

УДК 624.07:534.1

© 1999 г. А.И. ПОЛУНИН

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ УПРУГОГО
 ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КОЛЬЦА ПРИ НАЛИЧИИ ДВУХ ОПОР**

В работе; при использовании гипотезы нерастяжимой средней линии, получены зависимости для определения собственных частот колебаний кольца, вращающегося на двух опорах. Используются уравнения Лагранжа второго рода с неопределенными множителями. Проводится сравнение результатов теоретических расчетов с экспериментом.

При вращении свободного упругого кольца в нем возникает прецессия стоячих волн [1]. В этой связи вызывает интерес поведение кольца, вращающегося на двух опорах (фиг. 1).

Введем неподвижную систему координат OX_H , точка O которой находится в центре недеформированного кольца, и подвижную OX_C , жестко связанную с кольцом (фиг. 1). Положение оси OX_C относительно OX_H равно Ωt , где t – время, Ω – угловая скорость вращения кольца. Положение точек средней линии деформированного кольца в связанной с ним системе координат определяем координатами UV в локальной системе координат, задаваемой углом θ относительно оси OX_C .

Радиальное перемещение точки средней линии кольца зададим в виде

$$U = \sum_{i=1}^N a_i(t) \cos(i(\theta + \varphi_i(t))) + \sum_{i=1}^N b_i(t) \sin(i(\theta + \varphi_i(t))) \tag{1}$$

где $a_i(t)$, $b_i(t)$, $\varphi_i(t)$ – неизвестные функции времени, подлежащие определению; N – число учитываемых гармоник.

Функция $\varphi_i(t)$ задает прецессию стоячих волн в кольце, вследствие их инерционных свойств [1]. Величину тангенциального перемещения точек средней линии находим из условия нерастяжимости средней линии

$$V = -\int U d\theta$$

Тогда имеем

$$V = -\sum_{i=1}^N \frac{a_i}{i} \sin(i(\theta + \varphi_i(t))) + \sum_{i=1}^N \frac{b_i}{i} \cos(i(\theta + \varphi_i(t))) \tag{2}$$

Уравнения, описывающие поведение вращающегося на опорах кольца, определяем по зависимостям

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial a_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^2 \lambda_i e_{ij} \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{b}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial b_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial b_j} = \sum_{i=1}^2 \lambda_i z_{ij} \tag{4}$$

где T, Π – соответственно кинетическая и потенциальная энергия кольца; λ_1, λ_2 – неопределенные множители Лагранжа; e_{ij} – производная i -го уравнения связи по координате a_j ; z_{ij} – производная i -го уравнения связи по координате b_j ; точка означает дифференцирование по времени.

Кинетическую и потенциальную энергии вращающегося кольца вычисляем соответственно по зависимостям

$$T = \frac{r\rho F}{2} \int_0^{2\pi} [(\dot{V} + \Omega r + \Omega u)^2 + (\dot{u} - \Omega V)^2] d\theta$$

$$\Pi = \frac{EJ}{2r^3} \int_0^{2\pi} \left(-U - \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right)^2 d\theta$$

где r – радиус средней линии; ρ – плотность материала кольца; F – площадь сечения кольца; E – модуль Юнга; J – осевой момент инерции сечения кольца.

Обозначим $c_j = 1 + 1/j^2$, $n_j = j^2 - 1$, $k_j = j + 1/j$, $l_j = 1 + j^2$. Тогда дифференциальные уравнения, описывающие поведение свободного кольца, имеют вид

$$c_j \ddot{a}_j + \left(2\dot{\phi}_j k_j - \frac{4\Omega}{j} \right) \dot{b}_j + (\gamma n_j^2 - \dot{\phi}_j^2 l_j + 4\Omega \dot{\phi}_j - \Omega^2 c_j) a_j + k_j \ddot{b}_j b_j = 0 \quad (5)$$

$$c_j \ddot{b}_j + \left(\frac{4\Omega}{j} - 2\dot{\phi}_j k_j \right) \dot{a}_j - k_j \ddot{b}_j a_j + (\gamma n_j^2 - \dot{\phi}_j^2 l_j + 4\Omega \dot{\phi}_j - \Omega^2 c_j) b_j = 0 \quad (6)$$

$$\gamma = EJ/(r^4 \rho F)$$

В уравнениях (5), (6) периодические решения будут в том случае, если коэффициенты при \dot{a}_j , \dot{b}_j равны нулю. Из этого условия имеем формулы для угловой скорости прецессии волн $\dot{\phi} = 2\Omega/(1 + j^2)$, что совпадает с результатами, полученными в [1].

