МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1999

УДК 539.3

© 1999 г. Р.А. КАЮМОВ

СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА РАСЧЕТА МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ ИЗ НИХ

Рассматривается связанная задача об определении напряженно-деформированного состояния конструкций и нелинейно-упругих характеристик материала, из которого они изготовлены. В операторном виде дается математическая формулировка проблемы и рассматриваются подходы к ее решению. Обсуждаются особенности исследуемой задачи и приводятся примеры, иллюстрирующие некоторые методы ее решения.

1. Введение. При расчете конструкций необходимо решить ряд проблем, в том числе вопросы отыскания механических характеристик материала, выбора расчетной схемы (математических моделей поведения материала и конструкции, представления внешних воздействий, условий закрепления), выбора метода решения уравнений. Традиционные способы определения механических характеристик некоторых материалов (например, композитных материалов (КМ) типа лент, жгутов) иногда наталкиваются на технические трудности. Кроме того, эти характеристики нередко изменяются от изделия к изделию, что связано, например, с влиянием на свойства материала технологических факторов, условий работы в составе конструкции. Существуют методы, которые дают возможность обойти часть этих сложностей. Например, механические характеристики композитного материала можно отыскивать на основе анализа данных об экспериментальных испытаниях многослойных образцов, изготовленных из этого КМ (см., например, [1–5]). В последнее время развиваются подходы, позволяющие определять механические характеристики материла на основе учета экспериментальных результатов о работе конструкции [6–9].

Общая постановка связанной задачи, исследуемой в данной работе, заключается в следующем. Рассматривается конструкция, изготовленная из материала, механические характеристики которого неизвестны. Считаются известными данные испытаний изделия и(или) его аналогов с замером ряда уровней экспериментальных внешних воздействий (например, силовых факторов) и соответствующих им откликов конструкций в некоторых областях или точках (например, кинематических параметров – перемещений или деформаций), а также математические модели поведения материала и конструкций подобного типа. Ставится задача совместного определения механических характеристик материала и параметров отклика рассматриваемого изделия на заданное внешнее воздействие с учетом некоторых данных экспериментов при других (и возможно заданном) воздействиях на это изделие и его аналоги.

Суть метода решения этой задачи заключается в следующем. Результаты, полученные во время испытаний, записываются в виде зависимостей между воздействиями и откликами конструкций с использованием математической модели их поведения. К ним добавляются соотношения "воздействие – отклик" для интересующего расчетчика заданного внешнего силового фактора. Формулируется задача математического программирования о минимизации квадратичной невязки всей или части полученной системы уравнений, из решения которой определяются как механические характеристики материала, так и параметры отклика конструкций (в том числе и на заданное воздействие).

Ниже этот подход исследован для случая, когда материал представляет собой нелинейно-упругое тело. Проблемы, связанные с устранением ошибок, появляющихся ввиду наличия разброса экспериментальных данных ("шумов"), систематических отклонений показаний приборов, в данной работе не исследуются (см. об этом, например, в [9]).

2. Математическая формулировка задачи. Форму физических соотношений для нелинейно-упругого материла, из которого изготовлены конструкции, запишем в виде:

$$\sigma = \partial f/\partial \varepsilon \tag{2.1}$$

где σ, ε – векторы, составленные из компонент тензоров напряжений и деформаций, f – упругий потенциал. Здесь и далее векторы обозначены строчными буквами, а матрицы и операторы – прописными, операция транспонирования – индексом (T).

Математическая модель деформирования исследуемых конструкций позволяет записать:

связь между деформациями и перемещениями

$$\varepsilon(x) = Bu(x) \tag{2.2}$$

кинематические граничные условия

$$Gu(x) = 0, \ \ x \subset \gamma_u \tag{2.3}$$

уравнения равновесия конструкций (аналогов, образцов), изготовленных из исследуемого материала

$$Q\sigma(x) = q(x, t), \ \ x \subset \omega \tag{2.4}$$

$$P\sigma(x) = p(x, t), \ \ x \subset \gamma_p \tag{2.5}$$

Здесь x – радиус-вектор точки; u – вектор перемещений; t – параметр процесса нагружения; q, p – векторы внешних объемных и поверхностных сил; Q, P, B, G – дифференциальные или интегральные операторы; ω – область, занимаемая телом; γ_p, γ_u – ее границы, на которых заданы соответственно поверхностные внешние силы и кинематические граничные условия.

