

УДК 539.375

© 1999 г. В.Н. КУКУДЖАНОВ

### **МИКРОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ НЕУПРУГОГО МАТЕРИАЛА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЕФОРМАЦИЙ**

На основе феноменологической теории дислокаций и развития микродефектов предложена модель континуального разрушения поликристаллических материалов и дано ее приложение к исследованию процессов локализации пластических деформаций.

Модель рассматривает пластическую деформацию и разрушение как единый процесс, вызываемый движением дислокаций, а на более поздней стадии зарождением и развитием микродефектов. Процесс деформирования предполагается состоящим из двух различных стадий. На первой стадии происходит пластическая деформация вследствие движения дислокаций в кристаллических зернах материала. Часть дислокаций скапливается на межзеренных границах. Это скопление дислокаций является причиной возникновения остаточных микронапряжений. На макроуровне оно порождает упруговязкопластическое течение материала с одновременным его упрочнением. Вторая стадия начинается после того как интенсивность накопившегося потока дислокации на границах препятствий достигает своего критического значения и начинается процесс аннигиляции дислокаций, который сопровождается дисклинациями зерен с образованием между ними пор, на макроуровне этот процесс сопровождается релаксацией внутренних напряжений и разупрочнением материала.

Поток аннигилирующихся дислокаций характеризуется тензором аннигиляции дислокаций. На макроуровне он приводит к повреждаемости материала и может быть описан тензором поврежденности. Шаровая часть тензора повреждаемости связана с объемом возникающих пор, а девиаторная часть — с деформацией разрушения материала, которая порождает релаксацию остаточных напряжений. Предполагается, что поры по форме близки к сферическим. Эффективный упруговязкопластический материал со сферическими порами может быть описан ассоциированным законом течения с условием пластичности, зависящим от пористости материала и скорости пластической деформации.

Полная система определяющих уравнений относительно макропараметров связывает тензоры активных и остаточных напряжений с тензорами скоростей вязкопластической деформации и повреждаемости.

Исследование системы этих уравнений показало, что она не противоречит неравенствам термодинамики и дает корректную постановку краевых задач механики, включая и стадию, в которой материал разупрочняется. Это позволяет использовать модель для описания процесса локализации пластических деформаций.

Дано решение квазистатической задачи об одноосном растяжении стержня с постоянной скоростью деформации. Показано, что диаграммы материала  $\sigma$ - $\epsilon$  в зависимости от параметров модели описывают широкий круг явлений, свойственный различным материалам: динамическое и кинематическое упрочнение материала, частичное разупрочнение с последующим упрочнением, зуб текучести, запаздывание пластичности, разупрочнение с выходом на асимптотическое течение при постоянном напряжении, гистерезисные петли и другие. Различные виды диаграмм получаются варьированием пяти параметров. Эти параметры могут быть

определены экспериментально с помощью тех же диаграмм при постоянной скорости деформации.

Возможности описания локализации пластической деформации с помощью предложенной модели показаны на примере одномерного динамического растяжения-сжатия стержня при мгновенном приложении к его концам постоянных скоростей. Исследована структура полос локализации пластической деформации. Показана возможность локализации и разрушения как в центре растягиваемого стержня, так и на его концах в зависимости от интенсивности прилагаемого воздействия и характерных параметров материала.

В двумерной осесимметричной постановке исследовано образование полос локализации сдвига при растяжении цилиндрического образца.

1. Построим модель упруговязкопластической среды, в которой в процессе деформирования образуются микродефекты, приводящие к постепенному разрушению материала и интенсивному пластическому течению в локализованных областях типа полос скольжения.

Начальный этап пластического течения описывается на микроуровне движением дислокаций. Скорость вязкопластической деформации  $\dot{\gamma}^p$  пропорциональна потоку движущихся дислокаций

$$\dot{\gamma}^p = abN_m V \quad (1.1)$$

где  $a$  – вектор Бюргерса,  $b$  – коэффициент ориентации. Средняя скорость дислокаций  $V$  определяется термофлуктуационным движением и действующим активным напряжением  $\tau - \tau_r$ :

$$V = V_0 \exp \frac{U_0 - (\tau - \tau_r)}{-k\Theta}, \quad \tau \geq \tau_r \quad (1.2)$$

где  $U_0$  – энергия активации,  $k$  – постоянная Больцмана,  $\Theta$  – абсолютная температура,  $\tau_r$  – остаточное напряжение.

