

УДК 534.12.2

© 1999 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, С.В. НЕСТЕРОВ

КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ МЕМБРАНЫ

Рассматриваются колебания прямоугольной мембраны с существенно изменяющейся поверхностной плотностью. Разработан эффективный алгоритм ускоренной сходимости для решения соответствующей самосопряженной краевой задачи на собственные значения и функции, допускающей разделение пространственных переменных. Дано обобщение результатов на случай неравномерного поверхностного натяжения мембраны и наличия внешней упругой среды. Предложен алгоритм учета влияния возмущающих факторов общего вида. Для иллюстрации эффективности метода ускоренной сходимости приведен расчет конкретных примеров распределения массы мембраны.

1. Постановка задачи. Рассматриваются малые колебания неоднородной прямоугольной мембраны, подверженной равномерному поверхностному натяжению [1–3]. Уравнение колебаний с учетом распределенных поверхностных сил имеет вид

$$\rho(x, y) \ddot{w} = \sigma \Delta w + f(x, y, t), \quad w = w(x, y, t), \quad t \geq t_0$$

$$(x, y) \in \Pi \setminus \Gamma, \quad \Pi = \{x, y: 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b\} \quad (1.1)$$

Здесь w – ортогональное смещение элемента мембраны с эйлеровыми координатами x, y в момент времени t , $\rho(x, y)$ – переменная поверхностная плотность мембраны ($0 < \rho^- \leq \rho \leq \rho^+ < \infty$), σ – поверхностное натяжение ($\sigma = \text{const}$), $f(x, y, t)$ – плотность внешней силы на единицу площади; точками обозначены производные по времени t ; Δ – двумерный оператор Лапласа в декартовых координатах x, y . На границе Γ прямоугольника Π предполагаются выполненными неоднородные условия типа Дирихле

$$w|_{x=0, a} = h^{0, a}(y, t), \quad w|_{y=0, b} = g^{0, b}(x, t) \quad (1.2)$$

Функции $h^{0, a}, g^{0, b}$ в (1.2) считаются достаточно гладкими, в том числе в угловых (концевых) точках; они определяют смещения элементов границы. Обычно рассматривается случай жесткого закрепления без смещений: $w|_{\Gamma} = 0$, т.е. $h^{0, a} = g^{0, b} \equiv 0$.

Чтобы определить движение системы (1.1), (1.2), нужно задать значения смещений и скоростей в некоторый начальный момент времени

$$w(x, y, t_0) = w^0(x, y), \quad \dot{w}(x, y, t_0) = \dot{w}^0(x, y) \quad (1.3)$$

Решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) проводится стандартным методом разделения переменных: $w(x, y, t) \sim u(x, y)\theta(t)$. Для неизвестной функции u получается самосопряженная краевая задача на собственные значения и собственные функции (задача Штурма–Лиувилля в прямоугольной области)

$$\Delta u = -\lambda \rho(x, y)u, \quad u|_{\Gamma} = 0 \quad (1.4)$$

Требуется определить счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}$ и соот-

ветствующую ортонормированную счетную систему собственных функций (базис) $\{u_n(x, y)\}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Затем решение исходной задачи (1.1)–(1.3) строится в виде ряда по указанной ортонормированной с весом $\rho(x, y)$ системе собственных функций. Процедура построения сводится к элементарным операциям и квадратурам

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)\theta_n(t), \quad v_n^2 = \lambda_n \sigma$$

$$\theta_n(t) = w_n^0 \cos v_n t + \frac{\dot{w}_n^0}{v_n} \sin v_n t + \frac{1}{v_n} \int_{t_0}^t \sin v_n(t - \tau) F_n(\tau) d\tau$$

$$w_n^0 = (w^0, u_n)_\rho, \quad \dot{w}_n^0 = (\dot{w}^0, u_n)_\rho, \quad f_n(t) = (f, u_n)_1 \quad (1.5)$$

$$F_n(t) = f_n(t) - \sigma \int_0^b [h^a(y, t) u'_{nx}(a, y) - h^0(y, t) u'_{nx}(0, y)] dy -$$

$$- \sigma \int_0^a [g^b(x, t) u'_{ny}(x, b) - g^0(x, t) u'_{ny}(x, 0)] dx$$

Здесь v_n – собственные частоты колебаний неоднородной мембраны, функции $u_n(x, y)$ характеризуют собственные формы. Круглыми скобками в (1.5) обозначены скалярные произведения функций с весами $\rho(x, y)$, 1; штрихами с индексами x, y – соответствующие частные производные. При условии достаточно высокой гладкости функций, входящих в задачу (1.1)–(1.3), ряд (1.5) сходится и представляет сильное или классическое решение [1–4].

Применение изложенного стандартного подхода для эффективного решения конкретных задач приводит к проблеме построения системы собственных значений и функций. Теоретические вопросы, связанные с задачей Штурма – Лиувилля типа (1.4), изучены довольно подробно. Разработаны также вычислительные процедуры, основанные на методах Рэлея – Ритца и конечных элементов. Однако имеется потребность создания эффективных методов и алгоритмов для высокоточного построения низших собственных значений и функций, например с целью контроля точности указанных процедур. Высокоточный экономичный метод необходим также при многочисленных расчетах для изучения зависимости собственных частот и форм от параметров системы (параметрический синтез). Предлагается численно-аналитический метод ускоренной сходимости нахождения низших частот и форм и форм задачи (1.4), представляющих специальный интерес для приложений.

