МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1999

Посвящается моему отцу – другу, учителю

УДК 539.3:534.1

© 1999 г. С.В. ЧЕЛОМЕЙ

О ДВУХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ, ПОСТАВЛЕННЫХ АКАДЕМИКАМИ П.Л. КАПИЦЕЙ И В.Н. ЧЕЛОМЕЕМ

В статике существует известный принцип, что центр тяжести механической системы стремится занять такое устойчивое положение, при котором потенциальная энергия этой системы имеет минимальное значение. В динамике, однако, этот принцип иногда нарушается, и центр тяжести системы при определенных условиях может занимать такое динамически устойчивое положение, что потенциальная энергия системы принимает значения, близкие к максимальному.

В своей работе [1] в 1951 году академиком П.Л. Капицей была поставлена и в первом приближении решена задача об устойчивости колебаний плоского одностепенного маятника, точка подвеса которого испытывает вертикальные высокочастотные вибрации. Теоретически и экспериментально он доказал условие динамической устойчивости такого маятника, перевернутого на 180°, что согласуется с условием, полученным в [2].

В 1956 году академиком В.Н. Челомеем [3] был установлен факт обязательного повышения динамической устойчивости как колебательной, так и вообще любой упругой системы, находящейся под действием высокочастотной вибрации, а в 1983 году им была опубликована уникальная работа [4] о парадоксальных явлениях в механике, вызываемых вибрациями [5].

Так, в частности, в этой работе рассматривалась нелинейная механическая система с двумя степенями свободы, состоящая из прямого стержня и надетой на него с небольшим зазором шайбы, которая может свободно перемещаться по оси стержня. Автором экспериментально и с помощью прямых расчетов на ЭВМ было показано, что воздействие высокочастотной вибрации на шарнирное основание стержня может привести к возникновению его устойчивого перевернутого положения. Шайба будет находиться на оси этого стержня в состоянии динамического равновесия, а сам стержень будет совершать колебательные движения с некоторыми усредненными амплитудой и частотой. Впоследствии эта система получила название "маятник Челомея" [6].

В публикуемой работе задача, поставленная в [1] в линейной постановке, обобщена на n плоских последовательно соединенных шарнирных маятников при приложении высокочастотной вибрации к их общей верхней точке опоры.

Показано, что система дифференциальных уравнений, описывающая эту задачу, имеет диагонально-симметричную матрицу масс. Это обстоятельство дает возможность доказать новые условия ортогональности, присущие такого рода системам и позволяющие в новых координатах разделить исходную систему дифференциальных уравнений на независимые. В первом и втором приближениях найдены решения этих уравнений при наличии высокочастотной вертикальной вибрации общей точки подвеса маятников. Найдено новое уточненное условие устойчивости такой системы, перевернутой на 180°, в условиях земной гравитации. В условиях невесомости определены силы локальной искусственной гравитации, возникающие от высокочастотных колебаний общей точки подвеса системы, действующие на каждую из масс. Последующие приближения вносят незначительные уточнения в полученные зависимости и здесь не приводятся.

В настоящей работе теоретически и экспериментально рассматривается также нелинейная задача "маятник Челомея", впервые поставленная в [1]. В первом приближении найдено аналитическое решение этой задачи и показано, что шайба действительно может иметь точки устойчивого динамического равновесия на оси стержня. Исследуется влияние линейного демпфирования, возникающего от трения шайбы о стержень. Полученные теоретические результаты хорошо согласуются с прямым решением дифференциальных уравнений на ЭВМ и натурными экспериментами, проведенными для стержней разной длины, находящихся под действием параметрического возбуждения различной интенсивности и при изменении коэффициентов трения между стержнем и шайбой.

Кроме отмеченных выше работ, проблемы, связанные с математическими методами решения такого рода задач, можно найти в [7–11].

Общим выводом для всех этих задач является то, что высокочастотное возбуждение придает простой колебательной системе дополнительную, так называемую динамическую устойчивость. В связи с этим особый интерес представляет проблема, когда указанное возбуждение действует на сложные системы, содержащие много или бесконечное число степеней свободы, в частности, на нелинейные системы.

