МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1999

УДК 532.546

 А.А. ПОЗДНЯКОВ

ГИДРООТСЛОЕНИЕ ОБОЛОЧКИ ОТ ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА И МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОРАЗРЫВА

Предложена математическая модель для простейшего случая расслоения твердых тел под действием расклинивающего давления жидкости. Показано, что поведение рассматриваемой системы может быть полностью определено с помощью некоторого эталонного решения по известным ее физико-механическим характеристикам, сгруппированным в основной параметр модели Λ. Результаты расчетов качественно и количественно согласуются с данными экспериментов по моделированию гидроразрыва, что позволяет расширить область применимости модели. Представленная модель в отличие от известных, отслеживающих лишь асимптотическую стадию гидроразрыва, единообразно описывает весь ход процесса, включая и зарождение щели.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассматривается осесимметричная задача гидроотслоения оболочки от плоской поверхности абсолютно твердого тела. Она представляет простейший случай расслоения твердых тел под действием расклинивающего давления жидкости. Теоретическое и экспериментальное моделирование этого класса явлений наиболее активно развивается в приложениях к гидравлическому разрыву пласта [1–3] и методикам определения характеристик трещинностойкости материалов [4]. Меридиальное сечение системы в некоторый момент времени изображено на фиг. 1. Между оболочкой и поверхностью тела через отверстие радиуса r_0 закачивается жидкость. Форма отслоившейся части оболочки (неизвестная граница в задаче) описывается функцией

$$z = w(r) \tag{1.1}$$

удовлетворяющей условиям

$$w(0) = w_0, \quad \partial w/\partial r = 0 \text{ при } r = 0 \tag{1.2}$$

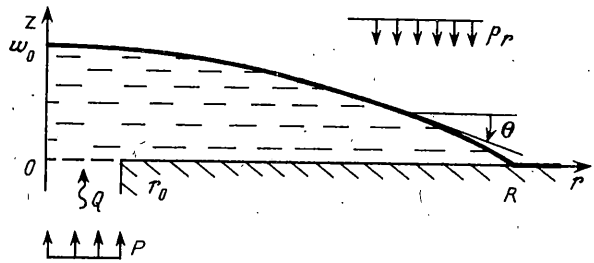
$$w(R) = 0$$

Все рассматриваемые переменные – функции времени, хотя t в списке аргументов не указывается.

Требуется при заданном законе изменения объемного расхода жидкости Q и известных внешнем давлении p_e и свойствах жидкости и оболочки определить текущие форму (1.1) и размеры w_0, R отслоившейся части и величину давления P на входе в систему.

Процесс отслоения считается квазистатическим, жидкость – несжимаемой ($\rho_0 =$ $=$ const), ньютоновской с кинематической вязкостью η.

Возможные особенности решения при $r = R$ (соответствующие краевые эффекты гидродинамики и теории упругости) детально не рассматриваются. Далее используем безразмерные переменные, назначая масштабы: длины – r_0, скорости – η/r_0 и давления – p_e.



Фиг. 1

Система уравнений для безынерционного (ползущего) течения жидкости [5] в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\upsilon_r)}{\partial r}+\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}=0, \quad r\in[0,R]$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial \tau}{\partial z}=0 \quad z\in[0,w(r)] \qquad (1.3)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau)}{\partial r}-\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

$$\tau=\frac{1}{\mathrm{Po}}\left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial r}+\frac{\partial \upsilon_r}{\partial z}\right) \qquad (1.4)$$

$$p_r=p-\frac{2}{\mathrm{Po}}\frac{\partial \upsilon_r}{\partial r}, \quad p_z=p-\frac{2}{\mathrm{Po}}\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}$$

$$p_\varphi=p-\frac{2}{\mathrm{Po}}\frac{\upsilon_r}{r}$$

где υ_r, υ_z – компоненты вектора скорости; p – среднее давление; $\tau=\tau_{rz}$ – напряжения сдвига; p_r, p_z, p_φ – нормальные напряжения (давления); $\mathrm{Po}=p_e r_0^2/(\rho_0\eta^2)$ – число Пуазейля. Система (1.3), (1.4) включает уравнения неразрывности, равновесия и реологии.