2. Схема построения решения задачи Штурма – Лиувилля. В общем случае произвольной функции $\rho(x, y)$ эффективное решение задачи (1.4) затруднительно. Рассмотрим частный случай аддитивной зависимости, допускающей разделение переменных x и y ; получим две связанные задачи на собственные значения и функции

$$\rho = \rho_0(x, y) \equiv \varphi(x) + \psi(y), \quad u(x, y) \sim X(x)Y(y)$$

$$X'' + (\lambda\varphi(x) - \mu)X = 0, \quad X(0) = X(a) = 0$$

$$Y'' + (\lambda\psi(y) + \mu)Y = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0 \quad (2.1)$$

Здесь λ, μ и X, Y – параметры и функции, подлежащие определению. В выражениях (2.1) предполагается, что слагаемое $\varphi(x)$ в $\rho_0(x, y)$ является положительным и доминирующим: $\varphi(x) > \psi(y)$ для $(x, y) \in \Pi$. Выполнения этого условия всегда можно добиться прибавлением к $\varphi(x)$ и вычитанием от $\psi(y)$ достаточно большого числа. Положительность $\psi(y)$ не предполагается; более того, предпочтительнее, чтобы $\psi(y) \leq 0$, см. далее. Если естественно предположить, что слагаемое $\psi(y) > 0$ и оказы-

вается доминирующим, чего можно добиться аналогичным способом, то в уравнениях (2.1) удобнее поменять знаки перед параметром μ .

Эти манипуляции позволяют рассматривать два семейства краевых задач: для λ , X с параметром семейства μ и для μ , Y с параметром семейства λ . На основе высокоэффективного метода ускоренной сходимости [5, 6] предлагается создать процедуру решения задачи (2.1). Она заключается в последовательном построении собственных значений и функций указанных двух семейств задач

$$\lambda = \lambda_n(\mu), \quad X_n(x, \mu) = X(x, \lambda_n(\mu), \mu) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

$$\mu = \mu_m(\lambda), \quad Y_m(y, \lambda) = Y(y, \mu_m(\lambda), \lambda) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Здесь независимые значения индексов n, m предполагаются фиксированными. Обычно рассматриваются низшие формы колебаний, например $n, m = 1, 2$. После нахождения функций $\lambda_n(\mu), \mu_m(\lambda)$ (2.2) искомое значение λ_{nm} определяется как корень уравнения

$$\lambda = \lambda_n(\mu_m(\lambda)), \quad \lambda = \lambda_{nm} \quad (2.3)$$

Собственная функция $u_{nm}(x, y)$, отвечающая найденному значению λ_{nm} (2.3), вычисляется с помощью соотношений (2.1), (2.2):

$$u_{nm}(x, y) = X(x, \lambda_{nm}, \mu_{nm})Y(y, \mu_{nm}, \lambda_{nm}) \equiv X_{nm}(x)Y_{nm}(y), \quad \mu_{nm} = \mu_m(\lambda_{nm}), \quad (x, y) \in \Pi \quad (2.4)$$

Функции $u_{nm}(x, y)$ (2.4) в силу построения оказываются ортогональными с весом $\rho(x, y)$ в прямоугольнике $(x, y) \in \Pi$. Отметим, что в отличие от одномерного случая (струна) собственные числа λ_{nm} (2.3) могут быть многократно вырожденными.

Оценим область S_{nm} значений параметров λ, μ , для которой требуется построить решения задач (2.1) в виде (2.2). Учитывая сделанные предположения, получим искомые ограничения и представление для области S_{nm} :

$$\Lambda_n = \{\lambda, \mu : \lambda_n^+(\mu) \leq \lambda \leq \lambda_n^-(\mu), |\mu| < \infty\}, \quad \lambda_n^\pm(\mu) = (\mu + (\pi n/a)^2) / \varphi^\pm \quad (2.5)$$

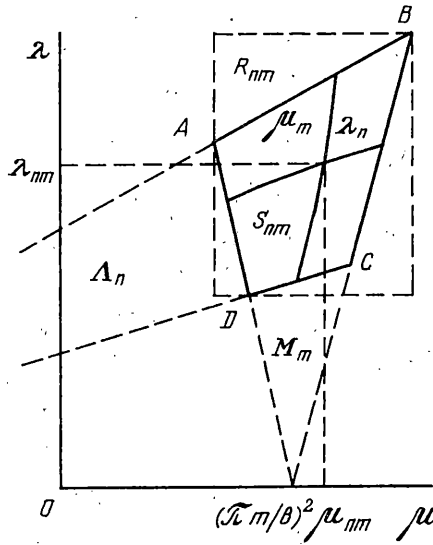
$$M_m = \{\lambda, \mu : \lambda \geq 0, \mu_m^\pm(\lambda) \leq \mu \leq \mu^-(\lambda)\}, \quad \mu_m^\pm(\lambda) = (\pi m/b)^2 - \lambda \psi^\pm$$

$$S_{nm} = \Lambda_n \cap M_m, \quad (\lambda, \mu) \in S_{nm}$$

Здесь $\varphi^\pm > 0$ – максимальное и минимальное значения функции $\varphi(x)$, $0 \leq x \leq a$; ψ^\pm – то же для $\psi(y)$, $0 \leq y \leq b$. Характерная четырехугольная форма области S_{nm} (2.5) представлена на фиг. 1. В частности, при $\psi(y) = \text{const}$ или $\varphi(x) = \text{const}$ эта область вырождается в отрезок (точки A, B и D, C или D, A и C, B соответственно совпадают). Если одна из функций изменяется относительно мало, то область S_{nm} имеет вид узкой полоски. Таким образом, кривые $\lambda_n(\mu), \mu_m(\lambda)$ (2.2) лежат внутри области S_{nm} , если $(\mu, \lambda) \in S_{nm}$, и имеют единственную точку пересечения (2.3), (2.4). Типичное поведение этих кривых и соответствующее графическое решение уравнения (2.3) приведены также на фиг. 1.