Настоящая работа представляет собой попытку такого исследования на примере линейной задачи о плоских колебаниях n последовательно соединенных шарнирно закрепленных маятников, подверженных высокочастотной вибрации, и на примере аналитического решения нелинейной задачи "маятник Челомея" с учетом влияния трения между шайбой и стержнем и сравнения теоретически полученных результатов с экспериментальными данными.

1. Обобщение задачи П.Л. Капицы на систему с n степенями свободы. В линейной постановке система дифференциальных уравнений, описывающая колебания системы, состоящей из n последовательно шарнирно соединенных маятников, общая точка подвеса которых подвержена вертикальной высокочастотной вибрации, имеет вид

$$\sum m_{i,j} l_j \ddot{\varphi}_j + g_0 m_{1,i} \varphi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

$$g_0 = g + \ddot{s}, \quad m_{i,j} = \sum_{k=j}^{n} m_k \quad (i \leqslant j), \quad m_{i,j} = m_{j,i}, \quad s = a\cos(pt)$$

Здесь m_i – массы маятников, l_i – их длины, φ_i – малые углы отклонения маятников, g – ускорение земного тяготения, s – вертикальное периодическое перемещение общей точки подвеса системы, a – амплитуда, p – высокая (по сравнению с собственными частотами свободных колебаний невозмущенной системы) частота вертикального перемещения, t – время.

При $s = 0$ подстановка в (1.1) выражения $\varphi_i = A_i \cos(\omega t + \theta)/l_i$ приводит исходную систему дифференциальных уравнений (1.1) к алгебраической системе

$$-\sum m_{i,j} A_j + \frac{g}{\omega^2} \frac{m_{1,i}}{l_i} A_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Определяя из (1.2) все собственные частоты невозмущенной системы ω_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) и подставляя их обратно в (1.2), получим

$$-\sum m_{i,j} A_j^{(\nu)} + \frac{g}{\omega_\nu^2} \frac{m_{1,i}}{l_i} A_i^{(\nu)} = 0 \quad (i, \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

где верхний индекс в скобках при амплитудах A_i определяет принадлежность той или иной амплитуды к соответствующей частоте ω_ν. Очевидно, что $A_1^{(\nu)} = 1$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$).

Рассматривая два фиксированных индекса $\nu = k, m$, умножая систему с верхним индексом k на $A_i^{(m)}$, а с индексом m на $A_i^{(k)}$, складывая уравнения в полученных системах и вычитая полученные уравнения, имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(A_j^{(m)}A_i^{(k)} - A_j^{(k)}A_i^{(m)}) + g\left(\frac{1}{\omega_k^2} - \frac{1}{\omega_m^2}\right)\sum \frac{m_{1,i}}{l_i}A_i^{(m)}A_i^{(k)} = 0$$

Поскольку матрица масс m_{ij} является диагонально-симметричной, то из полученного уравнения получаем два условия ортогональности для такого рода систем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_{1,i}}{l_i}A_i^{(k)}A_j^{(m)} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}A_j^{(m)}A_i^{(k)} = 0 \quad (k \neq m) \tag{1.3}$$

Вводя теперь в (1.1) замену переменных

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_i^{(k)}}{l_i}x_k$$

и используя (1.3), получим вместо системы связанных дифференциальных уравнений (1.1) отдельные уравнения

$$\ddot{x}_\nu + g_0\lambda_\nu x_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.4}$$

$$\lambda_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_{1,i}}{l_i}[A_i^{(\nu)}]^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}A_j^{(\nu)}A_i^{(\nu)}$$

В механике известно, что матрица жесткости консервативной системы является диагонально-симметричной.

Здесь удалось доказать, что для таких систем, какими являются последовательно шарнирно соединенные маятники, матрица их масс в линейной постановке задачи также является диагонально-симметричной. Благодаря этому обстоятельству доказаны новые условия ортогональности, позволяющие разделить исходную систему связанных дифференциальных уравнений на отдельные.