При отсутствии утечки жидкости сквозь поверхности оболочки и подстилающего тела задаются условия полного прилипания

$$\upsilon_z-\upsilon_r\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\partial w}{\partial t}=0, \quad z=w(r), \quad r\in[0,R] \qquad (1.5)$$

$$\upsilon_r(r,0)=0, \quad \upsilon_z(r,0)=0, \quad r\in[r_0,R] \qquad (1.6)$$

На оси z выполнены условия симметрии

$$\upsilon_r(0,z)=0, \quad \tau(0,z)=0, \quad z\in[0,w_0] \qquad (1.7)$$

Для скорости на входном сечении задается интегральное условие

$$2\pi\int_0^{r_0} r\upsilon_z(r,0)dr=Q, \quad \upsilon_r(r,0)=0, \quad r\in[0,r_0] \qquad (1.8)$$

Давление на входе определяется уравнением

$$\frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} rp_z(r,0)dr=P \qquad (1.9)$$

Рассмотрим такие режимы нагнетания жидкости под оболочку, при которых ее отслоение происходит при пологой форме купола, т.е.

$$|\partial w/\partial r|\ll 1,\quad r\in[0,R] \tag{1.10}$$

При этом деформации оболочки малы, считаем их упругими, а для описания напряженно-деформированного состояния применим безмонетную теорию оболочек [6].

Определим дополнительные геометрические характеристики неизвестной границы (1.1): угол наклона касательной (фиг. 1)

$$\mathrm{tg}\theta = -\partial w/\partial r \tag{1.11}$$

и главные кривизны

$$\varkappa_s = \partial \sin\theta/\partial r,\quad \varkappa_\varphi = \sin\theta/r \tag{1.12}$$

Для мембраны меридиальное T_s и окружное T_φ натяжения удовлетворяют уравнениям равновесия

$$rT_s\sin\theta = \int_0^r r'(p_z - p_e)dr' \tag{1.13}$$

$$\varkappa_s T_s + \varkappa_\varphi T_\varphi = p_n - p_e \tag{1.14}$$

$$p_n = p_r\sin^2\theta + p_z\cos^2\theta - \tau\sin 2\theta \tag{1.15}$$

где компоненты тензора напряжений в жидкости при определении p_n вычисляются при $z = w(r)$.

Для меридиального натяжения задается условие

$$T_s\sin\theta = F\ (r = R) \tag{1.16}$$

где F – усилие отрыва оболочки от поверхности тела, приходящееся на единицу длины контура. Точнее $F = \partial U/\partial(\pi R^2)$ – поверхностная плотность энергии адгезии. Аналогично подходу Ирвина в теории трещин в U можно включать и потери энергии в области краевых эффектов (сильный изгиб оболочки на контуре, гидравлические и поверхностные явления при смыкании канала). Далее F считаем известной функцией от радиуса.

Для меридиальной деформации ε_s справедлив закон Гука

$$\varepsilon_s = (T_s - \nu T_\varphi)/(Eh) \tag{1.17}$$

где Eh – жесткость оболочки на растяжение, ν – коэффициент Пуассона.

Замыкающее уравнение системы определяет длину меридиана оболочки

$$R + \int_0^R \varepsilon_s dr = \int_0^R \left(1 + \left(\frac{\partial w}{\partial r}r\right)^2\right)^{1/2} dr \tag{1.18}$$

при этом оболочка в начальной конфигурации считается плоской, а деформация неотслоившейся части – пренебрежимо малой.

2. Модель гидроотслоения. Разрешающие уравнения. Построим приближенное решение поставленной задачи, назвав его моделью гидроотслоения. Следствием условия (1.10) оказывается узость щели

$$w_0/R \ll 1 \tag{2.1}$$

В моделях гидроразрыва, где рассматривается рост трещины в бесконечной упругой среде, именно это условие служит основанием усреднения уравнений (1.3) по толщине трещины и формулировки задачи для средних значений скорости и давления. Далее принимается некоторая (как правило, достаточно грубая) аппроксимация поля давлений по плоскости трещины и для нее по известному решению соответствующей задачи теории упругости находится форма трещины.