Если соотношения (2.1) – (2.5) записываются в разных системах координат (например, в осях $Ox^1x^2x^3$ и $O\hat{x}^1\hat{x}^2\hat{x}^3$), то добавляются формулы преобразования

$$\hat{\sigma} = S\sigma, \quad \varepsilon = S^t\hat{\varepsilon} \tag{2.6}$$

где S – квадратная матрица.

Пусть проведены испытания ряда конструкций и сделаны замеры обобщенного перемещения y^* (например, углов поворота, перемещений или деформаций) в некоторых их точках $\overset{*}{x}_n$ ($n = 1, \ldots, N$) при разных значениях параметра нагружения $\overset{*}{t}_i$, т.е. при $p = p_i^*$, $q = \overset{*}{q}_i$ ($i = 1,\ldots, I$); $\overset{*}{t}_i > \overset{*}{t}_{i-1}$. Здесь и далее звездочкой будут отмечаться параметры, полученные в эксперименте или в результате аппроксимации экспериментальных данных. Таким образом, считаются известными параметры $\overset{*}{y}_{ni}$.

Запишем выражения, связывающие функции u и y в виде $y = Du$, где D – дифференциальный, интегральный или алгебраический оператор. Тогда результаты экспериментов можно представить в виде

$$Du(x_n^*, t_i^*) = y_{ni}^* \tag{2.7}$$

Необходимо найти функции $f(\varepsilon)$, и $u(x)$, которые точно или приближенно удовлетворяют соотношениям (2.1)–(2.7) при $t = \overset{*}{t}_i$ и при некотором $t = t_0$ (т.е. при интересующих расчетчика нагрузках $p_0 = p(x, t_0)$, $q_0 = q(x, t_0)$).

3. Сведение к задаче математического программирования. Соотношение (2.1) представим с помощью следующей аппроксимационной функции:

$$\sigma = \varphi\,(\varepsilon, c) \qquad (3.1)$$

где c – вектор, составленный из искомых постоянных c_j ($j = 1,\ldots, J$), определяющих свойства материала.

По экспериментальным данным $\overset{*}{y}_{ni}$ можно найти аппроксимации для обобщенных перемещений в точках $\overset{*}{x}_n$ в виде функции параметра процесса t. Запишем эти результаты в операторном виде

$$Du(x^*) = d^*(x^*, t), \quad x^* \subset g^*, \quad t_1^* \leqslant t \leqslant t_I^* \qquad (3.2)$$

где d^* – аппроксимирующая функция, g^* – множество точек, в которых проведены замеры.

Аналогично по значениям нагрузок $\overset{*}{p}_i$, $\overset{*}{q}_i$ при $t = \overset{*}{t}_i$, но с добавлением к ним функций p_0, q_0 при $t = t_0$, можно найти аппроксимации для p, q в виде: $p = p^*\,(x, t)$, $q = q^*\,(x, t)$, $p^*\,(x, \overset{*}{t}_i) \approx \overset{*}{p}_i$, $q^*(x, \overset{*}{t}_i) \approx \overset{*}{q}_i$, $p^*\,(x, t_0) \approx p_0$, $q^*\,(x, t_0) \approx q_0$.

Проведем аппроксимацию операторов Q, P, B, G по пространственным координатам и параметру t, а функцию u выразим через вектор v, составленный из неизвестных констант v_k ($k = 1,\ldots K$):

$$u = u^a\,(v, x, t) \qquad (3.3)$$

Для получения из (2.1)–(2.6) алгебраической системы уравнений относительно искомых векторов v, c можно использовать какой-либо из известных методов решения дифференциальных или интегральных уравнений. После этого уравнения (2.1)–(2.6), записанные для нагрузок p^*, q^*, можно представить следующим образом:

$$L^a[v, c, q^*(t)] = 0, \quad P^a[v, c, p^*(t)] = 0, \quad G^a(v) = 0 \qquad (3.4)$$