Число подвижных дислокаций  $N_m$  растет пропорционально степени пластической деформации  $\gamma_p$  и падает с увеличением общего числа дислокаций  $N$ , вследствие их запираания на межзеренных границах [3]:

$$N_m = (N_0 + a\gamma_p)^n \exp(-N/N^*) \quad (1.3)$$

где  $N_0$ ,  $n^*$ ,  $a$  – постоянные материала.

Чтобы описать процесс зарождения микродефектов и их развития необходимо рассмотреть баланс потоков дислокаций в материале. В соответствии с формулами (1.1)–(1.3) полный поток дислокаций  $\dot{\rho}_{ij}$  на первой стадии пластической деформации распадается на два: поток подвижных дислокаций  $\dot{\gamma}_{ij}^p$ , идущий на образование собственно пластической деформации и на поток дислокаций  $\dot{\omega}_{ij}$ , который скапливается около изолированных препятствий и на границах зерен.

Обозначим через  $\eta$  ту часть потока  $\dot{\rho}_{ij}$ , которая связана с подвижными дислокациями, а через  $1 - \eta$  поток, скапливающийся на границах зерен. Тогда можно записать, что

$$\dot{\gamma}_{ij}^p = \eta \dot{\rho}_{ij}, \quad (1 - \eta) \dot{\rho}_{ij} = \dot{\omega}_{ij}, \quad 0 < \eta < 1 \quad (1.4)$$

Откуда получаем  $\dot{\omega}_{ij} = (1 - \eta) \dot{\gamma}_{ij}^p / \eta$ .

При достаточном скоплении дислокаций на межзеренных границах происходит частичная аннигиляция накопившихся дислокаций и движение зерен друг относительно друга, возникают дисклинации, образуются микропоры и микрогребни. Эта вторая стадия деформации характеризуется постепенным разрушением материала,

которое приводит к дополнительной деформации. Пластическая деформация сосредотачивается в областях наибольшего макроразрушения и приводит к развитию полос скольжения. На второй стадии баланс потоков запишется так

$$(1 - \eta)\dot{\rho}_{ij} = \dot{\omega}_{ij} + b_{ij}$$

где  $b_{ij}$  – тензор потока аннигиляции дислокаций. Заметим, что на первой стадии пластической деформации шаровая часть тензора  $\rho_{ii} = 0$ , поэтому  $\omega_{ii} = 0$ , на второй стадии  $\rho_{ii} \neq 0$  и  $b_{ii} \neq 0$ .

Естественно предположить, что поток аннигилирующихся дислокаций  $b_{ij}$  пропорционален накопившимся на препятствиях дислокациям  $\omega_{ij}$  и они связаны соотношением

$$b_{ij} = \lambda \omega_{ij} \quad (1.5)$$

где  $\lambda$  – неизвестный скалярный множитель.

Процесс стока начинается только после того, как интенсивность тензора накопившихся на препятствиях дислокаций  $\Omega = \frac{1}{2}(\omega_{ij}\omega_{ij})^{1/2}$  достигает критического значения  $\Omega_0$ . При этом интенсивность стока  $\dot{V}_{II}$  будет монотонной функцией избыточной интенсивности  $(\Omega_{II} - \Omega_0)$ :

$$\dot{V}_{II} = (\frac{1}{2}b_{ij}b_{ij})^{1/2} = \hat{Q}(\Omega_{II} - \Omega_0) / \tau_1 \quad (1.6)$$

$$\hat{Q}(z) = \begin{cases} Q(z), & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