В результате приходим к задаче построения двух однопараметрических семейств решений (2.2) для $(\lambda, \mu) \in S_{nm}$ (2.5). Для удобства расчетов область рассматриваемых значений λ, μ может быть аппроксимирована прямоугольником R_{nm} со сторонами, параллельными координатным осям, см. фиг. 1. Прямоугольник строится по экстремальным значениям абсцисс и ординат вершин A, B, C, D четырехугольника S_{nm} .

3. Метод ускоренной сходимости. Изложим теперь рекуррентную процедуру решения задач (2.1) на основе метода ускоренной сходимости [5, 6] и вариационного подхода



Фиг. 1

[1-4, 7-9]. Они эквивалентны двум следующим семействам вариационных задач:

$$\begin{aligned}
 I_{\mu}[X] &= \int_0^a (X'^2 + \mu X^2) dx \rightarrow \min_X, & \Phi[X] &= \int_0^a \varphi(x) X^2 dx = 1 \\
 X(0) &= X(a) = 0 \\
 J_{\lambda}[Y] &= \int_0^b [Y'^2 - \lambda \psi(y) Y^2] dy \rightarrow \min_Y, & \Psi[Y] &= \int_0^b Y^2 dy = 1 \\
 Y(0) &= Y(b) = 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Абсолютные минимумы функционалов I_{μ}, J_{λ} (3.1) определяют первые собственные значения $\lambda_1(\mu), \mu_1(\lambda)$ (2.2) задач (2.1) в области S_{11} (2.5). Соответствующие функции, на которых они достигаются, есть первые собственные функции $X_1(x, \mu), Y_1(y, \lambda)$ (2.2). Последующие значения $\lambda_n(\mu), \mu_m(\lambda)$ и функции $X_n(x, \mu), Y_m(y, \lambda)$ строятся рекуррентно на более узких классах функций, удовлетворяющих дополнительным условиям ортогональности

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\mu_i}[X] &= \int_0^b \varphi(x) X_i(x, \mu) X dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \\
 \Psi_{\lambda_j}[Y] &= \int_0^b Y_j(y, \lambda) Y dy = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m-1)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Для решения изопериметрических вариационных задач (3.1), (3.2) широко применяются приближенные численно-аналитические методы (принцип Рэля, метод Рэля – Ритца, метод конечных элементов и др.). Сходимость метода Рэля – Ритца обоснована в работах Н.М. Крылова [7]. Этот подход, в частности принцип Рэля, удобен для эффективного построения начального приближения – оценок сверху собственных значений $\lambda_n(\mu)$ и $\mu_m(\lambda)$. Высокоточное определение искомых λ_n, X_n и μ_m, Y_m с целью дальнейшего решения уравнения (2.3) и последующих построений (2.4) целесообразно проводить с помощью метода ускоренной сходимости [5, 6].

Рассмотрим для определенности задачи (3.1) и вычислим оценки сверху $\lambda_1^*(\mu), \mu_1^*(\lambda)$

на основе принципа Рэлея

$$0 < \lambda_1(\mu) \leq \lambda_1^*(\mu) = I_\mu[p]/\Phi[p], \quad p = p(x, \mu), \quad p|_{x=0,a} = 0 \quad (3.3)$$

$$\mu_1(\lambda) \leq \mu_1^*(\lambda) = J_\lambda[q]/\Psi[q], \quad q = q(y, \lambda), \quad q|_{y=0,b} = 0$$

Здесь p, q – непрерывно дифференцируемые пробные функции, удовлетворяющие граничным условиям (3.3) и выбираемые из интуитивных физических представлений о первой форме колебаний. Для последующих расчетов достаточно получить оценки (3.3) при некоторых фиксированных значениях μ и λ из области S_{11} , а затем применить процедуру продолжения по параметрам. Качество этих оценок можно установить с помощью метода Рэлея – Ритца [7–9], например с помощью двухкоординатных приближений.

Предлагается другой, более регулярный способ [5, 6], основанный на введении малых параметров в задачах (2.1). Для имеющихся оценок $\lambda_1^0(\mu)$, $\mu_1^0(\lambda)$ (μ, λ – фиксированы), в частности для вычисленных в (3.3) оценок сверху $\lambda_1^*(\mu)$, $\mu_1^*(\lambda)$, решаются две задачи Коши

$$-X'' + (\lambda_1^0(\mu)\varphi(x) - \mu)X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(0) = c_X, \quad X_1 = c_X U_1^0(x, \mu) \quad (3.4)$$

$$Y'' + (\lambda\psi(y) + \mu_1^0(\lambda))Y = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = c_Y, \quad Y_1 = c_Y V_1^0(y, \lambda)$$

Без ограничения общности полагаем $c_{X,Y} = 1$. Функции U_1^0, V_1^0 считаются известными в аналитической или численной форме или в виде вычислительной процедуры; они строятся независимо одна от другой.