С учетом (3.3) соотношение (3.2) записывается в виде:

$$D^a(v, x^*, t) = d^*(x^*, t), \quad x^* \subset g^*, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_I \qquad (3.5)$$

Систему уравнений (3.4), (3.5) для ряда значений параметра t ($t = \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_p$) запишем в виде: $r\,(v, c, \tau_1) = 0$, $r\,(v, c, \tau_2) = 0,\ldots$. Вводя новый вектор z с безразмерными компонентами, составленный из v и c, перепишем эту систему следующим образом:

$$\zeta(z) = 0, \quad z = H\{v^T, c^T\} \qquad (3.6)$$

Умножим (3.6) на квадратную диагональную матрицу весовых коэффициентов W и запишем результат в виде

$$W\zeta(z) = a(z) = 0 \qquad (3.7)$$

В общем случае получается система нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных c_i, v_k, которая может быть недоопределенной, определенной и переопределенной.

Критериями, в соответствии с которыми необходимо отыскивать решение, являются: точность удовлетворения уравнений механики, минимальность невязки расчетных и экспериментальных результатов, устойчивость решения к возмущениям исходных данных. Кроме того, на параметры c_i, вообще говоря, должны накладываться ограничения, вытекающие из условия устойчивости материала

$$d\sigma\, d\varepsilon \geqslant 0 \qquad (3.8)$$

Это приводит к требованию неотрицательной определенности матрицы Гессе, составленной из вторых производных упругого потенциала f по компонентам вектора ε.

Уравнения (3.7) могут не иметь решения в классическом смысле, даже если форма закона упругости (3.1) выбрана так, что условие устойчивости (3.8) будет выполняться при любых c_i, т.е. система (3.7) может оказаться несовместной, иметь неединственное решение, быть неустойчивой по отношению к возмущениям исходных данных. Такие задачи называются некорректно поставленными [10]. В настоящее время разработаны различные способы их решения. В частности, согласно метода квазирешений вектор z на компакте можно искать, сводя проблему к некоторой задаче математического программирования, выбрав в качестве целевой функции, например, квадратичную невязку уравнений (3.7) $\delta^2 = a^T(z)a(z)$.

Если для выбора вектора c можно выделить множество, в котором будет удовлетворяться условие (3.8), то можно записать условие минимума δ^2 в следующем виде:

$$(\partial a^T/\partial z)a = 0 \tag{3.9}$$

Можно также минимизировать квадратичную невязку только уравнений (3.5) со своими весами, а уравнения (3.4) считать ограничениями, получая таким образом задачу на условный экстремум (сходный с последним подход к решению задачи определения линейноупругих характеристик материала можно найти в [6], в которой он назван методом планирования экстремальных численных экспериментов; см. также [7–9]). В последнем случае уравнения механики получают приоритет, т.е. точность их выполнения будет считаться более важной, чем соответствие экспериментальных и расчетных результатов.

Можно в качестве ограничений оставить лишь часть соотношений (3.4), (3.5) и минимизировать невязку оставшихся уравнений.

Выбор параметров $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_p$, числа p, совокупности уравнений, невязка которых минимизируется, весовых коэффициентов матрицы W достаточно произволен. Он определяется рядом объективных и субъективных факторов (например, желанием уменьшить значение сомнительных с точки зрения расчетчика экспериментов или экспериментов, полученных для далеких от p_0, q_0 нагрузок).

Полученная задача (3.9) может иметь множество решений. В частности, неоднозначность решения будет иметь место тогда, когда J – число неизвестных компонент вектора c будет больше I – числа экспериментов.

Один из методов решения некорректных задач [10] заключается в том, что минимизируется некоторый стабилизирующий функционал Ω при условии, что мала невязка уравнений (3.7). В качестве Ω можно выбрать, например, квадратический функционал $\Omega = (z-z_0)^T A(z-z_0)$, где A – положительно определенная квадратическая матрица, z_0 – некоторый вектор из множества, в котором отыскивается z. Его можно найти, например, задав c_0 для какого-либо реального материала и решив прочностные задачи (3.4). Найденное решение будет устойчивым относительно возмущений исходных данных [10]. В общем случае решение будет зависеть от z_0, в частности, в упомянутом выше случае, когда $J > I$. Однако любой вектор z (так называемое нормальное относительно z_0 решение [10]), удовлетворяющий с некоторой точностью уравнениям механики, экспериментальным данным, устойчивый к возмущениям исходных данных, не противоречащий физическому смыслу задачи следует принимать за решение.

