

**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1999**

УДК 539.3

© 1999 г. А.Г. ГОРШКОВ, Д.В. ТАРЛАКОВСКИЙ, А.М. ШУКУРОВ

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХ ТОНКИХ УПРУГИХ
СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В АКУСТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Рассматривается осесимметрическая задача о нестационарных колебаниях двух тонких упругих сферических оболочек в акустическом пространстве. Она сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений в пространстве преобразований Лапласа, решение которой разыскивается в виде рядов по экспонентам. Этот подход является развитием методов, использованных в работах [1, 2].

1. Постановка задачи. В безграничном акустическом пространстве расположены две тонкие упругие сферические оболочки радиусов R_1 и R_2 , центры которых O_1 и O_2 удалены друг от друга на расстоянии h ($h > R_1 + R_2$) и находятся на оси Oz прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$, фиг. 1. В момент времени $\tau = 0$ к внутренним поверхностям оболочек приложены симметричные относительно оси Oz нормальные давления $p_{is}(\tau, \theta_i)$ ($i = 1, 2$), где θ_i – отсчитываемые от указанной оси углы сферических систем координат $(r_i, \theta_i, \vartheta_i)$ с центрами в точках O_i .

С учетом осевой симметрии задачи возмущенное движение жидкости описывается любым из следующих двух волновых уравнений относительно потенциала скоростей ϕ (здесь и далее точками обозначено дифференцирование по времени τ):

$$\ddot{\phi} = \Delta_i \phi, \quad \Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} + \frac{2}{r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} + \frac{1}{r_i^2 \sin^2 \theta_i} \left(\sin \theta_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right), \quad p = -\dot{\phi} \quad (1.1)$$

где p – давление в жидкости.

Уравнения осесимметрических колебаний сферических оболочек запишем в матричном виде

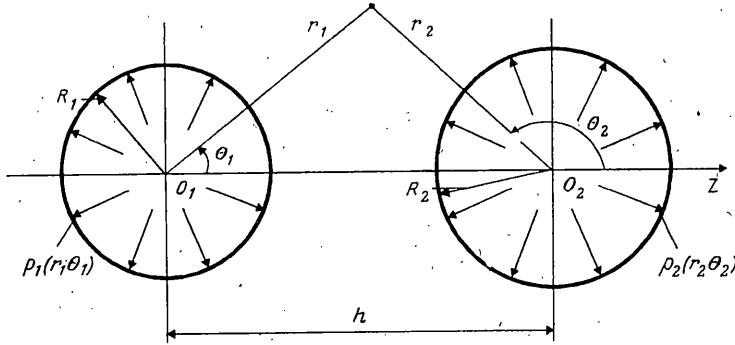
$$\gamma_i^2 \ddot{\mathbf{U}}_i = \mathbf{L}^{(i)}(\mathbf{U}_i) + \alpha_0^{(i)}(\mathbf{P}_{i0} + \mathbf{P}_{is}), \quad \mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} u_i, w_i, \Phi_i \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{L}^{(i)} = \begin{bmatrix} L_{lm}^{(i)} \end{bmatrix}_{3 \times 3}, \quad \mathbf{P}_{i0} = \begin{bmatrix} 0, p_{i0}, 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{P}_{is} = \begin{bmatrix} 0, p_{is}, 0 \end{bmatrix}^T, \quad p_{i0} = -\dot{\phi} \Big|_{r_i=R_i} \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{L}^{(i)}$ – матрица дифференциальных операторов $L_{lm}^{(i)}$, которые равно, как и коэффициенты $\alpha_0^{(i)}$, приведены в [3]; w_i и u_i – нормальные и тангенциальные перемещения; Φ_i – углы поворота нормального к срединным поверхностям оболочек волокна; p_{i0} – давление на внешней поверхности i -й оболочки (при $r_i = R_i$); индекс "T" обозначает операцию транспонирования.