Далее определяются минимальные (первые) корни α, β функций U_1^0, V_1^0 и определяется их относительная близость ε, δ к значениям $x = a$ и $y = b$ соответственно

$$\alpha(\mu) = \arg U_1^0(x, \mu), \quad \varepsilon(\mu) = 1 - \xi(\mu), \quad \xi = \alpha/a \quad (3.5)$$

$$\beta(\lambda) = \arg V_1^0(y, \lambda), \quad \delta(\lambda) = 1 - \eta(\lambda), \quad \eta = \beta/b$$

Отметим, что $\varepsilon = 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1^0 = \lambda_1$; аналогично $\delta = 0$ лишь при $\mu_1^0 = \mu_1$; и наоборот. Если $\varepsilon < 0$ или (и) $\delta < 0$, то функции $\varphi(x)$ или (и) $\psi(y)$ гладким образом продолжают на интервалы $a < x \leq \alpha(\mu)$ и $b < y \leq \beta(\lambda)$ соответственно [5, 6, 8]. Таким образом, числовые параметры ε и δ характеризуют также близость $\lambda_1^0(\mu)$ к $\lambda_1(\mu)$ и $\mu_1^0(\lambda)$ к $\mu_1(\lambda)$ соответственно в области $(\lambda, \mu) \in S_{11}$. Более того [8], при достаточно малых значениях ε, δ имеем двусторонние оценки

$$d_\lambda |\varepsilon| \leq |\lambda_1^0 - \lambda_1| \leq c_\lambda |\varepsilon|, \quad d_\mu |\delta| \leq |\mu_1^0 - \mu_1| \leq c_\mu |\delta|, \quad d_{\lambda,\mu} < c_{\lambda,\mu}$$

где $d_{\lambda,\mu}, c_{\lambda,\mu}$ – положительные постоянные.

Теперь для высокоточного решения задач Штурма – Лиувилля (2.1) при достаточно малых $|\varepsilon|, |\delta|$ можно применить рекуррентную процедуру метода ускоренной сходимости [5, 6]. Она заключается в последовательном уточнении значений $\lambda_1(\mu), \mu_1(\lambda)$ и функций X_1, Y_1 на основе решения задач Коши (3.4) и определения первых корней $\alpha_1^{(k)}, \beta_1^{(l)}$ (3.5) функций $U_1^{(k)}, V_1^{(l)}$ по схеме $(k, l = 0, 1, 2, \dots)$

$$\lambda_1^{(k+1)}(\mu) = \lambda_1^{(k)}(\mu) - \varepsilon^{(k)}(\mu) \alpha^{(k)}(\mu) (U_1^{(k)})'(\alpha^{(k)}(\mu), \mu)^2 / \Phi[U_1^{(k)}], \quad \lambda_1^{(0)} = \lambda_1^0$$

$$\varepsilon^{(k)}(\mu) = 1 - \xi^{(k)}(\mu), \quad \varepsilon^{(0)} = \varepsilon, \quad \xi^{(k)} = \alpha^{(k)} / a, \quad \alpha^{(k)}(\mu) = \arg U_1^{(k)}(x, \mu) \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \mu_1^{(l+1)}(\lambda) &= \mu_1^{(l)}(\lambda) - \delta^{(l)}(\lambda) \beta^{(l)}(\lambda) (V_1^{(l)'}(\beta^{(l)}(\lambda), \lambda))^2 / \Psi[V_1^{(l)}], \quad \mu_1^{(0)} = \mu_1^0 \\ \delta^{(l)}(\lambda) &= 1 - \eta^{(l)}(\lambda), \quad \delta^{(0)} = \delta, \quad \eta^{(l)} = \beta^{(l)} / b, \quad \beta^{(l)}(\lambda) = \arg V_1^{(l)}(y, \lambda) \end{aligned}$$

Функции $U_1^{(k)}(x, \mu)$, $V_1^{(l)}(y, \lambda)$ и квадраты их норм, т.е. функционалы Φ , Ψ , получаются в результате интегрирования задач Коши с помощью следующих соотношений:

$$X'' + (\lambda_1^{(k)}(\mu)\varphi(x) - \mu)X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(0) = 1, \quad X = U_1^{(k)}(x, \mu)$$

$$\Phi[U_1^{(k)}] \equiv \int_0^{\alpha^{(k)}} \varphi(x) U_1^{(k)2}(x, \mu) dx = U_1^{(k)'} P_1^{(k)} \Big|_{x=\alpha^{(k)}} \quad (3.7)$$

$$Y'' + (\mu_1^{(l)}(\lambda) + \lambda\psi(y))Y = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 1, \quad Y = V_1^{(l)}(y, \lambda)$$

$$\Psi[V_1^{(l)}] \equiv \int_0^{\beta^{(l)}} V_1^{(l)2}(y, \lambda) dy = V_1^{(l)'} Q_1^{(l)} \Big|_{y=\beta^{(l)}}$$

Первые выражения (3.7) для функционалов Φ , Ψ имеют смысл квадратов норм и представлены традиционно в виде квадратур. Вторые выражения получаются в результате совместного интегрирования задач Коши для дополнительных неизвестных функций $P = \partial X / \partial \lambda$, $Q = \partial Y / \partial \mu$:

$$P'' + (\lambda_1^{(k)}(\mu)\varphi(x) - \mu)P = -\varphi(x)X, \quad P(0) = P'(0) = 0, \quad P = P_1^{(k)}(x, \mu) \quad (3.8)$$

$$Q'' + (\mu_1^{(l)}(\lambda) + \lambda\psi(y))Q = -Y, \quad Q(0) = Q'(0) = 0, \quad Q = Q_1^{(l)}(y, \lambda)$$

Таким образом, операции высокоточного численного интегрирования задач Коши (3.8) и взятия квадратур (3.7) эквивалентны.

Скорость сходимости итераций в соответствии с соотношениями (3.6)–(3.8) имеет квадратичный характер по отношению к ε , δ :

$$|\lambda_1^{(k)} - \lambda_1| \leq C_\lambda |\varepsilon|^{\pi(k)}, \quad \pi(k) = 2^k, \quad |\mu_1^{(l)} - \mu_1| \leq C_\mu |\delta|^{\pi(l)}, \quad \pi(l) = 2^l \quad (3.9)$$

$$|X_1^{(k)} - X_1| + |X_1^{(k)'} - X_1'| a \leq C_X |\varepsilon|^{\pi(k)}, \quad |Y_1^{(l)} - Y_1| + |Y_1^{(l)'} - Y_1'| b \leq C_Y |\delta|^{\pi(l)}$$

$$(\lambda, \mu) \in S_{11}, \quad (x, y) \in \Pi$$

Вычислительная практика (см. п. 5 и [5, 6, 8]) показывает, что при $|\varepsilon|, |\delta| = 0,1$ несколько итераций (обычно 2–4) приводят к высокоточным результатам (относительным погрешностям расчетов порядка 10^{-4} – 10^{-16}), часто приемлемым при решении прикладных задач.