Обозначая для краткости $\tau = pt$, полагая, что $p \gg \sqrt{g\lambda_n}$ и считая, что $a \ll \lambda_i$ (min), уравнения (1.4) приводятся к виду

$$\ddot{x}_i = (pM_i + N_i)x_i \tag{1.5}$$

$$M_i = ap\lambda_i\cos\tau, \quad N_i = -g\lambda_i$$

Решения (1.5) следует искать в виде [8, 11]:

$$x_i = \xi_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p^k}U_{k,i}(\tau, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.6}$$

где функции ξ_i определяются из уравнений

$$\ddot{\xi}_i = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^k}\Phi_{k,i}(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.7}$$

В формуле (1.6) функции $U_{k,i}(\tau, t)$ имеют период, кратный 2π по τ и

$$\int_0^{2\pi} U_{k,i}d\tau = 0 \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.8}$$

Подстановка (1.6) и (1.7) в (1.5) и приравнивание членов одного порядка малости по степеням $(1/p)$ дает

$$\frac{\partial^2 U_{1,i}}{\partial \tau^2} = M_i \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\Phi_{0,i} = \frac{\partial^2 U_{2,i}}{\partial \tau^2} + 2\frac{\partial^2 U_{1,i}}{\partial \tau \partial t} = M_i U_{1,i} + N_i \xi_i \tag{1.9}$$

$$\Phi_{k,i} + \frac{\partial^2 U_{k+2,i}}{\partial \tau^2} + 2\frac{\partial^2 U_{k+1,i}}{\partial \tau \partial t} + \frac{\partial^2 U_{k,i}}{\partial t^2} = M_i U_{k+1,i} + N_i U_{k,i} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Интегрируя в (1.9) последовательно каждое из уравнений дважды по τ, с учетом (1.8) находим $U_{k,i}$, а усредняя по периоду τ – все $\Phi_{k,i}$.

Так, ограничиваясь первым приближением, с учетом введенных обозначений, имеем

$$U_{1,i} = -ap\lambda_i \xi_i \cos\tau, \quad \Phi_{0,i} = -(g\lambda_i + \tfrac{1}{2}a^2 p^2 \lambda_i^2)\xi_i$$

Ясно, что уравнения, описывающие медленное движение системы, будут иметь вид

$$\ddot{\xi}_i + (g\lambda_i + \tfrac{1}{2}a^2 p^2 \lambda_i^2)\xi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{1.10}$$

Частоты собственных колебаний с учетом быстрых вибраций увеличились

$$\Omega_i^2 = g\lambda_i + \tfrac{1}{2}a^2 p^2 \lambda_i^2 > g\lambda_i$$

Решениями (1.10) будут функции $\xi_i = \Delta_i \cos(\Omega_i t + \theta_i)$, где Δ_i и θ_i – константы, зависящие от начальных условий, а решениями исходной системы (1.1) в первом приближении являются

$$\varphi_i = \frac{1}{l_i}\sum_{k=1}^{n} A_i^{(k)}(1 - a\lambda_k \cos\tau)\Delta_k \cos(\Omega_k t + \theta_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{1.11}$$

В условиях невесомости ($g = 0$) система будет колебательной с частотами собственных колебаний

$$\Omega_i = ap\lambda_i / \sqrt{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{1.12}$$

а на каждую из масс m_i будет действовать сила локальной искусственной гравитации, возникающая от высокочастотных вибраций общей точки подвеса

$$F_i = \tfrac{1}{2} m_i a^2 p^2 \lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{1.13}$$

Поскольку частоты собственных колебаний системы под действием высокочастотных вибраций увеличиваются, то можно предположить, что общая устойчивость системы тоже увеличивается, причем настолько, что может существовать устойчивое положение маятников, перевернутых на 180°, в условиях земной гравитации.

Действительно, для перевернутой на 180° колебательной системы квадраты частот собственных колебаний описываются формулой

$$\overline{\Omega}_i^2 = -g\lambda_i + \tfrac{1}{2}a^2 p^2 \lambda_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{1.14}$$

и условиями устойчивости для каждой из масс системы являются $\tfrac{1}{2}a^2 p^2 \lambda_i > g$.

