0,8	ς = 0,9
				ЦТС-19, при η = 1					
1	2,841–2,833	2,841–2,912	2,842–2,994	2,866–3,024	2,883–3,068	2,915–3,091	2,947–3,122	3,038–3,131	3,070–3,137
				ЦТС-19, при η = 2					
1	1,416–1,440	1,417–1,456	1,419–1,492	1,435–1,514	1,440–1,537	1,458–1,545	1,471–1,558	1,524–1,569	1,543–1,572
2	2,849–2,878	2,893–2,906	2,911–2,980	2,949–2,984	2,970–2,986	2,983–3,010	2,992–3,081	3,028–3,126	3,071–3,137
				PZT-4, при η = 1					
1	2,549–2,738	2,554–2,826	2,588–2,912	2,619–3,016	2,731–3,042	2,817–3,091	2,859–3,122	2,943–3,132	3,038–3,139

Таблица 2

N	η = 1,1	η = 1,2	η =1,3	η = 1,4	η = 1,5	η = 1,6	η = 1,7	η = 1,8	η = 1,9
				ЦТС-19, при ς = 0,5					
1	2,621–2,789	2,399–2,560	2,217–2,366	2,057–2,201	1,923–2,044	1,802–1,920	1,689–1,801	1,606–1,709	1,590–1,610

Здесь β_p, γ_p являются корнями следующих уравнений

$$\gamma\,\mathrm{tg}\,\gamma = -K^2\beta\,\mathrm{th}\,\beta,\quad \beta = (\Theta^2 - \gamma^2)^{1/2},\quad \Theta^2 = (1+d^2)\Omega^2,\quad K^2 = d^2/(1+d^2) \tag{3.11}$$

Задача B1. Множество элементарных решений получается заменой в формулах (3.8), (3.9) $\cos\gamma_m y$ на $\sin\eta_m y$, где $\eta_m = (2m-1)\pi/2$, при этом $\mathbf{W}_0^{(1)\pm}(x) = 0$.

Задача B2. Элементарные решения получаются заменой в формулах (3.10) (cos, ch) соответственно на (sin, sh) и уравнений (3.11) на уравнение

$$\gamma\,\mathrm{ctg}\,\gamma = K^2\beta\,\mathrm{cth}\,\beta,\quad \beta = (\Theta^2 - \gamma^2)^{1/2} \tag{3.12}$$

Замечание 4. Уравнения (3.11), (3.12) определяют дисперсионные кривые $\beta_p = \beta_p(\Theta)$ нормальных сдвиговых волн в электроупругом слое, лицевые поверхности которого покрыты бесконечнотонкими электродами, и, если β_p – вещественное, соответствующие им фазовые скорости $V_p = V^D\Omega/\beta_p$, где $V^D = (c_{44}^D/\rho)^{1/2}$ – скорость поперечной объемной волны. Если $\Theta_s < \Theta \leqslant \Theta_{s+1}$, где $\Theta_s = \pi s$ в случае задачи *B1* и $\Theta_s = \pi(2s + 1)/2$ ($s = 0, 1, \ldots$) в случае задачи *B2*, вещественных волновых чисел β_s, будет ровно $s + 1$, все остальные будут в зависимости от Θ и s либо чисто мнимыми, либо комплексными. Корни γ_p определяют характер распределения амплитуд по толщине слоя. Среди них для задачи *B1* при любых значениях Θ, а для задачи *B2*, начиная с некоторого значения Θ, существует только по одному чисто мнимому γ_i. При $\Theta \to \infty$ ($h \to \infty$) соответствующее элементарное решение вырождается в волну Гуляева – Блюстейна [15] с фазовой скоростью $V_\Gamma = V^D(1 - K^4)^{1/2}$.

Описанные выше множества элементарных решений позволяют сформировать бесконечные системы (2.5), (2.6), которые из-за их громоздкости здесь не приводятся.

4. В качестве иллюстрации приведем некоторые результаты исследования задачи, полученные на основе анализа системы (2.5), (2.6) методом редукции. Исследовалось поведение мультипликаторов ρ в зависимости от безразмерной частоты Θ и геометри-

Таблица 3

N	$\varsigma = 0,1$	$\varsigma = 0,2$	$\varsigma = 0,3$	$\varsigma = 0,4$	$\varsigma = 0,5$	$\varsigma = 0,6$	$\varsigma = 0,7$	$\varsigma = 0,8$	$\varsigma = 0,9$
				PZT-65/35, при $\eta = 0,5$					
1	0–1,414	0–1,430	0–1,446	0–1,462	0–1,479	0–1,496	0–1,514	0–1,532	0–1,551
				PZT-65/35, при $\eta = 1$					
1	0–1,414	0–1,429	0–1,445	0–1,462	0–1,478	0–1,496	0–1,514	0–1,532	0–1,551
2	3,247–3,296	3,250–3,344	3,257–3,389	3,271–3,428	3,292–3,460	3,322–3,484	3,360–3,500	3,405–3,508	3,457–3,511
				PZT-4, при $\eta = 0,5$					
1	0–1,200	0–1,231	0–1,263	0–1,298	0–1,335	0–1,375	0–1,419	0–1,465	0–1,516
				PZT-4, при $\eta = 1$					
1	0–1,200	0–1,230	0–1,262	0–1,296	0–1,333	0–1,373	0–1,417	0–1,464	0–1,515
2	2,829–2,938	2,835–3,052	2,851–3,163	2,881–3,267	2,928–3,357	2,995–3,427	3,087–3,475	3,204–3,501	3,348–3,510
				ЦТС-19, при $\eta = 0,5$					
1	0–1,347	0–1,367	0–1,389	0–1,412	0–1,436	0–1,460	0–1,486	0–1,513	0–1,541
				ЦТС-19, при $\eta = 1$					
1	0–1,346	0–1,367	0–1,389	0–1,411	0–1,438	0–1,460	0–1,867	0–1,513	0–1,541
2	3,122–3,191	3,126–3,260	3,136–3,325	3,155–3,384	3,210–3,469	3,227–3,481	3,282–3,493	3,349–3,506	3,427–3,511