Найдем параметры колебаний кольца, вращающегося на двух опорах. В точках касания опор кольцом радиальные перемещения равны нулю, что дает уравнения

$$\sum_{i=1}^N a_i \cos(i(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_i)) + \sum_{i=1}^N b_i \sin(i(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_i)) = 0 \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^N a_i \cos(i(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_i)) + \sum_{i=1}^N b_i \sin(i(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_i)) = 0 \quad (8)$$

Здесь 2α – угол между двумя опорами (фиг. 1). Производные уравнений связи по обобщенным координатам

$$e_{1j} = \cos(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_j)), \quad e_{2j} = \cos(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_j))$$

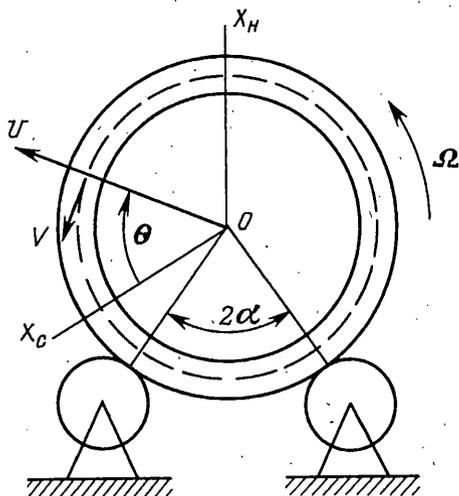
$$z_{1j} = \sin(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_j)), \quad z_{2j} = \sin(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_j))$$

Используя зависимости (3), (4) получим уравнения поведения кольца, вращающегося на двух опорах

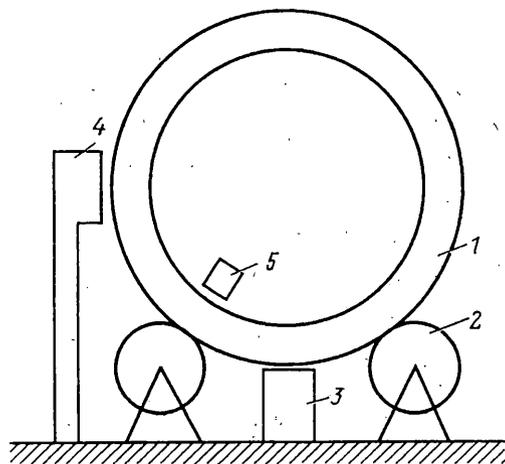
$$c_j \ddot{a}_j + \left(2\dot{\phi}_j k_j - 4\Omega/j \right) \dot{b}_j + (\gamma n_j^2 - \dot{\phi}_j^2 l_j + 4\Omega \dot{\phi}_j - \Omega^2 c_j) a_j + k_j \ddot{b}_j b_j = \\ = \lambda_1 \cos(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_j)) + \lambda_2 \cos(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_j)) \quad (9)$$

$$c_j \ddot{b}_j + \left(4\Omega/j - 2\dot{\phi}_j k_j \right) \dot{a}_j - k_j \ddot{b}_j a_j + (\gamma n_j^2 - \dot{\phi}_j^2 l_j + 4\Omega \dot{\phi}_j - \Omega^2 c_j) b_j = \\ = \lambda_1 \sin(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_j)) + \lambda_2 \sin(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_j)) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (10)$$

которые решаются совместно с условиями связи (7), (8).