Полагая, что на поверхностях контакта оболочек и окружающей среды имеет место непротекание жидкости, придем к следующим граничным условиям:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r_i} \Big|_{r_i=R_i} = \dot{w}_i \quad (1.3)$$



Фиг. 1

На бесконечности и в начальный момент времени возмущения отсутствуют, что соответствует равенствам

$$\phi = O(1) \text{ при } r_i \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

$$\Phi|_{\tau=0} = \dot{\Phi}|_{\tau=0} = u_i|_{\tau=0} = \dot{u}_i|_{\tau=0} = w_i|_{\tau=0} = \dot{w}_i|_{\tau=0} = \Phi_i|_{\tau=0} = \dot{\Phi}_i|_{\tau=0} = 0 \quad (1.5)$$

В приведенной математической постановке задачи и далее использованы безразмерные величины:

$$u_i = \frac{u'_i}{R}, \quad w_i = \frac{w'_i}{R}, \quad r_i = \frac{r'_i}{R}, \quad R_i = \frac{R'_i}{R}, \quad \tau = \frac{ct}{R}, \quad p_{i0} = \frac{p'_{i0}}{\rho c^2}, \quad p_{is} = \frac{p'_{is}}{\rho c^2}$$

$$\gamma_i = \frac{c}{c_{01}^{(i)}}, \quad \beta_1^{(i)} = \frac{E_i}{\rho c^2}, \quad c_{01}^{(i)} = \sqrt{\frac{E_i}{\rho_i(1 - v_i^2)}}$$

Здесь штрих указывает на соответствующие размерные аналоги; t – реальное время; ρ и c – плотность и скорость звука в жидкости; ρ_i , E_i и v_i – плотности, модули Юнга и коэффициенты Пуассона материалов оболочек.

2. Метод решения. Он включает в себя использование для начально-краевой задачи (1.1)–(1.5) неполного разделения переменных и преобразования Лапласа по времени τ (s – параметр, верхний индекс "L" обозначает изображение).

Трансформанты давления p_{is} и искомых функций с учетом их четности представим в виде рядов по полиномам Лежандра $P_n(\cos \theta_i)$ или Гегенбауэра $C_{n-1}^{\frac{1}{2}}(\cos \theta_i)$ ($i = 1, 2$):

$$\begin{vmatrix} p_{i0}^L \\ p_{isn}^L \\ w_i^L \\ \phi^L \end{vmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{vmatrix} p_{i0n}^L(r_i, s) \\ p_{isn}^L(r_i, s) \\ w_{in}^L(r_i, s) \\ \phi_{in}^L(r_i, s) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_n(\cos \theta_i), \\ \Phi_i^L \end{vmatrix} = -\sin \theta_i \sum_{n=1}^{\infty} \begin{vmatrix} u_{in}^L(r_i, s) \\ \Phi_m^L(r_i, s) \end{vmatrix} C_{n-1}^{\frac{1}{2}}(\cos \theta_i) \quad (2.1)$$

Тогда из (1.2) и (1.3) с учетом начальных условий (1.5) относительно коэффициентов рядов (2.1) получим уравнения

$$\gamma_i^2 s^2 \ddot{U}_{in}^L = I_n^{(i)}(U_{in}^L) + \alpha_0^{(i)}(P_{i0n}^L + P_{isn}^L), \quad U_{in}^L = \begin{vmatrix} u_{in}^L \\ w_{in}^L \\ \Phi_{in}^L \end{vmatrix}^T \quad (2.2)$$

$$I_n^{(i)} = \|l_{lmn}^{(i)}\|_{3 \times 3}, \quad P_{i0n}^L = \begin{vmatrix} 0, p_{i0n}^L, 0 \end{vmatrix}^T, \quad P_{isn}^L = \begin{vmatrix} 0, p_{isn}^L, 0 \end{vmatrix}^T, \quad p_{i0n}^L = -s \phi_{in}^L \Big|_{r_i=R_i}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{in}^L}{\partial r_i} \right|_{r_i=R_i} = s w_{in}^L \quad (2.3)$$

Формулы для элементов матрицы $I_n^{(i)}$ и коэффициента $\alpha_0^{(i)}$ приведены в [3].