В случае, когда поток жидкости ограничен оболочкой – гораздо более податливой нежели упругий массив – форма и размеры границы щели оказываются весьма чувствительными к выбору аппроксимации поля давлений. Поэтому в настоящей работе использовано нетрадиционное для такого класса задач построение приближенного решения.

Задается аппроксимация поля скоростей

$$\upsilon_r = az(w-z)/r$$
$$\upsilon_z = aw_0 z^2/R^2, \quad r \in [r_0, R], \quad z \in [0, w(r)] \qquad (2.2)$$

где a – неизвестная функция времени.

Поле (2.2) имеет следующую структуру. Выражение для υ_r при $w = \mathrm{const}$ согласуется с радиальной скоростью для течения Пуазейля между параллельными плоскостями с источником на оси z. Полагаем, что при условии (2.1) для слабо изменяющейся толщины щели w главный член решения не меняет вид, а появляющиеся вертикальные скорости малы: $\upsilon_z \ll \upsilon_r$. Таким образом, скорости (2.2) могут рассматриваться как первые члены разложения истинного решения в ряд Тэйлора по переменной z. Поле (2.2) удовлетворяет краевым условиям (1.6) и условию $\upsilon_r(r, w) = 0$, согласующемуся с условием малости деформаций оболочки.

По уравнению неразрывности и третьему условию из (1.2) находится функция w, которая экстраполируется на область $[0, r_0)$ с выполнением первых двух условий из (1.2):

$$w = w_0(1-(r/R)^2), \quad r \in [0, R] \qquad (2.3)$$

Однако, эта функция и поле (2.2) не удовлетворяют уравнению (1.5). Рассогласование можно скорректировать, потребовав, чтобы в каждый момент времени выполнялся интегральный баланс объема (следствие несжимаемости жидкости и условий (1.5), (1.6)):

$$2\pi \int_0^R rw\,dr = V \qquad (2.4)$$

$$V = V_0 + \int_0^t Q\,dt \qquad (2.5)$$

где V – полный объем жидкости, закачанной в отслоение; V_0 – его начальное значение.

Из (2.3), (2.5) следует

$$V = (\pi/2) w_0 R^2 \qquad (2.6)$$

Эволюционное уравнение модели получается из закона сохранения массы для объема

$$V_1 = 2\pi \int_1^R rw\,dr = V(1 - 1/R^2)^2 \qquad (2.7)$$

Скорость его изменения находится дифференцированием (2.7) по времени, а также – по объемному расходу жидкости, поступающей через цилиндрическую поверхность $r = r_0 = 1$:

$$\frac{d}{dt}V_1 = 2\pi r_0 \int_0^{w_1} \upsilon_r(1,z)\,dz = \frac{\pi}{3} a w_0^3 \left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^3 \qquad (2.8)$$
$$w_1 = w(1)$$

Из (2.5)–(2.7) следует обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию контура отслоения

$$4Vx\frac{dx}{dt} = (1-x^2)\left[Q - \frac{8}{3\pi^2}aV^3x^6(1-x^2)\right] \tag{2.9}$$

$$x = 1/R, \quad x \in (0, 1) \tag{2.10}$$

Найдем вид функции a. Подстановка (2.3) в (1.4) дает

$$\tau = A(w-2z)/r, \quad A = a/\mathrm{Po} \tag{2.11}$$

Поле давлений находится интегрированием уравнений равновесия

$$p = C - 2A(zw_0/R^2 + \ln r) \tag{2.12}$$

где C – неизвестная функция времени.

Для определения C нет очевидного краевого условия для давления p, поэтому приходится привлекать дополнительные гипотезы. Так как, по условию задачи (1.8)–(1.9) на входе в систему определены лишь среднее давление P и интегральное значение расхода Q, то нет смысла устанавливать детальную картину течения в приосевой зоне. Общая же характеристика этого течения такова: начально направленный вдоль оси z поток жидкости из входного канала перестраивается в некоторой цилиндрической зоне в преимущественно радиальный. В модели радиус этой зоны полагается равным r_0.

