МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1999

УДК 624.07:534.1

© 1999 г. М.С. ГАБРИЕЛЯН, Л.А. МОВСИСЯН

К ОПТИМАЛЬНОМУ УПРАВЛЕНИЮ ДВИЖЕНИЕМ УПРУГИХ СИСТЕМ

Изучаются вопросы оптимального управления движением упругих систем. Изложение ведется для изгибных колебаний балки, однако, как следует из хода решений, они применимы и для других типов деформаций, в том числе и для ряда двумерных задач.

Если задачи управления движением материальных точек исследованы сравнительно давно [1], то для твердых деформируемых тел в предлагаемой постановке начаты только недавно [2,3].

В настоящей статье рассматриваются три типа задач. Первая задача – по сути аналог классической задачи управления на случай сплошной среды. Требуется в определенный момент времени прогиб и скорость во всех точках балки привести в заданное состояние, при этом минимизируя квадратичный функционал от действующей нагрузки. При второй постановке уже требуется привести в заданное положение только какую-нибудь точку балки. Здесь рассматриваются два варианта минимизируемого функционала – квадратичный от действующей нагрузки и минимума работы внешней нагрузки, причем последнее условие оказалось недостаточным для однозначного определения оптимальной нагрузки и в качестве дополнительного условия берется еще квадратичный функционал.

Третья задача – статики, и заглавие статьи к ней можно отнести условно. Однако следует учесть, что и здесь кроме общности поставленного вопроса – приведение точек балки из одного состояния в другое – общим является и аппарат исследований: задачи решаются при помощи проблемы моментов [1]. В этом отношении примечателен факт использования метода решения динамических задач в задаче статики. Здесь вопрос ставится следующим образом: ряд точек балки надо привести в заданные положения и при этом минимизировать некоторый функционал. В качестве таковых здесь уже берутся три классических варианта функционалов.

1. Если представить решение уравнения движения балки

$$\frac{EJ}{l^4}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q(x,t) \tag{1.1}$$

в виде ряда по фундаментальным функциям

$$w(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty} f_m(t)X_m(x) \tag{1.2}$$

то для $f_m(t)$ получится система

$$d^2 f_m / dt^2+\omega_m^2 f_m = F_m(t)\ \ (m=1,2,\ldots) \tag{1.3}$$

с начальными условиями

$$f_m(0)=f_m^{(1)},\ df_m(0)/dt=f_m^{(2)} \tag{1.4}$$

$$\omega_m^2 = \frac{EJ}{\rho S}\frac{\lambda_m^4}{l^4}, \quad F_m(t) = \frac{1}{\rho S D_m}\int_a^b q(x,t)X_m(x)dx$$

$$D_m = \int_0^1 X_m^2(x)dx$$

где λ_m – собственные значения соответствующей однородной задачи [4]. Безразмерная координата $x \in [0,1]$. Внешнюю нагрузку $q(x, t)$ можно предположить действующей на некотором участке $[a, b]$ ($a \geqslant 0$, $b \leqslant 1$) и состоящей из двух слагаемых – искомого $q_1(x, t)$, обеспечивающего управление, и заданного – $q_2(x, t)$, последнее может и отсутствовать.

2. Первая задача, аналог классической задачи управления, ставится следующим образом. При известных начальных условиях и заданной нагрузке $q_2(x, t)$ осуществляется некоторое движение (в дальнейшем не будет подчеркнуто, что $F_m(t)$ может состоять из двух частей). Требуется в момент времени $t = T$ с помощью нагрузки $q_1(x, t)$ привести прогиб и его скорость к заданным значениям

$$w(x,T) = \Phi_1(x), \quad \frac{\partial w(x,T)}{\partial t} = \Phi_2(x) \tag{2.1}$$

при этом минимизируя функционал

$$I = \int_0^T\int_a^b q^2(x,t)dxdt \tag{2.2}$$

В обозначениях

$$Y_m(t) = \int_0^t F_m(\tau)\sin\omega_m\tau d\tau, \quad Z_m(t) = \int_0^t F_m(\tau)\cos\omega_m\tau d\tau \tag{2.3}$$