Задачу можно также решать путем минимизации регуляризированного функционала вида [10]:

$$\Phi^2 = \delta^2 + \alpha\Omega \tag{3.10}$$

В литературе можно найти различные методы отыскания регуляризирующего параметра α.

Если записать функционал δ^2 и ограничения (3.8) в линеаризованном виде относительно малых приращений Δz к начальному вектору z_0, то получим задачу линейного программирования относительно Δz, к которой применимы результаты, приведенные в [10]. Из (3.9) вытекает

$$\delta^2 = \delta^2(z_0) + b^T(z_0)\,\Delta z \tag{3.11}$$

Если $|\Delta z| \ll |z_0|$, то $b^T(z_0) \cong \partial\delta^2(z_0)/\partial z$.

Условие устойчивости материала (3.8) будет обеспечено, если будут неотрицательны все главные миноры матрицы Гессе $F = \partial^2 f/\partial\varepsilon\partial\varepsilon$:

$$\varphi_1 = F_{11} \geqslant 0,\quad \varphi_2 = \det\begin{Vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{Vmatrix} \geqslant 0, \ldots \varphi_k \geqslant 0 \ (k = 1, \ldots k_0) \tag{3.12}$$

Записывая (3.12) через приращения Δz, получим

$$\varphi_k(z_0) + \Theta^T(z_0)\,\Delta z \geqslant 0 \ (k = 1, \ldots) \tag{3.13}$$

Эти условия для материала, вообще говоря, должны удовлетворяться не только для частного случая z_0, а для любых z. Но для разрешимости задачи без нарушения энергетических законов механики вблизи точки z_0 достаточно выполнения неравенств (3.13).

Как показано в [10], полученная задача линейного программирования о минимизации (3.11) при ограничениях (3.13) имеет единственное и устойчивое нормальное решение.

Аналогично можно рассмотреть и показать существование, единственность и устойчивость решения Δz в задаче о минимизации части уравнений (3.7).

Рассматриваемый подход к проблеме расчета конструкций имеет ряд положительных черт, которые состоят в следующем:

1. Устраняются трудности, возникающие при использовании традиционных методик для определения механических характеристик КМ (типа ленточек и жгутов) в поперечном направлении;

2. Косвенно учитывается влияние на свойства материала технологических факторов, изменение свойств фаз при работе в составе конструкции и особенности выбранного метода расчета конструкций;

3. Предварительными оценочными расчетами конструкции можно выбрать оптимальную схему расположения датчиков, измеряющих деформации и(или) перемещения.

Этот подход имеет и недостатки, например, следующие:

1. Сложность (по сравнению с прочностными расчетами) привлекаемых методов решения;

2. Зависимость получающихся механических характеристик от выбранного метода решения уравнений «воздействие-отклик», от параметра нагрузки t_0 (или q_0, p_0), от матрицы весовых коэффициентов W, а в случае неоднозначности решения задач – от выбора z_0. Таким образом, каждый расчетчик определяет механические характеристики материала в соответствии с выбранной им расчетной схемой с учетом данных испытаний конструкций. Это предполагает наличие или создание банка экспериментальных данных для различных видов изделий при разных видах нагрузки.

4. Демонстрационные примеры. В качестве иллюстрации постановки и первого подхода к решению связанной задачи рассмотрим следующий простой пример. Пусть тяжелый стержень длины a (здесь и далее все параметры – безразмерные), с переменным модулем упругости $E\,e(x)$ (E – неизвестная константа) закреплен снизу. Уравнение равновесия стержня имеет вид:

$$E\,e(x)\,du/dx = \rho g\,(x - a) \tag{4.1}$$

Здесь ось x направлена вверх от точки закрепления, ρ – плотность, g – ускорение свободного падения, u – искомое перемещение. Для примера рассмотрим случай, когда

$e(x) = \rho g\,(x-a)/\sin(x-a)$. Уравнение равновесия (4.1) примет вид

$$E\,du/dx = \sin(x-a) \tag{4.2}$$

точное решение которого $u = h(x)$, $h = [\cos a - \cos(x-a)]/E$.