Выделим в приосевой зоне цилиндр с радиусом r_0 и высотой $z \leqslant w_1$. На его нижнее сечение действует среднее давление P, на верхнее – $p_u(z)$. На боковой поверхности цилиндра по (29) заданы касательные напряжения $\tau(r_0, z)$. Из уравнения равновесия сил в проекции на ось z:

$$\pi r_0^2(P - p_u(z)) + 2\pi r_0\int_0^z \tau(r_0,\zeta)d\zeta = 0$$

следует

$$p_u(z) = P + 2Az(w_1 - z), \quad z \in [0, w_1] \tag{2.13}$$

Давление непосредственно под куполом при $r \leqslant r_0$, $z \in (w_1, w(r))$, учитывая (2.1), аппроксимируем значением P.

Дополнительное условие согласования осевого и радиального потоков принимается в виде уравнения равновесия поверхности цилиндра в радиальном направлении

$$2\pi r_0\int_0^{w_1}(p_u(z) - p(r_0,z))dz = 0$$

где в качестве $p(r_0, z)$ можно выбрать либо гидростатическую составляющую тензора напряжений, либо его радиальную компоненту.

Отсюда следует $C = P + Aw_0w_1\Gamma$, $|\Gamma| \leqslant 1$, где $\Gamma = \Gamma(R)$ – функция, конкретный вид которой зависит от аппроксимации члена $p(r_0, z)$.

Подстановка в (1.13) полученной эпюры напряжений $p_z(r, w(r))$ приводит к равенству

$$T_s\sin\theta / r = \Delta p - A(\ln r^2 - \gamma(1 - 1/r^2)) \tag{2.14}$$

где $\Delta p = P - p_e$ – избыточное давление на входе, а функция $\gamma = \gamma(R)$ имеет структуру $\gamma = 1 + 0(w_0/R^2)$. Отсюда, с учетом (16), следует

$$\Delta p = A(\ln R^2 - \gamma(1 - 1/R^2)) + 2F/R \tag{2.15}$$

Функция A находится по уравнению (1.18), в которое подставляются деформации ε_s, определяемые с помощью (1.11)–(1.15), (1.17), (2.3), (2.14), (2.15) и принятой аппроксимации: $p_z = p_n = P$ при $r < r_0$. После громоздких выкладок, с учетом малости параметра w_0/R, получим в первом приближении

$$\frac{A}{Eh} = \frac{\frac{4}{3}(w_0 / R)^3 - (1-\nu)F/(Eh)}{R(1-1/R)^2} \tag{2.16}$$

Исходная задача с использованием (2.5), (2.9), (2.10), (2.16) сводится к следующей задаче Коши:

$$dV/dt = Q \tag{2.17}$$

$$4Vx\frac{dx}{dt} = (1+x)[Q(1-x) - 4\lambda(1+x)V^3x^7(V^3x^9 - 2\psi)]$$

$$V(0) = V_0, \quad x(0) = 1/R_0 \quad \lambda = (2^8/9\pi^5)\mathrm{Po}\,Eh, \quad \psi = (3\pi^3/2^6)(1-\nu)F/(Eh)$$

Максимальный прогиб оболочки и избыточное давление на входе в систему, согласно (2.6), (2.8), (2.15), (2.16) вычисляются по формулам

$$w_0 = (2\pi)Vx^2 \qquad \frac{\Delta p}{Eh} = \frac{2^6}{3\pi^3}x\left[\frac{2\psi}{1-\nu} - \frac{1}{1-x}\left(\frac{\ln x}{1-x} + \frac{1+x}{2}\right)(V^3x^9 - 2\psi)\right] \tag{2.18}$$

3. Исследование решений модели. Для исследования модели (2.17), (2.18) и получения численного решения удобно ввести новые переменные и параметры. Полагая $Q = Q_0 q(t)$, где $Q_0 = \max Q = \mathrm{const}$, определим основной параметр рассматриваемой вязкоупругой системы $\Lambda = \lambda/Q_0$, или, выражая через размерные величины

$$\Lambda = (2^8 / 9\pi^5)r_0^2 Eh / \mu Q_0 = 0{,}09295(r_0^3 / Q_0)(E_m / \mu) \tag{3.1}$$

где $E_m = Eh/r_0$ – эффективный модуль упругости системы, $\mu = \rho_0\eta$ – динамическая вязкость. Физический смысл параметра Λ можно истолковать как соотношение упругих и вязких сил на входе в систему.