Так как $g\lambda_i$ есть собственные значения системы (1.4) и $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots \lambda_n$, то очевидно, что условием устойчивости всей системы в целом в этом перевернутом положении будет

$$2g/(a^2 p^2) < \lambda_1 \tag{1.15}$$

Рассматривая следующее приближение, получим

$$U_{2,i} = \frac{a^2p^2\lambda_i^2}{8}\xi_i \cos 2\tau, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$U_{3,i} = -\left[ap\lambda_i\left(\frac{a^2p^2\lambda_i}{16} + g\right)\cos\tau + \frac{a^3p^3\lambda_i^3}{144}\cos 3\tau\right]\xi_i,$$

$$\Phi_{1,i} = 0, \quad \Phi_{2,i} = -\frac{a^2p^2\lambda_i^3}{2}\left(\frac{a^2p^2\lambda_i}{16} + g\right)\xi_i$$

Уравнения (1.10) принимают вид

$$\ddot{\xi}_i + \overline{\Omega}_i^2\xi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.16}$$

Частоты собственных колебаний опять увеличиваются

$$\overline{\Omega}_i^2 = g\lambda_i + \frac{a^2p^2\lambda_i^2}{2} + \frac{a^2\lambda_i^3}{2}\left(\frac{a^2p^2\lambda_i}{16} + g\right) > \Omega_i^2 > g\lambda_i$$

а решением исходной системы (1.1) становится функция

$$\varphi_i = \frac{1}{l_i}\sum_{k=1}^{n} A_i^{(k)}\left\{1 - a\lambda_k\left[1 + \frac{\lambda_k}{p^2}\left(\frac{a^2p^2\lambda_k}{16} + g\right)\right]\cos\tau + \right.$$
$$\left. + \frac{a^2\lambda_k^2}{8}\cos 2\tau - \frac{a^3\lambda_k^3}{144}\cos 3\tau\right\}\Delta_k\cos(\Omega_k t + \theta_k) \tag{1.17}$$

В условиях невесомости ($g = 0$) система будет колебаться с частотами

$$\overline{\Omega}_i = \frac{ap\lambda_i}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{a^2\lambda_i^2}{16}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

а силы локальной искусственной гравитации, действующие на каждую из масс системы, будут иметь вид

$$\overline{F}_i = m_i\frac{a^2p^2\lambda_i}{2}\left(1 + \frac{a^2\lambda_i^2}{16}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.18}$$

Для перевернутой на 180° системы условиями устойчивого положения каждой из масс будут

$$\frac{2g}{a^2p^2} < \frac{1 + \frac{1}{16}a^2\lambda_i^2}{1 + \frac{1}{2}a^2\lambda_i^2}\lambda_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

а общим условием устойчивого перевернутого положения всей системы будет

$$\frac{2g}{a^2p^2} < \frac{16 + a^2\lambda_1^2}{16 + 8a^2\lambda_1^2}\lambda_1 \tag{1.19}$$

Действительно, если рассматривать случай $\lambda_k < \lambda_m$, то можно показать, что справедливо неравенство

$$\frac{16 + a^2\lambda_k^2}{2 + a^2\lambda_k^2}\lambda_k < \frac{16 + a^2\lambda_m^2}{2 + a^2\lambda_m^2}\lambda_m$$

или что $32+2a^2(\lambda_k-\lambda_m)^2-10a^2\lambda_k\lambda_m+4a^4\lambda_k^2\lambda_m^2>0$ очевидно, так как $4a^4\lambda_k^2\lambda_m^2-$ $-10a^2\lambda_k\lambda_m+32>0$.

Таким образом, выбирая минимальное значение λ_i, т.е. λ_1, получим условие (1.19), которое является обобщением условия (1.15).

Высшие приближения вносят малые, несущественные для практических приложений уточнения в полученные формулы.

Таким образом, найдены новые условия ортогональности (1.3) для задач типа (1.1), позволяющие в новых координатах искать решения не для систем, а для отдельных дифференциальных уравнений. В первом и втором приближениях получены решения (1.11) и (1.17) исходных дифференциальных уравнений при наличии вертикальной высокочастотной вибрации общей точки подвеса маятников.

Найдено уточненное условие устойчивости перевернутой на 180° системы маятников в условиях земной гравитации (1.19).