Предположим, что замерены перемещения в разных точках стержня. Представим их в виде

$$u_i^* = (1+b_i)h(x_i^*), \quad x_i = a_i \leqslant a \quad (i = 1,\ldots,I) \tag{4.3}$$

где b_i – константы, позволяющие имитировать неточность замера. Необходимо из (4.2), (4.3) найти функцию u и параметр E.

Рассмотрим двучленную аппроксимацию функции u

$$u = Vr(x) + Uq(x) \tag{4.4}$$

В качестве $r(x)$, $q(x)$ будем использовать два варианта функций, позволяющих с различной степенью точности аппроксимировать $u(x)$. В первом варианте: $r = r_1 = -x\sin a$, $q = q_1 = x^2/2\cos a$. Во втором: $r = r_2 = (x^2/6 - x)\sin a$, $q = q_2 = (x^2/2 - x^4/24)\cos a$. Для решения уравнения (4.2) выберем метод коллокаций. Точки коллокации обозначим через X_k ($k = 1, 2, \ldots, K$). Подстановка (4.4) в (4.2) и в (4.3) дает систему уравнений относительно V, U, E, квадратичная невязка которой

$$\delta^2 = \sum_{k=1}^{K} w_k\{E[Vr'(X_k)+Uq'(X_k)]-\sin(X_k-a)\}^2 + \sum_{i=1}^{I} w_{i+K}\{[Vr(a_i)+Uq(a_i)]-(b_i^*+1)h^*(a_i)\}^2$$

где штрихом обозначены производные по x, w_j – весовые коэффициенты. Условие минимума δ^2 в этом случае дает нелинейную систему относительно V, U, E, которую можно решить аналитически.

В табл. 1 приведены разницы в процентах (%) между вычисленными и точными значениями $u_{\max}$ и E. В последней строке приведены погрешности вычисления $u_{\max}$ обычным методом коллокаций при точном значении E. Принималось $a = 1,4$, $I = 1$, $a_1 = 0{,}5a$, $b_1 = 0$, $w_1 = \ldots = w_4 = 1$. При $K = 2$ использовались следующие точки коллокации: $X_1 = 0{,}333\,a$, $X_2 = 0{,}666\,a$, а при $K = 3$: $X_1 = 0{,}2\,a$, $X_2 = 0{,}5\,a$, $X_3 = 0{,}8\,a$. Расчеты показали, что решение устойчиво по отношению к "неточностям замера" b_i.

Из таблицы видно, что даже при более грубой аппроксимации функции u результат решения связанной задачи ближе к точному по сравнению с решением обычной прочностной задачи при точном значении модуля упругости.

В качестве второго примера исследовалась задача расчета напряженно-деформированного состояния конической многослойной оболочки с жесткой крышкой, образованной намоткой ортотропной ленты по геодезическим линиям [11], и определения линейно-упругих характеристик этой ленты. Рассматривалось нагружение внутренним давлением q. Дискретизация оболочки проводилась методом конечных элементов.

Ввиду линейности закона упругости достаточно одного значения параметра нагрузки t. В качестве y_{n1}^* (см. формулу (2.7)) были выбраны деформации в направлении меридиана. Для получения значений этих деформаций $(\varepsilon_x^*)_n$ в некоторых точках x_n^* на внешней поверхности оболочки был использован численный эксперимент, т.е. была решена прямая задача об определении напряженно-деформированного состояния конструкции с известными значениями упругих констант ленты $c_i = c_i^\circ$ при большом количестве элементов NE, обеспечивающем достаточную точность решения (56 элементов, $NE = 56$).