Очевидно, что при $Q > 0$ объем (2.5) удобно выбрать за независимую переменную (параметр нагружения). Дальнейшего упрощения можно достичь введением переменной

$$Z = \Lambda^{1/2}V^3x^8 \tag{3.2}$$

Тогда задача (2.17) трансформируется в следующую задачу Коши:

$$\frac{dx}{dZ} = \frac{x}{8Z}\frac{Z(Z-2\Psi/x) - qX_1}{Z(Z-2\Psi/x) - qX_2} \tag{3.3}$$

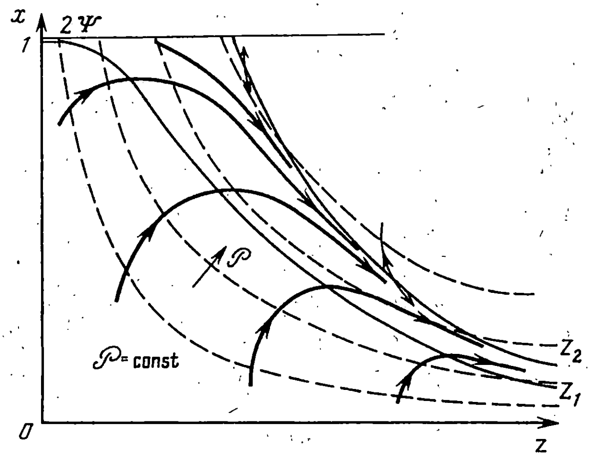
$$X_1 = (1-x)/(1+x), \quad X_2 = (1/2 + x^2/2)/(1+x)^2 \tag{3.4}$$

$$x(Z_0) = x_0, \quad Z_0 = \Lambda^{1/2}V_0^3x_0^8, \quad \Psi = \psi\Lambda^{1/2}$$

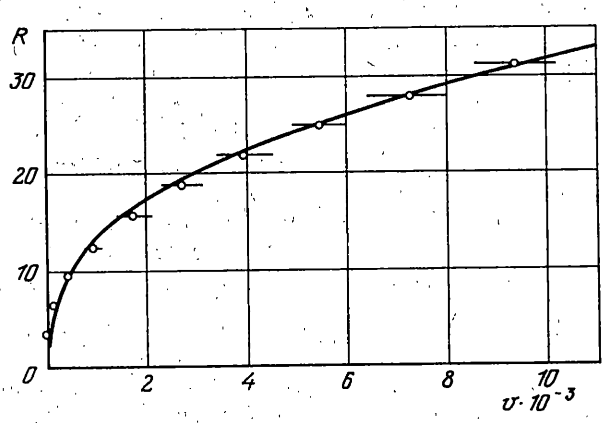
где $q = q(t(V)) = q(Z, x)$ – функция, известная по первому уравнению (2.17) и соотношению (3.2).

Проведем анализ модели, ограничившись для простоты режимом нагнетания жидкости с постоянным расходом $Q = Q_0$. Фазовый портрет уравнения (3.3) для случая $\Psi = \mathrm{const}$ представлен на фиг. 2.

Если рассматривать только процессы монотонного роста отслоения с малой начальной щелью ($x_0 \approx 1$, $V_0 \ll 1$), то необходимо ограничить величину параметра Ψ (критерий малости сцепления F можно также получить, требуя положительности значений A в (2.16)). Все интегральные кривые, описывающие эти процессы, заключены



Фиг. 2



Фиг. 3

в криволинейной полосе с границами

$$Z_i = \Psi / x + ((\Psi / x)^2 + X_i)^{1/2} \quad (i = 1, 2) \tag{3.5}$$

На фиг. 2 показаны также изолинии функции $\mathcal{P} = \mathcal{P}(Z, x)$, где согласно (2.18), (2.17):