решение системы (1.3) с условиями (1.4) будет

$$f_m(t) = \left[f_m^{(1)} - \frac{1}{\omega_m}Y_m(t)\right]\cos\omega_m t + \frac{1}{\omega_m}[f_m^{(2)} + Z_m(t)]\sin\omega_m t \tag{2.4}$$

Тогда условия (2.1) с учетом (1.2) и (2.4) дадут

$$A_m = Y_m(T) = b_m\sin\omega_m T - a_m\omega_m\cos\omega_m T + \omega_m f_m^{(1)}$$

$$B_m = Z_m(T) = a_m\omega_m\sin\omega_m T + b_m\cos\omega_m T - f_m^{(2)} \tag{2.5}$$

Здесь a_m и b_m – коэффициенты рядов соответственно функций $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ по собственным функциям $X_m(x)$.

Учитывая ортогональность $X_m(x)$ и независимость $F_m(t)$, минимизация функционала (2.2) сводится к минимизации каждого из его слагаемого, т.е.

$$I_m = \int_0^T F_m^2(t)dt \tag{2.6}$$

Поставленную задачу оптимального управления целесообразно решить при помощи проблемы моментов [1].

После совершения необходимых операций для минимального значения нормы получается

$$g_0^2 = (\alpha_m\beta_m - \gamma_m^2)/(2\Phi_m) \tag{2.7}$$

$$\alpha_m = T + \frac{1}{2\omega_m}\sin 2\omega_m T, \quad \beta = T - \frac{1}{2\omega_m}\sin 2\omega_m T$$

$$\gamma_m = \frac{1}{\omega_m}\sin^2 \omega_m T, \quad \Phi_m = \alpha_m A_m^2 - 2\gamma_m A_m B_m + \beta_m B_m^2$$

Из последних формул следует, что $g_0^2 > 0$ и для оптимального воздействия будем иметь

$$F_m^{(0)}(t) = \frac{2}{\alpha_m\beta_m - \gamma_m^2}[(\beta_m B_m - \gamma_m A_m)\cos\omega_m t + (\alpha_m A_m - \gamma_m B_m)\sin\omega_m t] \tag{2.8}$$

Так как $F_m^{(0)}(t)$ имеют порядок A_m и B_m, то сумма ряда по I_m из (2.6) абсолютно сходится. Следовательно, функционал, характеризующий процесс управления – конечная величина и выражение оптимальной нагрузки определится формулой

$$q^{(0)}(x,t) = \rho S \sum_{m=1}^{\infty} F_m^{(0)}(t) X_m(x) \tag{2.9}$$

3. Практический интерес представляет также такая задача, когда следует в заданный момент времени привести в заданное положение только точку $w(x_1, T) = w_1$. В обозначениях (2.3) последнее условие будет

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(f_m^{(1)} - \frac{A_m}{\omega_m}\right)\cos\omega_m T + \frac{1}{\omega_m}(f_m^{(2)} + B_m)\sin\omega_m T\right]\cdot X_m(x_1) = w_1 \tag{3.1}$$

Для задач статики функционал (2.2) в конечном счете представляет собой работу, чего нельзя сказать про динамику, поэтому интересно попытаться данную задачу решить, минимизируя работу внешней нагрузки за время $[0, T]$:

$$A = S\int_0^T\int_a^b q(x,t)\frac{\partial w}{\partial t}dx\,dt =$$

$$= \rho S^2 l D_m \sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(-f_m^{(1)}\omega_m + \frac{1}{2}A_m\right)A_m + \left(f_m^{(2)} + \frac{1}{2}B_m\right)B_m\right] \tag{3.2}$$

Так как (3.2) – вогнутый функционал от A_m и B_m, а выражение (3.1) линейно относительно этих же переменных, то минимум (3.2) при (3.1) достижим, и его можно найти при помощи неопределенных множителей Лагранжа. После совершения всех процедур для новых A_m и B_m получится

$$A_m = f_m^{(1)}\omega_m - \frac{w_1\cos\omega_m T}{\omega_m R D_m}, \quad B_m = -f_m^{(2)} + \frac{w_1\sin\omega_m T}{\omega_m R D_m}$$

$$R = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k(x_1)}{\omega_k^2 D_m} \tag{3.3}$$

Ряд R сходится абсолютно, и A_m и B_m имеют порядок $O(m^{-2})$.