Изображение уравнения (1.1) имеет вид $s^2 \varphi^L = \Delta_i \varphi^L$, $p^L = -s \varphi^L$. Принимая во внимание ограниченность решения (1.4), интеграл этого уравнения запишем так

$$\varphi^L = \frac{1}{\sqrt{r_1}} \sum_{n=0}^{\infty} A_{in}^L(s) K_{n+\frac{1}{2}}(r_i s) P_n(\cos \theta_1) + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \sum_{p=0}^{\infty} A_{2p}^L(s) K_{p+\frac{1}{2}}(r_2 s) P_p(\cos \theta_2) \quad (2.4)$$

где $A_{in}^L(s)$ – неизвестные функции, которые должны быть определены из граничных условий; $K_{n+\frac{1}{2}}(x)$ – модифицированные функции Бесселя второго рода.

Используя теперь теорему сложения для функций $K_{n+\frac{1}{2}}(x)$ [4] и их связь с элементарными [3], выражения для коэффициентов φ_{in}^L и p_{i0n}^L представим следующим образом:

$$\varphi_{in}^L = \frac{1}{r_i^{n+1} s^n} \left[A_{in}^L(s) R_{n0}(r_i s) e^{-r_i s} + G_{n0}(r_i s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}(s) A_{jp}^L(s) e^{-hs} \right]$$

$$p_{i0n}^L = -s \varphi_{in}^L, \quad G_{n0}(s) = R_{n0}(-s) e^s - R_{n0}(s) e^{-s}, \quad R_{n0}(s) = \sum_{k=0}^n A_{nk} s^{n-k} \quad (2.5)$$

$$C_{np}(s) = \frac{2n+1}{2hs} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} b_{\sigma}^{(n0p0)} \frac{R_{\sigma0}(hs)}{(hs)^{\sigma}}, \quad A_{nk} = \frac{(n+k)!}{(n-k)! k! 2^k} \quad (j=3-i)$$

где $b_{\sigma}^{(n0p0)}$ – коэффициенты Клебша – Гордона [4]. Далее, решая системы уравнений (2.2), найдем w_{in}^L :

$$\begin{aligned} w_{in}^L(s) &= \alpha_0^{(i)} \tilde{\Delta}_{in}(s) [p_{i0n}^L(s) - p_{i0n}^L(s)] / \Delta_{in}(s) \\ \tilde{\Delta}_{i0}(s) &= 1, \quad \Delta_{i0}(s) = \gamma_i^2 s^2 - l_{220}^{(i)} \\ \tilde{\Delta}_{in}(s) &= (\gamma_i^2 s^2 - l_{11n}^{(i)}) (\gamma_i^2 s^2 - l_{33n}^{(i)}) - l_{13n}^{(i)} l_{31n}^{(i)} \\ \Delta_{in}(s) &= (\gamma_i^2 s^2 - l_{11n}^{(i)}) (\gamma_i^2 s^2 - l_{22n}^{(i)}) (\gamma_i^2 s^2 - l_{33n}^{(i)}) - l_{12n}^{(i)} l_{23n}^{(i)} l_{31n}^{(i)} - \\ &- l_{13n}^{(i)} l_{21n}^{(i)} l_{32n}^{(i)} - (\gamma_i^2 s^2 - l_{22n}^{(i)}) l_{13n}^{(i)} l_{31n}^{(i)} - (\gamma_i^2 s^2 - l_{11n}^{(i)}) l_{23n}^{(i)} l_{32n}^{(i)} - \\ &- (\gamma_i^2 s^2 - l_{33n}^{(i)}) l_{12n}^{(i)} l_{21n}^{(i)} \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя сюда выражение для p_{i0n}^L из (2.5) и удовлетворяя граничным условиям (2.3), получим совокупность двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно $A_{in}^L(s)$ ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(i)} \mathbf{A}_i y_i^2 + (\mathbf{F}_1^{(i)} - \mathbf{F}_2^{(i)} y_i^2) \mathbf{A}_j x &= \mathbf{K}^{(i)} y_i \quad (j = 3-i) \\ \mathbf{A}_i = \left\| A_{i0}^L(s), A_{i1}^L(s), \dots \right\|^T, \quad x = e^{-hs}, \quad y_i = e^{-R_i s} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь $\mathbf{F}_k^{(i)}$ ($k = 1, 2$), $\mathbf{M}^{(i)}$ и $\mathbf{K}^{(i)}$ – бесконечные матрица, диагональная матрица и столбец с элементами $F_{knp}^{(i)}(s)$, $M_n^{(i)}(s)$, и $K_n^{(i)}(s)$, которые имеют вид (многочлены