При рассмотрении связанной задачи сначала апробировался метод, в котором минимизировалась квадратичная невязка расчетных и экспериментальных данных, т.е. уравнений (3.5), а уравнения (3.4) считались ограничениями. Решение этой задачи на

Таблица 1

r, q	r_1, q_1		r_2, q_1		r_2, q_2	
K	2	3	2	3	2	3
ΔE, %	5,0	2,8	–1,1	–0,52	–0,81	–0,43
Δu_{max}, %	0,71	–0,26	–1,9	–0,81	–1,6	–0,74
Δu°_{max}, %	5,7	2,4	–3,0	–1,4	–2,4	–1,2

Таблица 2

NE	$\varepsilon_x/(\varepsilon^*_x)_1$					δ^2_ε	δ^2_σ
	$x=0$	0,25	0,5	0,75	1		
ε^*_x	1	–0,341	–0,208	–0,153	0,077	0	0
$c_i = c^{\circ}_i$ $NE = 8$	0,773	–0,652	–0,196	–0,173	–0,169	0,178	0,156
$c_i = c^{\circ}_i + \Delta c_i$ $NE = 8$	0,937	–0,444	–0,022	–0,086	–0,105	0,0759	0,125
$\delta^2 = \delta^2_\varepsilon + \delta^2_p$ $NE = 8$	0,937	–0,435	–0,030	–0,051	–0,073	–0,0666	–0,177
$\delta^2 = \delta^2_\varepsilon + \alpha\Omega$ $NE = 8, J > I$	1	–0,341	–	–	–	0,000	0,305

условный экстремум осуществлялось методом наискорейшего спуска, причем, градиенты функции цели вычислялись численно. Для этого на первом шаге искомым неизвестным c_i задавались начальные значения $c_i^{(b)}$. Тогда решение прямой задачи, т.е. уравнений (3.4), позволяет в точках $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*$ вычислить деформацию $\varepsilon_x^{(b)}$. Выполнив эту процедуру при $c_i^{(e)}$ и найдя $\varepsilon_x^{(e)}$ в точках $x_1^*, x_2^*, \ldots$ можно записать приближенное выражение для ε_x в этих точках в виде разложения в ряд Тейлора

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^{(b)} + \varepsilon_1'\Delta c_1 + \varepsilon_2'\Delta c_2 + \ldots + \varepsilon_N'\Delta c_N$$

$$\varepsilon_i' = (\varepsilon_x^{(e)} - \varepsilon_x^{(b)})/(c_i^{(e)} - c_i^{(b)}), \qquad \Delta c = c_i - c_i^{(b)} \tag{4.5}$$

Подстановка $\varepsilon_x, \varepsilon_x^*$ вместо D^a, d^* в уравнения (3.5) позволяет представить невязку этих уравнений в виде квадратичной функции от компонент вектора Δc:

$$\delta^2_\varepsilon = w_1\{[(\varepsilon_x^{(b)} - \varepsilon_x^*) + \varepsilon_1'\Delta c_1 + \varepsilon_2'\Delta c_2 + \ldots]^2\}|_{x=x_1^*} +$$

$$+ w_2\{[(\varepsilon_x^{(b)} - \varepsilon_x^*) + \varepsilon_1'\Delta c_1 + \varepsilon_2'\Delta c_2 + \ldots]^2\}|_{x=x_2^*} + \ldots$$

После спуска в направлении вектора

$$\frac{\partial \delta^2_\varepsilon}{\partial \Delta c_j} = 2\left\{\sum_{i=1}^{N} w_i(\varepsilon_x^{(b)} - \varepsilon_x^*)|_{x=x_i^*}\right\}\varepsilon_j'\Big|_{x=x_i^*}$$

значения $c_j^{(b)}$ изменяются на Δc_j и итерации повторяются начиная с нового значения $c_j^{(b)}$.

В качестве c_i были выбраны следующие жесткостные характеристики ленты: $c_1 = E_1/(1 - \mu_{12}\mu_{21})$, $c_2 = \mu_{12}c_1$, $c_3 = E_2/(1 - \mu_{12}\mu_{21})$, $c_4 = G_{12}$, где E_1 – модуль упругости ленты вдоль армирования, E_2 – поперек армирования, G_{12} – модуль сдвига, μ_{12}, μ_{21} – коэффициенты Пуассона. Задача решалась при малом числе элементов путем минимизации квадратичной невязки δ_ε^2 вычисленных и экспериментальных значений деформаций в направлении меридиана в пяти точках на наружной поверхности оболочки.