Дальнейший ход решения задачи определения первого собственного значения λ_{11} заключается в построении кривых $\lambda_1(\mu)$, $\mu_1(\lambda)$. Предлагается использовать процедуру продолжения по параметрам. Для достаточно близких значений $\mu + \Delta\mu$, $\lambda + \Delta\lambda$ из области S_{11} построенные высокоточные приближения $\lambda_1(\mu)$, $\mu_1(\lambda)$ принимаются в качестве начальных оценок, аналогичных $\lambda_1^0(\mu)$, $\mu_1^0(\lambda)$, см. выше. Далее применяется изложенная выше итерационная схема (3.6)–(3.8) метода ускоренной сходимости. Величины шагов $\Delta\mu$, $\Delta\lambda$ могут варьироваться; они устанавливаются численным экспериментом из условий сходимости алгоритма. Таким образом, процедура высокоточного

решения задач Штурма – Лиувилля (2.1) в области S_{11} (2.6) сводится к интегрированию задач Коши (3.4), определению первых нулей функций $U_1^{(k)}, V_1^{(l)}$ и уточнению значений $\lambda_1^{(k)}, \mu_1^{(l)}$ согласно (3.6). После построения функций $\lambda_1(\mu), \mu_1(\lambda), (\mu, \lambda) \in S_{11}$ методом продолжения по параметрам численно находится решение λ_{11} уравнения (2.3) при $n = m = 1$. На его основе определяются искомые функции $X_{11}(x), Y_{11}(y)$ и низшая форма колебаний $u_{11}(x, y)$ (2.4).

Следующие собственные значения λ_{nm} и функции $u_{nm}(x, y), n + m \geq 3$ определяются аналогично, поскольку специфика первого значения и функции практически в алгоритме не использовалась. Отличие будет лишь в том, что для оценок $\lambda_n^0(\mu), \mu_m^0(\lambda)$, получаемых, например, с помощью метода Рэлея – Ритца [1–4, 7], и для последующих приближений отыскивается n -й корень функции $U_n(x, \mu)$ и m -й корень функции $V_m(y, \lambda)$ (аналогично соотношениям (3.5), в которых отыскиваются первые положительные корни $\alpha^{(0)}(\mu)$ и $\beta^{(0)}(\lambda)$).

Рассмотрим некоторую рекуррентную процедуру, позволяющую сократить вычислительные затраты по определению искомого собственного значения λ_{nm} . Пусть для определенности имеется оценка сверху λ_{nm}^* искомого собственного значения, полученная с помощью метода Рэлея – Ритца. Тогда в уравнение типа (3.7) для Y целесообразно подставить вместо произвольного значения $\lambda \in S_{nm}$ найденную оценку λ_{nm}^* и методом ускоренной сходимости определить достаточно точное значение $\mu_m^{(1)}(\lambda_{nm}^*)$. Затем величина $\mu_m^{(1)}(\lambda_{nm}^*)$ подставляется в уравнение типа (3.7) для X и методом ускоренной сходимости находится следующее приближение значения $\lambda_{nm}^{(1)} = \lambda_n^{(1)}(\mu_m^{(1)}(\lambda_{nm}^*))$; аналогично рекуррентным образом находятся $\mu_m^{(2)}(\lambda_{nm}^{(1)}), \lambda_{nm}^{(2)} = \lambda_n^{(2)}(\mu_m^{(2)})$; и т.д. При определенных условиях процедура будет сходящейся со скоростью геометрической прогрессии $O(d^i)$, где i – порядок итерации, $0 < d < 1$, d – знаменатель, подлежащий определению.

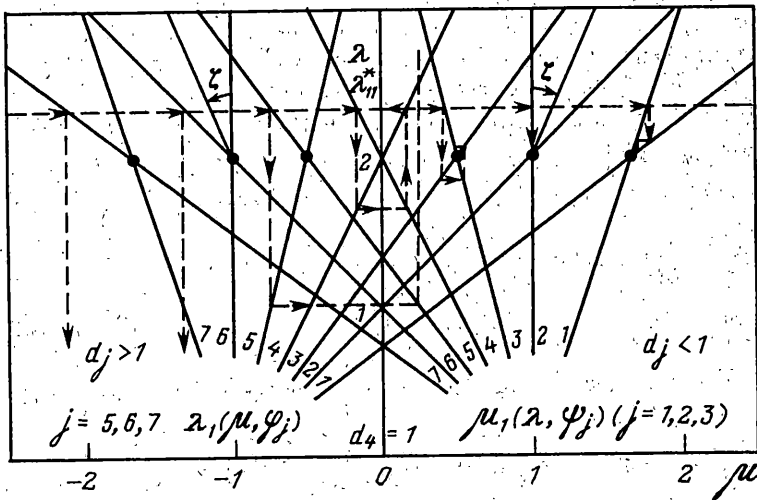
Условиям сходимости и расходимости указанного процесса можно придать локальную геометрическую интерпретацию. Они связаны с ориентацией биссектрисы угла пересечения кривых $\lambda_n(\mu)$ и $\mu_m(\lambda)$ (точнее, касательных в точке пересечения) относительно вертикали, см. фиг. 2. Если угол ζ между этими прямыми отрицателен, то имеет место сходимость указанного вида ($d < 1$). Положительный угол ζ приводит к расходимости ($d > 1$), а нулевой соответствует критическому случаю ($d = 1$). Сходимости можно добиться с помощью искусственного приема доминирования $\varphi(x)$ над $\psi(y)$, см. п. 2 после формулы (2.1). Кривая $\lambda_n(\mu)$ должна возрастать по μ , а кривая $\mu_m(\lambda)$ убывать по λ "не очень быстро", что устанавливается с помощью численного эксперимента, см. п. 5.2. В качестве начального приближения λ_{nm}^0 можно взять также оценку снизу, которая определяется, например, при решении исходной задачи (1.4) для $\rho = \rho^0(x, y) \geq \rho_0(x, y), (x, y) \in \Pi$.