Доказано, что в условиях невесомости каждая из масс системы испытывает действие сил локальной искусственной гравитации, возникающей от высокочастотных колебаний общей точки подвеса системы.

2. Исследование системы "Маятник Челомея". "Маятником Челомея" называется механическая система, состоящая из прямого стержня и надетой на него с небольшим зазором шайбы, которая может свободно перемещаться по оси стержня. В [4] экспериментально показывалось, что высокочастотные вибрации шарнирного основания стержня могут привести к ее устойчивому перевернутому положению, причем шайба будет находиться на оси этого стержня в состоянии динамического равновесия. Также в работе были выведены нелинейные дифференциальные уравнения движения такой системы. Полученные уравнения решались на ЭВМ, чем косвенно подтверждались эксперименты.

Система дифференциальных уравнений, описывающая движение системы "Маятник Челомея", имеет вид [4, 5]:

$$\ddot{x}+n/m\dot{x}-x\dot{\varphi}^2+(g-ap^2\cos pt)\cos\varphi=0 \tag{2.1}$$
$$(J_0+J_1+mx^2)\ddot{\varphi}+k\dot{\varphi}+2mx\dot{x}\dot{\varphi}-(Ml_1+mx)(g-ap^2\cos pt)\sin\varphi=0$$

Здесь J_0 – момент инерции стержня относительно оси вращения, J_1+mx^2 – момент инерции шайбы, x – координата шайбы, отсчитываемая вдоль оси стержня, φ – угол поворота стержня при его колебаниях, M – масса стержня, l_1 – расстояние от центра масс стержня до его оси вращения, k – коэффициент трения всей системы, n – коэффициент трения шайбы о стержень, p и a – частота и амплитуда вертикальных колебаний шарнирной опоры стержня, g – ускорение силы тяжести, t – время.

Используя методы, изложенные в [8–11], система (1.1) в первом приближении может быть сведена к системе дифференциальных уравнений описывающих медленное движение исходной системы

$$\ddot{\xi}_1+n/m\dot{\xi}_1+g\cos\xi_2-\xi_1\dot{\xi}_2^2-\tfrac{1}{2}\psi\{\xi_1\psi-ap+2\alpha_2\xi_1^2[\tfrac{1}{2}ap-\xi_1\psi]\}\sin^2\xi_2=0$$
$$\ddot{\xi}_2+\alpha_3\dot{\xi}+2\alpha_2\xi_1\dot{\xi}_1\dot{\xi}_2-(\alpha_4+\alpha_5\omega\xi_1)\sin\xi_2-\tfrac{1}{2}\{2ap\alpha_2\xi_1\psi+ \tag{2.2}$$
$$+ap\alpha_7-\psi^2+2\alpha_2\xi_1\dot{\psi}[\tfrac{1}{2}\xi_1\psi-ap-2p\alpha_2\xi_1^2]\}\sin\xi_2\cos\xi_2=0$$

Здесь $\xi_1(t)$ – функция медленного движения для $x(t,pt)$, $\xi_2(t)$ – для $\varphi(t,pt)$, а коэффициенты α_i $(i=1,2,\ldots,7)$ и функция ψ определяются выражениями

$$\alpha_1=J_0+J_1,\quad \alpha_2=\frac{m}{\alpha_1},\quad \alpha_3=\frac{k}{\alpha_1},\quad \alpha_4=\frac{ml_1g}{\alpha_1},\quad \alpha_5=\frac{mg}{\alpha_1}$$
$$\alpha_6=\frac{Ml_1ap}{\alpha_1},\quad \alpha_7=\frac{map}{\alpha_1},\quad \psi=\alpha_6+\alpha_7\xi_1$$

l	x	ξ_1	x_*	A	$A_{\xi 2}$	A_*	ω	$\omega_{\xi 2}$	ω_*
0,1	0,062	0,063	0,061	0,073	0,073	0,073	248,76	246,00	245,00
	0,074	0,078	0,079	0,116	0,113	0,115	132,16	128,50	136,00
	0,081	0,089	0,090	0,142	0,129	0,150	98,35	79,50	118,00
0,15	0,083	0,089	0,090	0,094	0,089	0,085	309,82	301,00	300,00
	0,105	0,111	0,115	0,119	0,112	0,112	145,16	136,00	146,00
	0,126	0,134	0,130	0,126	0,123	0,130	84,16	79,00	82,50