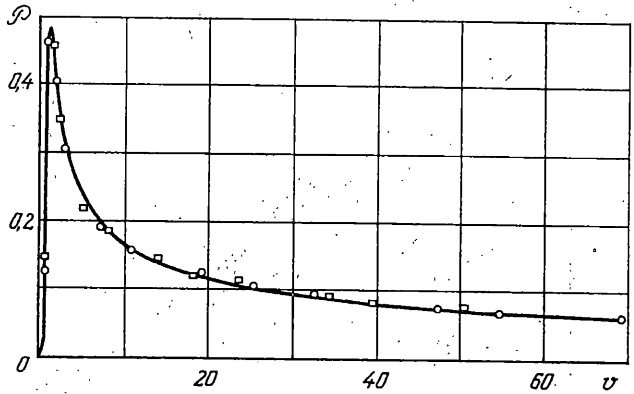
$$\Delta p r_0 /(Eh) = \Lambda^{-1/2} \mathcal{P} \tag{3.6}$$

$$\mathcal{P} = \frac{2^6}{3\pi^3} x \left[\frac{2\Psi}{1-\nu} - \frac{1}{1-x} \left(\frac{\ln x}{1-x} + \frac{1+x}{2} \right) (Zx - 2\Psi) \right] \tag{3.7}$$

(в левой части (3.6) теперь использованы размерные величины).

Фазовый портрет позволяет провести полное качественное исследование решений задачи (3.3), в частности, становится очевидным появление пика на кривых давлений $P = P(t)$. Такой пик регистрируется в экспериментах, но пока не был описан существующими моделями. Из (3.6) явно следует пропорциональность величины максимального давления параметру $E_m \Lambda^{-1/2}$, что независимо устанавливается методами теории размерностей и подобия.

Эксперименты при различных значениях Q_0 демонстрируют почти полное слияние графиков $P = P(t)$ при достаточно больших t. Это свойство следует также из модели



Фиг. 4

гидроотслоения. Анализ и прямые расчеты показывают, что интегральные кривые (фиг. 2) быстро приближаются к границе Z_2. Таким образом, при малых x все траектории рассматриваемого класса процессов с широким спектром значений параметров проходят практически по одинаковому "рельефу" давления.

Значение $\Psi = 0$ (отсутствие сцепления) является бифуркационным: границы Z_i ($i = 1, 2$) на фазовом портрете смыкаются в точке $Z = 1$, $x = 0$; уравнение (3.3) становится уравнением Абеля II рода, а его решения приобретают характер автомодельных. В этом случае уравнения (3.3) и (3.7) не содержат параметра Λ, значения параметров необходимы только для масштабирования конкретного процесса. Это свойство позволяет построить универсальное решение $x = x(Z)$ для заданных начальных условий, которое легко преобразовать в "шаблоны" $R = R(v)$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}(v)$ с аргументом $v = \Lambda^{1/6} V$ (фиг. 3, 4) и использовать их, например, для обработки экспериментальных данных.

Другие, часто реализуемые в экспериментах, режимы постоянного давления на входе ($P = \text{const}$) и отсечки ($Q = 0$) при $t \geqslant t_s > 0$ также легко рассчитать. В первом случае результат сразу следует из (2.18), во втором получается прямым интегрированием системы (2.17) с соответствующими начальными условиями.

4. Моделирование гидроразрыва. Трещинообразование в твердых телах успешно моделируется на экспериментальных установках, действующих по принципу расслоения двух тел по поверхности контакта. Так, имитация гидравлического разрыва пласта на установке DISLASH [3] проводится по схеме, отличающейся от приведенной на фиг. 1 только наличием над оболочкой (или вместо нее) деформируемого блока. Поэтому логично допустить, что предложенную здесь модель гидроотслоения при соответствующем подборе эффективного модуля упругости E_m можно применить к обработке результатов экспериментов по образованию дисковидной щели. Пока же такая обработка проводилась на базе классических моделей гидроразрыва (см. ссылки в [7]). Все эти модели – асимптотические, они справедливы лишь при $R \to \infty$ и поэтому не обеспечивают удовлетворительного согласия с экспериментом.

Прямые расчеты по модели гидроотслоения качественно воспроизводят приведенные в [3] экспериментальные кривые на всех режимах. Примеры количественной обработки в предположении отсутствия сцепления F представлены на фиг. 3, 4.