Как видно из последних формул, условие минимума затраченной работы не обеспечивает однозначного определения оптимальной нагрузки и есть необходимость дополнительного условия на управляющее воздействие. В качестве такового помимо (3.2) берется также (2.2). Тогда после произведения всех необходимых выкладок для оптимального воздействия получится формула (2.8), но уже с новыми A_m и B_m по (3.3).

Эту же задачу при условии (2.2) можно решить как изопериметрическую задачу. В этом случае оптимальное управляющее воздействие имеет вид

$$F_m^{(0)}(t)=\frac{w_1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(f_n^{(1)}\cos\omega_n T+\frac{1}{\omega_n}f_n^{(2)}\sin\omega_n T\right)}{\sum\limits_{n=1}\int\limits_0^T H_n^2(t)dt}H_m(t)$$

$$H_m(t)=\frac{1}{\omega_m}X_m(x_1)\sin\omega_m(T-t) \tag{3.4}$$

Примечание. При последней постановке, если требуется привести в заданные состояния ряд точек, задачу можно решить при помощи проблемы моментов.

4. Приведенные выше решения задач иллюстрируются на примере консольной балки – один конец заделан, а второй свободен. Ей сообщается начальный прогиб в начальный момент по первой форме колебания [4]:

$$X_1(x)=(\operatorname{sh}\lambda_1+\sin\lambda_1)(\operatorname{ch}\lambda_1 x-\cos\lambda_1 x)-(\operatorname{sh}\lambda_1 x-\sin\lambda_1 x)(\operatorname{ch}\lambda_1+\cos\lambda_1) \tag{4.1}$$

где λ_1 – первый корень уравнения $\operatorname{ch}\lambda\cos\lambda+1=0$, т.е.

$$f_1^{(1)}=w_1,\ \ f_m^{(1)}=f_m^{(2)}=f_1^{(2)}=0\ \ (m=2,3,\ldots) \tag{4.2}$$

Без управляющего воздействия в момент $t=T=2\pi/\omega_1$ (ω_1 – первая частота) балка должна находиться в первоначальном положении. Теперь, если по первой постановке потребовать, чтобы она находилась в противоположном положении

$$a_1=-w_1,\ \ b_1=a_m=b_m=0\ \ (m=2,3\ldots) \tag{4.3}$$

согласно формулам (2.5), (2.11) и (2.12), оптимальное воздействие определится

$$F_1^{(0)}(t)=\frac{2\omega_1^2 w_1}{\pi}\sin\omega_1 t,\ \ F_m^{(0)}(t)=0\ \ (m=2,3,\ldots) \tag{4.4}$$

При второй постановке требуется, чтобы только крайняя точка $x=1$ находилась в противоположном положении, т.е. $w(1,T)=-w_1$ в момент $T=2\pi/\omega_1$. Здесь выражение для оптимального воздействия довольно громоздкое и необходимые для $F_m^{(0)}(t)$ величины определятся так:

$$\begin{gathered}A_1=\omega_1 w_1+w_1/(\omega_1 RD_1),\quad B_1=0\\ A_m=\frac{w_1}{\omega_m RD_m}\cos\frac{2\pi\omega_m}{\omega_1},\quad B_m=-\frac{w_1}{\omega_m RD_m}\sin\frac{2\pi\omega_m}{\omega_1}\\ \alpha_1=T,\ \ \beta_1=T,\ \ \gamma_1=0\\ \alpha_m=T+\frac{1}{2\omega_m}\sin\frac{4\pi\omega_m}{\omega_1},\quad \beta_m=T-\frac{1}{2\omega_m}\sin\frac{4\pi\omega_m}{\omega_1}\\ \gamma_m=\frac{1}{\omega_m}\sin^2\frac{2\pi\omega_m}{\omega_1}\end{gathered} \tag{4.5}$$