Переменные x и ξ_1, а также φ и ξ_2 с точностью до величин порядка $1/p$ связаны соотношениями

$$x = \xi_1 + U_1 / p, \quad \varphi = \xi_2 + U_2 / p$$
$$U_1 = -ap \cos pt \cos \xi_2, \quad U_2 = -ap \cos pt \sin \xi_2 \tag{2.3}$$

Определяя ξ_1 и ξ_2 из (2.2), тем самым находим с помощью (2.3) решения исходной системы (2.1) с точностью до величин порядка $1/p$.

Численное решение системы исходных дифференциальных уравнений (2.1) и уравнений первого приближения (2.2) показывают высокую степень совпадения результатов. Эксперименты, проведенные на специальной установке, также подтверждают полученные данные.

Сравнение результатов, полученных тремя указанными выше способами, приведены в таблице для двух значений длин стержня 1 и при различных величинах параметрического возбуждения. В таблице введены следующие обозначения (в метрах и сек$^{-1}$, соответственно): x – среднее устойчивое положение шайбы на стержне; A и ω – амплитуда и частота колебаний стержня, полученные из численного решения тачных уравнений (2.1); ξ_1 – устойчивое положение шайбы на стержне; $A_{\xi 2}$ и $\omega_{\xi 2}$ – амплитуда и частота колебаний стержня, полученных в результате численного решения уравнений первого приближения (2.2); x_*, A_* и ω_* – соответствующие данные, полученные из эксперимента. Для расчетов величин, приведенных в таблице, использовался приведенный коэффициент трения шайбы со стержнем $n/m = 300$ с$^{-1}$.

Ниже показано влияние приведенного коэффициента трения n/m на среднее динамически устойчивое положение шайбы на стержне ξ_1, полученное из приближенных уравнений (2.2) для случая первой графы таблицы.

n/m	300	100	50	20	10	5
ξ_1	0,063	0,078	0,080	0,084	0,089	0,093

Видно, что с уменьшением значения коэффициента приведенного трения устойчивое положение шайбы располагается все выше по оси стержня и при $n/m = 0$ устойчивого положения просто не существует.

Таким образом, приведенные исследования показывают, что шайба на стержне действительно может иметь положения устойчивого динамического равновесия, экспериментально полученные в [4]. Предложенный метод позволяет с достаточной степенью точности определить решения для системы типа "маятник Челомея".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журнал экспер. и теор. физики. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–597.
2. *Jeffreys H.S.* Methods of Mathematical Physics. Cambridge: Univ. Press, 1950. 708 c.

3. *Челомей В.Н.* О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибрации // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110. № 3. С. 345–347.
4. *Челомей В.Н.* Парадоксы в механике, вызванные вибрациями // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 1. С. 62–67.
5. *Челомей В.Н.* Избранные труды. М.: Машиностроение, 1989. 335 с.
6. *Курбатов А.М., Челомей С.В., Хромушкин А.В.* К вопросу о маятнике В.Н. Челомея // Изв. АН МТТ. 1986. № 6. С. 63–65.
7. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
8. *Челомей С.В.* Динамическая устойчивость при высокочастотном параметрическом возбуждении // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257. № 4. С. 853–858.
9. *Кулик С.В., Челомей С.В., Хромушкин А.В.* Об одной задаче академика В.Н. Челомея // Механика в авиации и космонавтике. М.: Машиностроение, 1995. С. 101–104.
10. *Боголюбов Н.Н. (мл.), Садовников Б.И.* Об одном варианте метода усреднения // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия, 1961. № 3. С. 24–34.
11. *Chelomey S.V.* About the effect of artificial gravity, arising due to the action of high-frequency vibrations on the oscillation system // J. Biomech. 1998. V. 31. Supp.1. P. 80.

Москва

Поступила в редакцию
13.04.1999