Результаты расчетов выявили некоторые особенности решений. В частности, в этой задаче при известных значениях упругих характеристик (поскольку задача тестовая) невязка по напряжениям δ_σ^2, полученная при решении обычной задачи прочности (3.4), не всегда оказывалась больше, чем невязка, полученная при решении связанной задачи (при одинаковом количестве элементов). Отчасти это объясняется тем, что во втором случае количество неизвестных больше, чем в первом. Поэтому при решении связанной задачи степень дискретизации должна быть больше, чем при решении прочностной. Вообще же говоря для твердого тела определить напряжения опытным путем весьма проблематично. Поэтому нельзя найти невязку по напряжениям и вести разговор о соответствии их экспериментальным значениям. С этой точки зрения логичнее использовать критерии прочности, формулируемые в компонентах деформаций.

В табл. 2 для равноудаленных точек меридиана приведены деформации ε_x, отнесенные к ее экспериментальному значению в первом узле $(\varepsilon_x^*)_1$, а также относительные значения невязок по деформациям δ_ε^2 и напряжениям δ_σ^2. При вычислении δ_ε^2 принималось, что $w_1 = w_2 = \ldots = 1/\sum[\varepsilon_x^*(x_k)]^2$ $(k = 1, \ldots, N)$. Аналогично, при подсчете δ_σ^2 считалось, что $w_1 = w_2 = \ldots = 1/\sum[\sigma_x^*(x_k)]^2$ $(k = 1, \ldots, N)$. Были приняты следующие исходные данные: отношение радиусов основания и крышки $R/r = 2$, высота оболочки $H = 2r$, толщина у основания $h = 0{,}02r$, угол намотки у опоры $\psi = 25°$ (x – безразмерные координаты точек меридиана). В первой строке даны экспериментальные значения ε_x^*. В численном эксперименте принималось, что $c_2^\circ = 0{,}1c_1^\circ$; $c_3^\circ = 0{,}5c_1^\circ$; $c_4^\circ = 0{,}588c_1^\circ$. Во второй строке даны значения ε_x, вычисленные при восьмиэлементной дискретизации путем решения обычной прямой задачи с точными значениями упругих характеристик. Ниже приведены значения ε_x, полученные при решении связанной задачи. Для обеспечения условия устойчивости (3.8) принималось, что $c_1 \geqslant \gamma_1 > 0$, $c_3 \geqslant \gamma_3 > 0$, $c_4 \geqslant \gamma_4 > 0$, $c_1c_3 - c_2^2 \geqslant \gamma_2 > 0$, $\gamma_2 = 0{,}05(c_1^2 + c_3^2)$, $\gamma_1 = 0{,}001c_1^\circ$, $\gamma_3 = 0{,}001c_1^\circ$, $\gamma_4 = 0{,}001c_1^\circ$. Третья строка соответствует случаю, когда вычислялись все c_i. Наилучшее приближение к экспериментальным значениям деформаций достигается при следующих значениях упругих характеристик: $c_1 = 0{,}614c_1^\circ$, $c_2 = 4{,}03c_2^\circ$, $c_3 = 0{,}617c_3^\circ$; $c_4 = 0{,}375c_4^\circ$. Как видно из таблицы, в этом случае уменьшается и невязка по напряжениям.

Далее был рассмотрен упомянутый выше способ минимизации квадратичной невязки расчетных и экспериментальных данных δ_ε^2 с добавленной к ней невязкой δ_p^2 части уравнений (3.4). Расчеты проводились для случая, когда добавлялась невязка уравнения равновесия крышки оболочки: $\delta_p^2 = (\Sigma B_i u_i - \pi r q/2)^2 w_p$. Весовой коэффициент w_p для него принимался следующим:

$$w_p = \beta \Big/ \left[\sum_i (B_i u_i)^2 + \pi^2 r^2 q^2 / 4 \right]$$

Здесь β – параметр, позволяющий задавать относительную точность выполнения уравнения равновесия крышки по сравнению с точностью удовлетворения уравнений (3.5). При этом, чем больше β, тем точнее выполняется уравнение равновесия. В четвертой строке табл. 2 приведены результаты, полученные для рассмотренной выше задачи в случае $\beta = 10$. Минимизация $\delta_\varepsilon^2 + \delta_p^2$ дала уменьшение δ_ε^2 при следующих значениях упругих характеристик: $c_1 = 0,481c_1^\circ$, $c_2 = 4,03c_2^\circ$, $c_3 = 0,754c_3^\circ$, $c_4 = 0,437c_4^\circ$.