5. В случае статики, когда внешняя нагрузка действует на некотором участке $[a,b]\subset[0,1]$, для прогиба имеется выражение

$$w(x)=\int\limits_a^x Q(\xi)u_1(x,\xi)d\xi+\int\limits_a^b Q(\xi)u_2(x,\xi)d\xi \tag{5.1}$$

Первое слагаемое есть частное решение от действующей нагрузки $Q(x) = q(x)l^4(EJ)^{-1}$, а второе слагаемое соответствует решению однородной части уравнения изгиба после удовлетворения краевым условиям. При различных краевых условиях различными будут только $u_2(x, \xi)$. Например, для балки с одним заделанным и другим свободным концами

$$u_1(x,\xi) = \tfrac{1}{6}(x-\xi)^3, \quad u_2(x,\xi) = \tfrac{1}{6}x^2(3\xi - x) \tag{5.2}$$

Теперь пусть требуется привести точки x_i ($0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant 1$, $i = \overline{1,n}$) в определенные заданные положения

$$w_i = w(x_i), \quad x_i \in [0,1], \quad i = \overline{1,n} \tag{5.3}$$

Задача ставится следующим образом: требуется минимизировать некоторый функционал на решениях (5.1), удовлетворяющих условиям (5.3). В зависимости от выбора этого функционала различными будут и получаемые решения. В качестве таковых помимо (2.2) берутся еще два случая.

1. Введя обозначения

$$\upsilon_i(\xi) = \begin{cases} u_1(x_i,\xi) + u_2(x_i,\xi), & 0 \leqslant \xi \leqslant x_i \\ u_2(x_i,\xi), & x_i \leqslant \xi \leqslant 1 \end{cases} \tag{5.4}$$

и учитывая, что

$$Q(x) = \begin{cases} Q(x), & x \in [a,b] \\ 0, & [0,1] \setminus [a,b] \end{cases} \tag{5.5}$$

условия (5.3) можно записать в виде

$$\int_a^b \upsilon_i(\xi) Q(\xi) d\xi = w_i \quad (i = \overline{1,n}) \tag{5.6}$$

Если в качестве минимизируемого функционала брать (2.2):

$$I_1(Q(\cdot)) = \int_a^b Q^2(x)dx \tag{5.7}$$

то при условиях (5.6) решение поставленной задачи будет [1]:

$$Q_1^{(0)}(x) = \frac{1}{g_0^2} \sum_{i=1}^n h_i^{(0)} \upsilon_i(x), \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{5.8}$$

$$g_0^2 = \min_{\sum_{i=1}^n h_i w_i = 1} \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n h_i \upsilon_i(x) \right]^2 dx \tag{5.9}$$

а постоянные $h_i^{(0)}$ – это те из h_i, которые минимизируют (5.9).

Линейная независимость сужения непрерывных функций $\upsilon_i(x)$ на отрезке $[a, b]$ является достаточным условием для выполнения условия $g_0^2 > 0$.

2. Если в качестве функционала брать

$$I_2(Q(\cdot)) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |Q(x)| \tag{5.10}$$

то решение поставленной задачи будет

$$Q_2^{(0)}(x) = \frac{1}{g_0}\operatorname{sign}\sum_{i=1}^{n} h_i^{(0)} v_i(x), \quad x \in [a,b]$$

$$g_0 = \min_{\sum_{i=1}^{n} h_i w_i = 1} \int_a^b \left|\sum_{i=1}^{n} h_i v_i(x)\right| dx \tag{5.11}$$

а числа $h_i^{(0)}$ минимизируют (5.11). Линейная независимость функций $v_i(x)$ на $[a, b]$ является достаточным условием для $g_0 > 0$.