В [3] для режима $Q = Q_w = \text{const}$ построены "универсальные" кривые вида (использованы размерные переменные):

$$R / R_w = f(t_w), \quad t_w = (t_0 + t) / \tau_* \tag{4.1}$$

$$\tau_* = (R_w / Q_w^3)^{3/4} (\mu_w / E_w), \quad E_w = E / 4(1 - \nu^2), \quad \mu_w = 12\mu$$

где R_w – радиус входного канала установки.

Выбор сдвигов t_0 и характерного времени τ_* не обоснован. Кривые (4.1) варьируются в зависимости от величины модуля упругости E материала блока, использованного в эксперименте. Следует отметить, что на входе в щель отверстие канала расточено, т.е. его радиус больше R_w. С другой стороны, анализируя роль r_0 в модели, можно заключить, что этот параметр – свободный, его значение не обязательно совпадает с радиусом подводящего канала, хотя и не сильно отличается от последнего. Но для простоты везде далее принято $r_0 = R_u = 0{,}159$ см. Линейное преобразование аргумента t_w в безразмерный объем приводит к появлению множителя, зависящего от параметра $\Lambda_w = (R_w^3 / Q_w)(E_w / \mu_w)$, имеющего ту же структуру, что и основной параметр модели Λ. Это позволяет допустить, что кривые (4.1) на самом деле представляют собой некоторую аппроксимацию шаблона $R = R(v)$. Действительно, простым масштабированием аргумента функции f можно добиться хорошего совпадения кривых (4.1) и шаблона.

На фиг. 3 представлен результат обработки данных из [3] по методу наименьших квадратов. В качестве базисной функции взят шаблон $R = R(v)$ с начальными условиями $v_0 = 10^{-3}$, $R_0 = 1{,}01$ и набора точек – геометрические центры данных для каждого R, причем использованы данные с меньшим разбросом. Для нового аргумента данных $v = v^\circ + \alpha t_w$ получены расчетные значения $v^\circ = 99{,}46$, $\alpha = 2{,}935$. Подобная процедура выполнена и для данных по давлению (фиг. 4). При "укладке" графиков $P_w = P_w(t)$ на шаблон $\mathcal{P} = \mathcal{P}(v)$ рассчитаны сдвиги v° и масштабные множители типа α; для кривой давления при $Q_w = Q_1 = 0{,}06$ см^3/с: $v_1^\circ = -0{,}225$, $\alpha_1 = 0{,}731$ (светлые точки); при $Q_w = Q_2 = 0{,}04$ см^3/с: $v_2^\circ = 0{,}0$, $\alpha_2 = 0{,}529$ (светлые квадраты). Отношение $\alpha_1/\alpha_2 \approx 1{,}38$ близко к теоретическому $(Q_1 / Q_2)^{5/6} \approx 1{,}40$. Рассчитанные сдвиги для давления $P_1 = 282$ Кпа и $P_2 = 281$ Кпа близки к значениям поджимающего давления (аналог p_e) 277 Кпа и 287 Кпа, определенным в специальных экспериментах. При этом для отношения пиковых значений избыточного давления имеем оценку $\approx 1{,}21$, а согласно (3.6) $\Delta p_1 / \Delta p_2 = (Q_1 / Q_2)^{1/2} \approx 1{,}23$. Согласование вполне удовлетворительное, если учесть точность использованных данных и грубость модели при малых R.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Желтов Ю.А., Христианович С.А.* О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 5. С. 3–41.
2. *Зазовский А.Ф.* Распространение плоской круговой трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 2. С. 103–109.
3. *Johnson E., Cleary M.P.* Implications of recent laboratory experimental results for hydraulic fractures // SPE Paper 21846. 1991. 16 p.
4. *Бирюков А.П., Гольдштейн Р.В., Григорьев А.Г.* Осесимметричная задача об отслаивании при наличии ограничений на смещения // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 100–108.
5. *Астарита Дж., Маруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
6. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
7. *Гордеев Ю.Н., Зазовский А.Ф.* Точные решения задачи о распространении вертикальной трещины гидроразрыва постоянной высоты и большой протяженности в непроницаемой среде // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 1. С. 94–104.

Тюмень

Поступила в редакцию
15.09.1996