Фиг. 1



Фиг. 2

В этой системе неизвестными являются функции φ_j , задающие прецессию гармоник колебаний. В отличие от свободно вращающегося кольца в кольце с опорами область прецессии гармоник ограничена опорами, т.е. может происходить в диапазоне углов $2\pi - 2\alpha$. Поэтому возможны следующие варианты прецессии. Первый – скорость прецессии равна угловой скорости вращения кольца, и второй – волны прецессируют в диапазоне углов $2\pi - 2\alpha$, т.е. совершают периодические колебания в этом диапазоне.

Рассмотрим первый вариант. Тогда $\dot{\varphi}_j = \Omega t$, $\ddot{\varphi}_j = \Omega$ и уравнения (9), (10), (7), (8) примут вид

$$c_j \ddot{a}_j + (2\Omega k_j - 4\Omega / j) \dot{b}_j + (\gamma n_j^2 - \Omega^2 l_j + 4\Omega^2 - \Omega^2 c_j) a_j = \lambda_1 \cos(j(\pi - \alpha)) + \lambda_2 \cos(j(\pi + \alpha)) \quad (11)$$

$$c_j \ddot{b}_j + (4\Omega / j - 2\Omega k_j) \dot{a}_j + (\gamma n_j^2 - \Omega^2 l_j + 4\Omega^2 - \Omega^2 c_j) b_j = \lambda_1 \sin(j(\pi - \alpha)) + \lambda_2 \sin(j(\pi + \alpha)) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^N a_i \cos(i(\pi - \alpha)) + \sum_{i=1}^N b_i \sin(i(\pi - \alpha)) = 0 \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^N a_i \cos(i(\pi + \alpha)) + \sum_{i=1}^N b_i \sin(i(\pi + \alpha)) = 0 \quad (14)$$

Введем обозначения $m_j = 2\Omega k_j - 4\Omega / j$, $T_j = \gamma n_j^2 - \Omega^2 l_j + 4\Omega^2 - \Omega^2 c_j$. Преобразуем зависимости (13), (14), разрешив их относительно a_N, b_N . Получим

$$[a_N, b_N]^T = P \bar{a}_{N-1} + R \bar{b}_{N-1} \quad (15)$$

где $P = ZD$; $R = ZF$; матрица D имеет элементы $d_{1i} = -\cos(i(\pi - \alpha))$, $d_{2i} = -\cos(i(\pi + \alpha))$, а матрица F : $f_{1i} = -\sin(i(\pi - \alpha))$, $f_{2i} = -\sin(i(\pi + \alpha))$ ($i = 1, 2, \dots, N - 1$):

$$Z = \begin{bmatrix} \cos(N(\pi - \alpha)) & \sin(N(\pi - \alpha)) \\ \cos(N(\pi + \alpha)) & \sin(N(\pi + \alpha)) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\bar{a}_{N-1}^T = [a_1, a_2, \dots, a_{N-1}], \quad \bar{b}_{N-1}^T = [b_1, b_2, \dots, b_{N-1}]$$

Исключим $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$. Положим в (11), (12) $j = 1$. Получим

$$c_1 \ddot{a}_1 + T_1 a_1 = \lambda_1 \cos(\pi - \alpha) + \lambda_2 \cos(\pi + \alpha)$$

$$c_1 \ddot{b}_1 + T_1 b_1 = \lambda_1 \sin(\pi - \alpha) + \lambda_2 \sin(\pi + \alpha)$$

Используя условия $\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi + \alpha)$, $\sin(\pi - \alpha) = -\sin(\pi + \alpha)$ найдем неизвестные

$$\lambda_1 = \frac{0,5c_1}{\cos(\pi - \alpha)} \ddot{a}_1 + \frac{0,5T_1}{\cos(\pi - \alpha)} a_1 + \frac{0,5c_1}{\sin(\pi - \alpha)} \ddot{b}_1 + \frac{0,5T_1}{\sin(\pi - \alpha)} b_1$$

$$\lambda_2 = \frac{0,5c_1}{\cos(\pi - \alpha)} \ddot{a}_1 + \frac{0,5T_1}{\cos(\pi - \alpha)} a_1 - \frac{0,5c_1}{\sin(\pi - \alpha)} \ddot{b}_1 - \frac{0,5T_1}{\sin(\pi - \alpha)} b_1$$