3. Если же в качестве функционала брать

$$I_3(Q(\cdot)) = \int_a^b |Q(x)| dx \tag{5.12}$$

то решением задачи будет

$$Q_3^{(0)}(x) = \sum_{j=1}^{n} P_j \delta(x - x_j), \quad x_j \in [a,b] \tag{5.13}$$

т.е. в этом случае оптимальная нагрузка осуществляется в виде сосредоточенных сил.

В (5.13) $x_j \in [a, b]$ определяется из условия

$$g_0 = \left|\sum_{i=1}^{n} h_i^{(0)} v_i(x_j)\right| = \min_{\sum_{i=1}^{n} h_i w_i = 1} \max_{x \in [a,b]} \left|\sum_{i=1}^{n} h_i v_i(x)\right| \tag{5.14}$$

Число $k(j = \overline{1,k})$ конечное, так как функции $v_i(x)$ – кусочно-аналитические и $g_0 > 0$. В каждой точке величины P_j определяются неоднозначно, но при этом они должны удовлетворять условиям

$$w_i = \sum_{j=1}^{k} P_j v_i(x_j) \quad (i = \overline{1,n}) \tag{5.15}$$

Приведенные решения иллюстрируются на двух примерах консольной балки (5.2).

Пусть требуется срединную точку балки $x_1 = 0{,}5$ привести в положение с прогибом w_1. Задача изучается в трех постановках в предположении, что нагрузка может располагаться по всей длине. Функция $v(x_1, x)$ имеет вид

$$v(0{,}5; x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{6}(1{,}5 - x), & 0 \leqslant x \leqslant 0{,}5 \\ \dfrac{0{,}125}{6}(6x - 1), & 0{,}5 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{5.16}$$

Решение по первой постановке будет

$$Q_1^{(0)}(x) = w_1 v(0{,}5; x) / 0{,}5^6 \cdot 0{,}4775 \tag{5.17}$$

Решение по второй постановке будет

$$Q_2^{(0)}(x) = \frac{17}{24} 0{,}5^4 w_1 \tag{5.18}$$

т.е. в этом случае нагрузка должна быть равномерно распределенной по всей длине. Так как $v(0{,}5; x)$ единственное максимальное значение получает на конце $x = 1$, то решение по третьей постановке получается в виде сосредоточенной силы, прило-

женной на конце балки (очевидно, априори) и величина ее определяется как

$$Q_3^{(0)} = P\delta(x-1) = \frac{6w_1}{0,625}\delta(x-1) \tag{5.19}$$

Второй пример рассматривается только по первой постановке, когда заданы условия для двух точек, и имеет целью изучение изменения характера действующей оптимальной нагрузки.

Итак, пусть требуется точку $x_1 = 0,5$ перевести в положение w_1 и $x_2 = 1$–v–$30\ w_1$.

Функция $v_1(x)$ определится как (5.16), а

$$v_2(x) = \tfrac{1}{6}(3-x)x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{5.20}$$

Расчеты дают для оптимальной нагрузки выражение

$$Q_1^{(0)} = \begin{cases} \tfrac{1}{6}[h_1^{(0)}(1,5-x) + h_2^{(0)}(3-x)]x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 0,5 \\ \tfrac{1}{6}[0,5^3 h_1^{(0)}(6x-1) + h_2^{(0)}(3-x)]x^2, & 0,5 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{5.21}$$

$$h_1^{(0)} = 0,06868,\ h_2^{(0)} = -0,03104$$

В точке $x = 0,2627$ нагрузка меняет знак.

В заключение следует отметить, что рассмотренные в настоящем пункте постановки задач можно обобщить для случаев, когда нагрузка действует на нескольких участках. Тогда управляющее воздействие будет векторной величиной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. *Саакян Л.С.* Об оптимальном управлении колебаниями ортотропной прямоугольной пластинки при условии минимума ее полной энергии // Изв. НАН Армении. Механика, 1993. Т. 46. № 12. С. 18–25.
3. *Мовсисян Л.А., Габриелян М.С.* Об одной задаче управления движением термоупругой пластинки-полосы // Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т. 48. № 3. С. 15–22.
4. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.

Ереван

Поступила в редакцию
10.11.1997