4. Обобщение подхода. Рассмотрим более общие классы задач, допускающие эффективное решение с помощью изложенного метода.

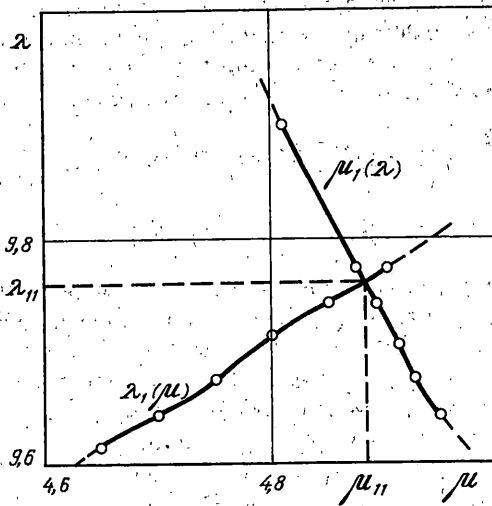
4.1. Возмущение функции поверхностной плотности. В прикладных задачах аддитивное представление функции $\rho = \rho_0(x, y)$ (2.1) может оказаться недостаточным, т.е. выражение для поверхностной плотности $\rho(x, y)$ имеет более общий вид [9]:

$$\rho(x, y) = \rho_0(x, y) + \gamma r(x, y), \quad 0 < \gamma \leq 1 \quad (4.1)$$

Здесь $r(x, y)$ – произвольная интегрируемая, в частности непрерывная, функция, γ – малый параметр, характеризующий возмущение поверхностной плотности $\rho_0(x, y)$. С помощью стандартной процедуры метода возмущений получим приближенное



Фиг. 2



Фиг. 3

выражение для $\lambda_{nm}(\gamma)$

$$\lambda_{nm}(\gamma) = \lambda_{nm}(0) + \gamma \Lambda_{nm} + O(\gamma^2) \quad (4.2)$$

$$\Lambda_{nm} = -\frac{\lambda_{nm}(0)}{\|u_{nm}\|_0^2} \int_0^a \int_0^b r(x, y) u_{nm}^2(x, y) dx dy$$

Здесь $\lambda_{nm}(0)$ – собственное значение невозмущенной задачи (1.4), т.е. при $\gamma = 0$; $u_{nm}(x, y)$ – соответствующая ему собственная функция, см. (2.3), (2.4); $\|u_{nm}\|_0^2$ – квадрат нормы с весом $\rho_0(x, y)$. Предполагается, что решение невозмущенной задачи (1.4) построено достаточно точно с погрешностью, не превышающей $O(\gamma^2)$. Отметим, что дальнейшее уточнение решения (4.2) с учетом более высоких степеней γ затруднительно, поскольку требует построения функции Грина невозмущенной задачи. Это

связано с проблемой определения всего счетного множества невозмущенных собственных значений $\{\lambda_{nm}(0)\}$ и функций $\{u_{nm}(x, y)\}$. В общем случае функция Грина может быть построена приближенно с помощью вышеизложенного подхода.

4.2. *Неравномерное натяжение мембраны.* Рассмотрим обобщение уравнения (1.1) движения мембраны с учетом переменности и неравномерности сил поверхностного натяжения: $\sigma = \text{diag}(\sigma_x^0(x), \sigma_y^0(y))$. В результате приходим к задаче Штурма – Лиувилля, обобщающей постановку (1.4) [9]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_x^0(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_y^0(y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \lambda \rho_0(x, y) u = 0, \quad u|_{\Gamma} = 0$$

$$0 < \sigma_{x,y}^- \leq \sigma_{x,y}^0 \leq \sigma_{x,y}^+ < \infty, \quad (x, y) \in \Pi \quad (4.3)$$

Краевая задача на собственные значения и функции (4.3) допускает разделение переменных аналогично (2.1)

$$(\sigma_x^0(x) X')' + (\lambda \varphi(x) - \mu) X = 0, \quad X(0) = X(a) = 0$$

$$(\sigma_y^0(y) Y')' + (\lambda \psi(y) + \mu) Y = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0 \quad (4.4)$$

К каждому семейству одномерных задач (4.4) применим метод ускоренной сходимости [5, 6]. Схема построения высокоточного приближенного решения практически повторяет процедуру п. 3. Естественно, при этом изменяется вид уравнений ((4.4) вместо (3.4)) и уточняющие формулы (3.6) заменяются следующими

$$\lambda_1^{(k+1)}(\mu) = \lambda_1^{(k)}(\mu) - \varepsilon^{(k)}(\mu) a \sigma_x^0(a) (U_1^{(k)'}(a, \mu))^2 / \Phi[U_1^{(k)}] \quad (4.5)$$

$$\mu_1^{(l+1)}(\lambda) = \mu_1^{(l)}(\lambda) - \delta^{(l)}(\lambda) b \sigma_y^0(b) (V_1^{(l)'}(b, \lambda))^2 / \Psi[V_1^{(l)}]$$

4.3. *Наличие внешней упругой среды.* Отметим, что наряду с неравномерностью и переменностью поверхностного натяжения можно учесть также влияние упругой внешней среды (винклеровское основание), коэффициент которой $\chi^0(x, y) = \chi_x(x) + \chi_y(y)$ есть аддитивная функция, аналогичная $\rho_0(x, y)$. Схема построения решения совпадает с приведенной выше, только в уравнениях вида (4.4) коэффициенты перед X и Y принимают вид $\lambda \varphi - \mu - \chi_x$ и $\lambda \psi + \mu - \chi_y$ соответственно.