Подставим формулы для λ_1, λ_2 в правые части (11), (12):

$$\lambda_1 \cos(j(\pi - \alpha)) + \lambda_2 \cos(j(\pi + \alpha)) = -\frac{(-1)^{j+1} c_1 \cos(j\alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} \ddot{a}_1 - \frac{(-1)^{j+1} T_1 \cos(j\alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} a_1$$

$$\lambda_1 \sin(j(\pi - \alpha)) + \lambda_2 \sin(j(\pi + \alpha)) = -\frac{(-1)^j c_1 \sin(j\alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} \ddot{b}_1 - \frac{(-1)^j T_1 \sin(j\alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} b_1$$

С учетом этих зависимостей уравнения (11), (12) примут вид

$$\frac{(-1)^{j+1} c_1 \cos(j\alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} \ddot{a}_1 + c_j \ddot{a}_j + m_j \ddot{b}_j + \frac{(-1)^{j+1} T_1 \cos(j\alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} a_1 + T_j a_j = 0 \quad (16)$$

$$\frac{(-1)^j c_1 \sin(j\alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} \ddot{b}_1 + c_j \ddot{b}_j - m_j \ddot{a}_j + \frac{(-1)^j T_1 \sin(j\alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} b_1 + T_j b_j = 0 \quad (j = 2, 3, \dots, N) \quad (17)$$

Воспользуемся зависимостью (15) для исключения переменных a_N, b_N из уравнений (16), (17). Положим в этих уравнениях $j = N$. Тогда имеем

$$\frac{(-1)^{N+1} c_1 \cos(N\alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} \ddot{a}_1 + c_N \ddot{a}_N + m_N \ddot{b}_N + \frac{(-1)^{N+1} T_1 \cos(N\alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} a_1 + T_N a_N = 0 \quad (18)$$

$$\frac{(-1)^N c_1 \sin(N\alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} \ddot{b}_1 + c_N \ddot{b}_N - m_N \ddot{a}_N + \frac{(-1)^N T_1 \sin(N\alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} b_1 + T_N b_N = 0 \quad (19)$$

Из (15) получим

$$\dot{a}_N = \sum_{i=1}^{N-1} P_i \dot{a}_i + \sum_{i=1}^{N-1} R_i \dot{b}_i, \quad \dot{b}_N = \sum_{i=1}^{N-1} P_{2i} \dot{a}_i + \sum_{i=1}^{N-1} R_{2i} \dot{b}_i \quad (20)$$

$$\ddot{a}_N = \sum_{i=1}^{N-1} P_i \ddot{a}_i + \sum_{i=1}^{N-1} R_i \ddot{b}_i, \quad \ddot{b}_N = \sum_{i=1}^{N-1} P_{2i} \ddot{a}_i + \sum_{i=1}^{N-1} R_{2i} \ddot{b}_i \quad (21)$$

Обозначим

$$Q_j = \frac{(-1)^{j+1} c_1 \cos(j\alpha)}{\cos(\pi - \alpha)}, \quad E_j = \frac{(-1)^{j+1} T_1 \cos(j\alpha)}{\cos(\pi - \alpha)}$$

$$X_j = \frac{(-1)^j c_1 \sin(j\alpha)}{\sin(\pi - \alpha)}, \quad Y_j = \frac{(-1)^j T_1 \sin(j\alpha)}{\sin(\pi - \alpha)}$$

Угол	Угловая скорость	Резонансные частоты			
		Эксперимент		Теория	
		ω_1^*	ω_2^*	ω_1	ω_2
26,296	0	35,16	92,10	40,44	83,41
31,203	0	37,68	99,14	42,64	90,51
26,296	0,42	47,1	87,92	40,44	83,41
26,296	0,55	43,96	94,20	40,43	83,38
31,203	0,54	37,68	104,06	42,64	90,48
31,203	2,1	36,76	102,60	42,50	90,20