Далее рассматривались случаи, в которых число экспериментальных результатов J меньше числа искомых параметров c_i. Вместо δ_ε^2 минимизировался следующий функционал:

$$\Phi = \delta_\varepsilon^2 + \alpha \sum_{i=1}^{4} (c_i - s_i)^2 \Big/ \sum s_i^2$$

$$s_1 = 0,98c_1^\circ,\ s_2 = 4,9c_2^\circ,\ s_3 = 1,37c_3^\circ,\ s_4 = 0,166c_4^\circ$$

Результаты расчетов приведены в последней строке табл. 2 для варианта, в котором число экспериментальных данных равнялось двум, а число искомых констант – четырем. В случае $\alpha = 0,0001$ для них были получены следующие значения: $c_1 = 0,900c_1^\circ$, $c_2 = 2,42c_2^\circ$, $c_3 = 0,874c_3^\circ$, $c_4 = 0,207c_4^\circ$. Варьирование α в интервале 10^{-3}– 10^{-6} приводило к изменению результатов только в четвертом знаке. При больших α вектор c начинал приближаться к s, а при очень малых – начиналась раскачка решения.

Заключение. Рассмотрена проблема расчета конструкций путем совместного решения задач об определении напряженно-деформированного состояния конструкций и механических характеристик материала, из которых они изготовлены, при известных данных об испытаниях этих конструкций. Дана математическая формулировка проблемы в случае нелинейной упругости, которая сведена к задаче математического программирования. Обсуждены особенности этого подхода к расчету конструкций. На примерах продемонстрированы методы решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-00410) и АН Татарстана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Таирова Л.П.* Идентификация упругих характеристик однонаправленных материалов по результатам испытаний многослойных композитов // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1989. Вып. 30. С. 16–31.
2. *Суворова Ю.В., Добрынин В.С., Статников И.Н., Барт Ю.Я.* Определение свойств композита в конструкции методом параметрической идентификации // Механика композит. материалов. 1989. № 1. С. 150–157.
3. *Терегулов И.Г.* Асимптотический анализ и классификация определяющих соотношений для волокнистых композитов и анизотропных оболочек при конечных и неупругих деформациях // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. № 6. С. 1333–1336.
4. *Каюмов Р.А.* Пластическое течение волокнистых материалов и разрушение конструкций из них // Механика композит. материалов. 1993. Т. 29. № 1. С. 77–83.
5. *Терегулов И.Г., Каюмов Р.А., Бутенко Ю.И., Сафиуллин Д.Х.* Определение механических характеристик композитов по результатам испытаний многослойных образцов // Механика композит. материалов. 1995. Т. 31. № 5. С. 607–615.
6. *Воронцов Г.В., Плющев Б.И., Резниченко А.И.* Определение приведенных упругих характеристик армированных композитных материалов методами обратных задач тензометрирования // Механика композит. материалов. 1990. № 4. С. 733–747.

7. *Рикардс Р., Чате А.* Идентификация механических свойств композитных материалов на основе планирования экспериментов // Механика композит. материалов. 1998. Т. 34. № 1. С. 3–16.
8. *Frederiksen P.S.* Experimental procedure and results for the identification of elastic constants of thick orthotropic plates // J. Composite Mater. 1997. V. 31. № 4. P. 360–382.
9. *Lukasiewicz S.A., Babaei R.* On identification of dynamic systems // 7th Intern. Conf. on Computational Methods and Experiments measurements / Eds. G.M. Carlomagno and C.A. Brebbia. Capri, Italy, 1995. P. 477–484.
10. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
11. *Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.

Казань

Поступила в редакцию
29.01.1997 г.