$R_{nl}(s)$ приведены в [3]):

$$F_{knp}^{(i)}(s) = \left\{ R_{nl} [(-1)^k R_i s] \Delta_{in}(s) + \frac{\alpha_0^{(i)}}{\beta_1^{(i)}} s^2 R_{n0} [(-1)^k R_i s] \tilde{\Delta}_{in}(s) \right\} C_{np}(s)$$

$$M_n^{(i)}(s) = \frac{F_{2np}^{(i)}(s)}{C_{np}(s)}, \quad K_n^{(i)}(s) = -\frac{\alpha_0^{(i)}}{\beta_1^{(i)}} s^{n+1} R_i^{n+2} p_{ish}^L(s) \tilde{\Delta}_{in}(s)$$

Решение системы уравнений (2.7) представим в виде рядов по экспонентам, что позволяет отказаться от ее редукции

$$\mathbf{A}_i = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \mathbf{a}_{klm}^{(i)} x^k y_1^{-l} y_2^{-m}, \quad \mathbf{a}_{klm}^{(i)} = \left[a_{klm,0}^{(i)}(s), a_{klm,1}^{(i)}(s), \dots \right]^T \quad (2.8)$$

Подставляя представления (2.8) в систему (2.7), получим рекуррентные соотношения для элементов бесконечных столбцов $\mathbf{a}_{klm}^{(i)}$:

$$a_{klm,n}^{(1)}(s) = \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}(s) a_{k-1,lm,p}^{(2)}(s) \quad (k \geq 1; l=0,1; m \geq 0; n \geq 0)$$

$$a_{klm,n}^{(1)}(s) = \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}(s) \left[a_{k-1,lm,p}^{(2)}(s) - \frac{K_n^{(1)}(s)}{M_n^{(1)}(s)} a_{k-1,l-2,m,p}^{(2)}(s) \right] \quad (k \geq 1; l \geq 2, m \geq 0; n \geq 0)$$

$$a_{klm,n}^{(2)}(s) = \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}(s) a_{k-1,lm,p}^{(1)}(s) \quad (k \geq 1; l \geq 0; m=0,1; n \geq 0)$$

$$a_{klm,n}^{(2)}(s) = \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}(s) \left[a_{k-1,lm,p}^{(1)}(s) - \frac{K_n^{(2)}(s)}{M_n^{(2)}(s)} a_{k-1,l,m-2,p}^{(2)}(s) \right] \quad (k \geq 1; l \geq 0, m \geq 2; n \geq 0) \quad (2.9)$$

и начальные условия к ним

$$a_{00m,n}^{(1)}(s) = 0 \quad (m \geq 0, n \geq 0), \quad a_{010,n}^{(1)}(s) = -K_n^{(1)}(s) / M_n^{(1)}(s) \quad (n \geq 0)$$

$$a_{0lm,n}^{(1)}(s) = 0 \quad (m \geq 1, n \geq 0), \quad a_{0lm,n}^{(1)}(s) = 0 \quad (l \geq 2, m \geq 0, n \geq 0) \quad (2.10)$$

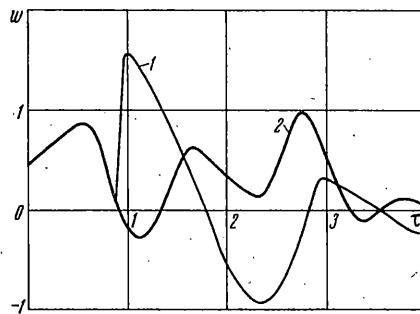
$$a_{0l0,n}^{(2)}(s) = 0 \quad (l \geq 0, n \geq 0), \quad a_{001,n}^{(2)}(s) = -K_n^{(2)}(s) / M_n^{(2)}(s) \quad (n \geq 0)$$

$$a_{0l1,n}^{(2)}(s) = 0 \quad (l \geq 1, n \geq 0), \quad a_{0lm,n}^{(2)}(s) = 0 \quad (l \geq 0, m \geq 2, n \geq 0)$$