Тогда подставляя (20), (21) в (18), (19) получим окончательную систему дифференциальных уравнений для определения a_j, b_j :

$$Q_j \ddot{a}_j + c_j \ddot{a}_j + m_j \dot{b}_j + E_j a_j + T_j a_j = 0$$

$$X_j \ddot{b}_j + c_j \ddot{b}_j - m_j \dot{a}_j + Y_j b_j + T_j b_j = 0 \quad (j = 2, 3, \dots, N-1)$$

$$(Q_N + c_N P_{11}) \ddot{a}_1 + \sum_{i=2}^{N-1} c_N P_{1i} \ddot{a}_i + \sum_{i=1}^{N-1} c_N R_{1i} \ddot{b}_i + \sum_{i=1}^{N-1} m_N P_{2i} \dot{a}_i + \sum_{i=1}^{N-1} m_N R_{2i} \dot{b}_i +$$

$$+(E_N + T_N P_{11}) a_1 + \sum_{i=2}^{N-1} T_N P_{1i} a_i + \sum_{i=1}^{N-1} T_N R_{1i} b_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} c_N P_{2i} \ddot{a}_i + (X_N + c_N R_{21}) \ddot{b}_1 + \sum_{i=2}^{N-1} c_N R_{2i} \ddot{b}_i + \sum_{i=1}^{N-1} (-m_N P_{1i}) \dot{a}_i + \sum_{i=1}^{N-1} (-m_N R_{1i}) \dot{b}_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} T_N P_{2i} a_i + (Y_N + T_N R_{21}) b_1 + \sum_{i=2}^{N-1} T_N R_{2i} b_i = 0$$

Данная система является системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и в матричном виде может быть записана

$$K_2 \ddot{q} + K_1 \dot{q} + K_0 q = 0$$

где q – вектор переменных a_j, b_j . Собственные частоты колебаний находим из частотного уравнения этой системы.

Для проверки точности полученной математической модели был проведен физический эксперимент, результаты которого сравнивались с расчетами.

Для физического эксперимента использовалось кольцо с диаметром средней линии $r = 0,18619$ м, толщиной $b = 1,2073 \cdot 10^{-3}$ м, шириной $a = 0,0605$ м, модулем упругости материала $E = 1,1857 \cdot 10^{11}$ н/м². Схема установки представлена на фиг. 2 (1 – вращающееся кольцо, 2 – роликоопоры, 3 – датчик для измерения угловой скорости кольца, 4 – датчик перемещений, 5 – вибратор и датчик перемещений).

Вращение кольца задавалось с помощью электродвигателя, для возбуждения колебаний использовался вибратор с регулируемой частотой колебаний. Измерение частоты колебаний кольца и вибратора осуществлялось магниторезистивными датчиками с диапазоном измерения частот 0–1 МГц. Фиксировались частота вибратора и резонансная частота кольца. Информация с датчиков подавалась на аналого-цифровой преобразователь и записывалась в ЭВМ для дальнейшей обработки. В таблице представлены некоторые результаты физического эксперимента (ω^*) и теоретических расчетов (ω) при разных угловых скоростях вращения кольца Ω в рад/с и углах α между опорами в градусах. Символами ω_1, ω_2 обозначены соответственно первая и вторая резонансные

частоты колебаний кольца в рад/с. Бралось число гармоник $N = 8$. Увеличение числа гармоник не давало повышения точности определения ω_1, ω_2 .

Отличие результатов эксперимента и теоретических расчетов можно объяснить несколькими причинами. Во-первых, трудностями определения значения возбуждающей частоты, при которой наступает точное значение резонанса. Особенно это относится к первой резонансной частоте, так как при приближении к ней еще до наступления резонанса возникали несимметричные колебания большой амплитуды, и кольцо сходило с опор. Второй причиной является невыполнение гипотезы нерастяжимости средней линии для данной геометрии кольца. Дальнейшие исследования показали, что учет растяжимости дает повышение точности определения частот. Кроме того, на точность эксперимента оказывают влияние помехи, вносимые вибратором в угловую скорость вращения кольца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.

Белгород

Поступила в редакцию
5.02.1998