Таблица 4

N	$\varsigma = 0,1$	$\varsigma = 0,2$	$\varsigma = 0,3$	$\varsigma = 0,4$	$\varsigma = 0,5$	$\varsigma = 0,6$	$\varsigma = 0,7$	$\varsigma = 0,8$	$\varsigma = 0,9$
				PZT-4, ЦТС-19, при $\eta = 1$					
1	0–1,527	0–1,533	0–1,537	0–1,542	0–1,546	0–1,551	0–1,556	0–1,561	0–1,566
2	3,568–3,582	3,554–3,581	3,542–3,579	3,532–3,575	3,525–3,569	3,519–3,560	3,516–3,549	3,514–3,538	3,513–3,525
				PZT-4, ЦТС-19, при $\eta = 2$					
1	0–1,527	0–1,533	0–1,537	0–1,542	0–1,549	0–1,551	0–1,556	0–1,561	0–1,566
2	2,197–2,201	2,197–2,206	2,198–2,210	2,199–2,214	2,203–2,218	2,205–2,219	2,208–2,220	2,212–2,221	2,217–2,221
				PZT-65/35, ЦТС-19, при $\eta = 1$					
1	0–1,548	0–1,549	0–1,533	0–1,555	0–1,558	0–1,560	0–1,563	0–1,566	0–1,568
2	3,607–3,632	3,582–3,631	3,562–3,627	3,546–3,619	3,533–3,608	3,523–3,594	3,517–3,576	3,514–3,555	3,513–3,534

ческих параметров $\zeta = l_1/l$, $\eta = l/h$. В качестве электроупругого материала использовались пьезокерамики ЦТС-19, PZT-4, PZT-65/35 и их комбинации.

Табл. 1, 2 иллюстрируют положения первых зон запирания $N = 1$, 2 в зависимости от параметров ζ, η для слоя из керамик ЦТС-19 и PZT-4 в случае распространения симметричных волн. Табл. 3 иллюстрирует положения первых зон запирания в зависимости от параметров ζ, η для слоя из керамик ЦТС-19, PZT-4, PZT-65/35 в случае распространения антисимметричных волн.

В случае распространения антисимметричных волн в волноводе регулярнослоистой структуры, образованном чередованием в направлении оси x_3 полос двух пьезокерамических материалов, занимающих соответственно области $L_k^{(1)}$ и $L_k^{(2)}$ (другими словами, области волновода, покрытые электродами, образованы одним пьезокерамическим материалом, непокрытые электродами – другим), построены зависимости положения первых зон запирания от геометрических параметров и безразмерной частоты Ω, определяемой электроупругими постоянными первого материала. Результаты расчетов приводятся в табл. 4.

Изучено влияние погранслоев (неоднородных волн) на положение зон запирания, показано, что одномодовая модель (в разложениях (3.8), (3.9) учитывалось по одному слагаемому) обеспечивает погрешность расчета мультипликаторов не более 8% по отношению к значениям, рассчитанным с учетом 12 пар погранслоев, с учетом одной пары погранслоев – не более 6%.

4. Заключение. Таким образом, исследовано влияние двух геометрических параметров ζ, η на положение и форму зон запирания волновода. Параметром η можно регулировать положение и количество зон запирания, параметром ζ – ширину зон запирания. Использование пьезокерамики с более высоким коэффициентом электромеханической связи приводит в случае распространения симметричных волн к смещению зон запирания в область более низкой частоты и расширению зон запирания, в случае распространения антисимметричных волн – к уменьшению первой зоны запирания волновода, к смещению в область более низких частот и расширению остальных зон запирания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФ № 97-01-00-464).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мезон У.* Применение пьезоэлектрических кристаллов и механических резонаторов в фильтрах и генераторах // Физич. акустика. Т. 1. Ч. 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. М.: Мир, 1966. С. 398–498.
2. *Кунин Н.А.* Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975. 415 с.
3. *Крейн М.Г., Любарский Г.Я.* К теории полос пропускания периодических волноводов // ПММ. 1961. Т. 25. В. 1. С. 24–37.
4. *Якубович В.А., Старжинский В.И.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
5. *Балакирев М.К., Гилинский Н.А.* Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 239 с.
6. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424 с.
7. *Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П.* Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991, 415 с.
8. *Ворович И.И., Кучеров Л.В., Чебаков М.И.* *В*-резонансы в задаче об установившихся колебаниях штампа на поверхности полосы периодической структуры // Изв. РАН. МТТ. 1992, № 3. С. 95–100.
9. *Ворович И.И., Кучеров Л.В., Чебаков М.И.* Динамические свойства слоя периодической структуры // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. 1994. С. 87–89.
10. *Джонсон Р.* Механические фильтры в электронике. М.: Мир, 1986, 406 с.
11. *Бриллюэн Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 457 с.
12. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
13. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов-на-Дону: Изд-во. Рост. ун-та., 1993. 143 с.
14. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. 1967. 472 с.
15. *Устинов Ю.А.* К теории твердых волноводов периодической структуры // Ростовский государственный университет. Ежегодник '95. Ростов-на-Дону: Изд. РГУ, 1996. Вып. 5. С. 136–141.
16. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 с.
17. *Устинов Ю.А.* О принципах выбора единственного решения для полуограниченных тел на критических частотах // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 87–93.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
18.08.1997