4.4. *Учет возмущений в общем случае.* По аналогии с п. 4.1 можно учесть влияние возмущений вида (наряду с (4.1)) и более общих, содержащих смешанную и первые производные [9]:

$$\sigma_{x,y} = \sigma_{x,y}^0 + \gamma \omega_{x,y}(x, y), \quad \chi(x, y) = \chi^0(x, y) + \gamma \kappa(x, y)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \gamma \omega_{xy}(x, y) \quad (4.6)$$

где γ – малый параметр, а функции $\omega_{x,y}, \kappa$ достаточно гладкие. Приближенное выражение для $\lambda_{nm}(\gamma)$ имеет форму (4.2); коэффициент Λ_{nm} записывается следующим образом

$$\Lambda_{nm} = \frac{1}{\|u_{nm}\|_0^2} \int_0^a \int_0^b \left\{ [\kappa(x, y) - \lambda_{nm}(0) r(x, y)] u_{nm}^2(x, y) + \right.$$

$$\left. + 2\omega_{xy}(x, y) \frac{\partial u_{nm}}{\partial x} \frac{\partial u_{nm}}{\partial y} + \omega_x(x, y) \left(\frac{\partial u_{nm}}{\partial x} \right)^2 + \omega_y(x, y) \left(\frac{\partial u_{nm}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (4.7)$$

Формула (4.7) требует высокоточного интегрирования функций двух аргументов, задаваемых численно. Отметим также, что в (4.1), (4.6) для упрощения величины возмущений считаются одного порядка малости, характеризующей параметром γ .

Таким образом, разработанный в п. 3 метод ускоренной сходимости позволяет эффективно строить решения краевых задач Штурма – Лиувилля с граничными условиями первого рода (жесткое закрепление). Вместе с ними вычисляется искомое решение (1.5) исходной начально-краевой задачи (1.1)–(1.3), если функций $f, h^{0,a}, g^{0,b}, w^0, w^1$ могут быть с достаточной точностью аппроксимированы небольшим числом низших мод колебаний $u_{nm}(x, y), n, m = 1, 2, \dots$. Заметим, однако, что определение частот и форм колебаний имеет самостоятельный интерес в теоретическом и прикладном аспектах.

Сходная, но существенно более громоздкая процедура решения краевой задачи имеет место в случае граничных условий третьего рода (упругое закрепление). Высокоэффективный алгоритм ускоренной сходимости может быть построен с помощью результатов работы [6] и подхода, изложенного в п. 3, с последующим обобщением согласно п. 4.

Для иллюстрации метода рассмотрим конкретные примеры.

5. Расчет иллюстративных примеров. Исследуем собственные колебания неоднородной равномерно натянутой квадратной мембраны. С целью иллюстрации эффективности вычислительного алгоритма по методу ускоренной сходимости рассмотрим некоторые конкретные выражения для функции $\rho_0(x, y)$, в том числе допускающие точные аналитические решения в элементарных функциях.

5.1. Однокоординатная неоднородность. Пусть функции ρ_0 и χ зависят только от координаты x : $\rho_0(x, y) = \varphi(x), \chi(x, y) = \chi_x(x)$, т.е. $\psi(y) = \chi_y(y) \equiv 0$. Тогда, следуя п. 2, получим

$$X'' + (\lambda\varphi(x) - \pi^2 m^2 - \chi_x(x))X = 0, \quad X(0) = X(1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5.1)$$

$$Y = Y_m(y) = c_Y \sin \pi m y, \quad \mu = \mu_m = \pi^2 m^2 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad 0 \leq y \leq 1$$

Здесь и далее проведено обезразмеривание переменных и параметров на величину a ($b = a$). Зафиксируем в (5.1) некоторое значение m и рассмотрим относительно λ, X задачу Штурма – Лиувилля. Для конкретного вида функций $\varphi(x), \chi_x(x)$ она может быть эффективно решена методом ускоренной сходимости [5, 6]; двусторонние оценки для λ получены в [8].

Возьмем для простоты $\varphi(x) = (1+x)^{-2}, \chi_x(x) \equiv -\pi^2 m^2$. Тогда уравнение (5.1) для X типа Эйлера допускает точное аналитическое решение в элементарных функциях, а искомые $\lambda_n, X_n(x)$ равны

$$\lambda_n = \frac{1}{4} + (\pi n / \ln 2)^2, \quad X_n(x) = \sqrt{1+x} \sin((\pi n / \ln 2) \ln(1+x)), \quad n \geq 1$$

$$\lambda_1 = 20,79229, \quad X_1(x) = \sqrt{1+x} \sin((\pi / \ln 2) \ln(1+x))$$

$$X_1'(x^*) = 0, \quad x^* = \exp((\ln 2 / \pi)(\pi - \arctg(2\pi / \ln 2))) - 1 = 0,44892$$

$$X_1(x^*) = 1,19645 \quad (5.2)$$

Здесь x^* – точка максимума первой собственной функции $X_1(x)$.