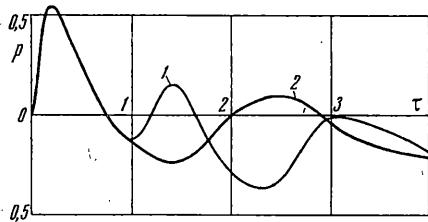
Окончательно с использованием разложений (2.8) найдем изображение коэффициентов рядов p_{i0n}^L для давления в жидкости

$$p_{i0n}^L = \frac{1}{r_i^{n+1} s^{n-1}} \left\{ R_{n0}(r_i s) a_{klm,n}^{(i)}(s) e^{-r_i s} + \right. \\ \left. + \left[R_{n0}(-r_i s) e^{-(h-r_i)s} - R_{n0}(r_i s) e^{-(h+r_i)s} \right] \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}(s) a_{klm,n}^{(j)}(s) \right\} \quad (j = 3-i) \quad (2.11)$$

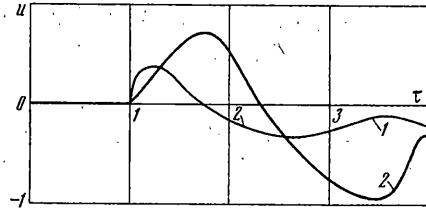
Отметим, что при замене рядов (2.1) конечными отрезками соответствующие частичные суммы должны быть использованы и в рекуррентных соотношениях (2.8). При этом функции $a_{klm,n}^{(i)}(s)$ представляют собой линейные комбинации характеристик



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

внешних нагрузок $p_{1s}^L(s)$ с коэффициентами в виде рациональных функций параметра преобразования, что позволяет находить оригиналы элементарными средствами.

3. Пример. Для демонстрации возможностей предложенного алгоритма рассмотрим конкретную задачу, в которой к внутренним поверхностям стальных оболочек приложены равномерные давления вида $p_{1s}(\tau, \theta_1) = p_{2s}(\tau, \theta_2) = H(\tau)$, где $H(\tau)$ – единичная функция Хевисайда. Окружающая их среда – вода. Геометрические параметры приняты следующими: $R_1 = R_2 = 1$, $h = 3$.

Поскольку в данном варианте имеет место симметрия относительно плоскости, проходящей через середину отрезка O_1O_2 и перпендикулярно ему, то достаточно привести результаты только для одной оболочки. Они продемонстрированы на фиг. 2–4. На первых двух из них даны графики зависимостей нормального перемещения $w = w_2$ и давления $p = p_2$ от времени в точках $r_2 = 1$, $\theta_2 = \pi$ (кривая 1) и $r_2 = 1$, $\theta_2 = \pi/2$ (кривая 2), на фиг. 4 – аналогичная зависимость для тангенциального перемещения $u = u_2$ в точках $r_2 = 1$, $\theta_2 = 3\pi/4$ (кривая 1) и $r_2 = 1$, $\theta_2 = \pi/2$ (кривая 2). Отметим, что в точке $r_2 = 1$, $\theta_2 = \pi$ это перемещение тождественно равно нулю.

Все результаты получены с учетом первых четырех членов рядов (2.1). При этом, как показывают расчеты, учет пятых членов приводит к незначительным уточнениям.

4. Заключение. На основании методов неполного разделения переменных и интегрального преобразования Лапласа получено точное решение осесимметричной задачи о нестационарных колебаниях двух тонких упругих сферических оболочек в акустическом пространстве при действии давлений на их внутренних поверхностях.

В качестве примера приведены результаты расчетов для варианта двух одинаковых оболочек и возмущающего равномерного давления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00255).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Шукров А.М. Нестационарные волны от сферической оболочки в упругом полупространстве // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 70–75.
2. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Шукров А.М. Нестационарные волны в упругом пространстве с двумя сферическими включениями // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 52–58.
3. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. М.: Наука, 1990. 264 с.
4. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.03.1999