Приведем расчет λ_1 согласно алгоритму п. 3, взяв в качестве пробной функции $p = \sin \pi x$, см. (3.3). Начальное приближение (оценка сверху) $\lambda_1^0 = \lambda_1^* = 22,22421$; первый корень и параметр задачи, см. (3.5), равны соответственно $\xi = 0,95459, \epsilon = 4,5 \cdot 10^{-2}$. На основе [8] имеем для λ_1 оценку снизу: $\lambda_{1*} = \xi^2 \lambda_1^* = 20,25164$. Уточненное по формулам (3.6) с погрешностью $O(\epsilon^2)$ значение $\lambda_1^{(1)} = 20,80330$; оно отли-

чается от точного на величину $5 \cdot 10^{-4} = O(\varepsilon^2)$ (относительная погрешность), см. (5.2); погрешность $|X_1^{(1)} - X_1| \sim 10^{-4}$.

Рассмотрим еще один пример, допускающий аналитическое решение. Пусть $\varphi(x) = (1+x^2)^{-2}$; тогда первое собственное значение λ_1 функция $X_1(x)$, точка максимума x^* и максимальное значение X_1 равны соответственно

$$\lambda_1 = 15, \quad X_1(x) = \sqrt{1+x^2} \sin(4 \arctg x) = 4x(1-x^2)(1+x^2)^{-3/2}$$

$$x^* = 1/\sqrt{5} \approx 0,447214, \quad X_1(x^*) = 1,08866 \quad (5.3)$$

Для пробной функции $p = \sin \pi x$ по формуле (3.3) имеем оценку сверху $\lambda_1^* = 15,33728$; вычисления по формулам (3.4), (3.5) дают значения $\xi = 0,98350$, $\varepsilon = 1,65 \cdot 10^{-2}$. Оценка снизу оказывается равной $\lambda_{1*} = \xi^2 \lambda_1^* = 14,83533$; уточненное значение $\lambda_1^1 = 15,00847$, см. (3.6), что приводит к относительной погрешности $5,7 \cdot 10^{-4}$, т.е. порядка ε^2 , см. (5.3). Итак, вычисления дают весьма высокую точность после первой итерации несмотря на довольно грубый выбор пробной функции; погрешность $|X_1^{(1)} - X_1| \sim 10^{-4}$.

5.2. Симметричная неоднородность. Проведем численные расчеты первого собственного значения λ_{11} для случая $\rho_0(x, y) \equiv \rho_0(y, x) = 1 + x + y$. В соответствии со схемой построения решения п. 2, 3 положим $\varphi(x) = 1 + x$, $\psi(y) = y$. Множество S_{11} рассматриваемых значений (λ, μ) определяется формулой (2.5), в которой $\varphi^+ = 2$, $\varphi^- = 1$, $\psi^+ = 1$, $\psi^- = 0$. Сузим область, определив оценку сверху $\lambda_{11}^* = \pi^2$ по принципу Рэля с помощью пробной функции $U = p(x)q(y) = \sin \pi x \sin \pi y$. Будем строить функцию $\mu_1(\lambda)$ в окрестности указанного значения λ_{11}^* , главным образом, для меньших значений λ , решая задачу Штурма – Лиувилля (2.1) для (μ, Y) согласно методике п. 3. Вычислив $\mu_1(\lambda_{11}^*)$, построим затем функцию $\lambda_1(\mu)$ в окрестности этого значения, по преимуществу, для больших значений μ . В результате получим две кривые, пересекающиеся в точке $\lambda_{11} \approx 9,7641$, $\mu_{11} \approx 4,8827$, см. фиг. 3. С помощью линейной интерполяции просто находим приближенные значения координат точки пересечения $\lambda_{11} = 9,764255$, $\mu_{11} = 4,882141$. Применение рекуррентной процедуры, см. окончание п. 3, на 6-м шаге приводит к следующим значениям $\lambda_{11}^{(6)} = 9,764544$, $\mu_{11}^{(6)} = 4,882624$.

Заметим, что вследствие симметрии задачи $\rho_0(x, y) = \rho_0(y, x)$, $a = b = 1$, как следует из метода разделения переменных, искомое значение λ_{11} совпадает со значением λ_1 одномерной задачи Штурма – Лиувилля, описываемой уравнением $X'' + \lambda(1/2 + x)X = 0$ и граничными условиями $X(0) = X(1) = 0$. Методом ускоренной сходимости [5, 6] находим $\lambda_1 = 9,763874$, которое с относительной погрешностью $4 \cdot 10^{-5}$ отличается от точного собственного значения. Таким образом, результаты расчетов по общей схеме с применением линейной интерполяции дают искомое собственное значение λ_{11} с погрешностью $4 \cdot 10^{-5}$. Погрешность вычисления собственных функций $X_{11}^{(1)}(x)$, $Y_{11}^{(1)}(y)$ определяется по невязкам при $x, y = 1$ и составляет величину $\sim 10^{-5}$ согласно (3.9).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00222, 99-01-00276).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
2. Морс Ф.М., Фейсбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 930 с.

3. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
4. *Стеклов В.А.* Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983. 432 с.
5. *Нестеров С.В., Акуленко Л.Д.* Эффективное решение задачи Штурма – Лиувилля // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 1. С. 44–46.
6. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Определение частот и форм колебаний неоднородных распределенных систем с граничными условиями третьего рода // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 547–555.
7. *Крылов Н.М.* Методы приближенного решения задач математической физики // Избр. тр. Киев: Изд-во АН УССР, 1961. Т. 2. С. 150–204.
8. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Эффективный метод исследования колебаний существенно неоднородных распределенных систем // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 466–478.
9. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.05.1998