где  $Q(z)$  – безразмерная функция своего аргумента, а  $\tau_1$  – параметр размерности [с]. Условие (1.6) позволяет определить параметр  $\lambda$ :

$$\lambda = \hat{Q}(\Omega_{II} - \Omega_0) / \tau_1 \Omega_{II} \quad (1.7)$$

Окончательное уравнение для определения потока  $\omega_{ij}$  на основании (1.4)–(1.7) можно записать в виде

$$\frac{d\omega_{ij}}{dt} + \frac{\hat{Q}(\Omega_{II} - \Omega_0)}{\tau_1 \Omega_{II}} \omega_{ij} = \frac{1 - \eta}{\eta} \frac{d\gamma_{ij}^p}{dt} \quad (1.8)$$

Критическая плотность дислокации  $\Omega_0$ , при которой появляются микротрещины на межзеренных границах или других препятствиях и соответствующая ей критическая интенсивность напряжения  $S_0$  может быть определена на микроуровне и вычислена различными авторами, предлагавшими определенные модели микроразрушения. (Смотри [4] стр. 165–167, [5] стр. 67–68.)

Макрофизический смысл тензора  $\omega_{ij}$  соответствует тензору микронапряжений и следует из хорошо известного экспериментального факта, что величина микронапряжения пропорциональна плотности скопления дислокаций на границах зерен [3]. Поэтому условие  $\Omega_{II} = \Omega_0$  в пространстве компонент тензора напряжений имеет смысл поверхности начала разрушения.

Переходя от микропараметров к макропараметрам, напишем уравнения (1.1)–(1.3) для трехмерного напряженно-деформированного состояния в обобщенной форме в виде соотношения между вторыми инвариантами тензора скорости пластической деформации  $\dot{\gamma}^p$  и тензора активных напряжений  $T_{II}$ :

$$\dot{\gamma}^p = \frac{1}{\tau_0} f(\gamma^p) \Psi(T_{II} - T_0), \quad T_{II} = (\frac{1}{2}\tau_{ij}\tau_{ij})^{1/2}, \quad \dot{\gamma}^p = (\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{ij}^p\dot{\gamma}_{ij}^p)^{1/2} \quad (1.9)$$

Принимая гипотезы теории течения, получим из уравнений (1.1)–(1.3) упруговязко-пластические уравнения следующего вида

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2\beta} \dot{s}_{ij} + f(\gamma^p) \frac{\Psi(T_{II} - T_0)}{\tau_0 T} \tau_{ij}, \quad \sigma_{ii} = 3K\epsilon_{ii}, \quad \gamma_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{kk} \quad (1.10)$$

Для шаровых частей тензора  $\sigma_{ii}$  для простоты принят упругий закон, считая материал пластически несжимаемым  $\epsilon_{ii}^p = 0$ .

Принимая, что для девиаторов остаточных напряжений и накопившегося потока дислокаций выполняется соотношение

$$s_{ij}^r = 2\mu^* \omega_{ij}^r \quad (1.11)$$

получим, что условию  $\Omega_{II} \leq \Omega_0$  отвечает для остаточных напряжений  $s_{ij}^r$  условие  $S_{II}^r \leq S_0$ . Эволюционное уравнение на первой стадии пластического деформирования для  $s_{ij}^r$  примет вид

$$\frac{1}{2\mu^*} \dot{s}_{ij}^r = \frac{1-\eta}{\eta} \dot{\gamma}_{ij}^p \quad (1.12)$$

Откуда интегрируя по  $t$  при постоянном  $\mu^*$ , получим известный закон кинематического упрочнения

$$s_{ij}^r = 2\alpha \gamma_{ij}^p, \quad \alpha = \mu^* \frac{1-\eta}{\eta} \quad (1.13)$$

Константа  $\alpha$  определяется с помощью экспериментальных данных по эффекту Баушингера.

Таким образом, для  $S_{II}^r < S_0$ , т.е. до начала образования микропор, материал матрицы описывается в соответствии с теорией дислокаций уравнениями (1.10)–(1.13) упругопластической среды с кинематическим упрочнением.

При  $S_{II}^r \geq S_0$  получаем релаксационное уравнение для тензора  $s_{ij}^r$ :

$$\dot{s}_{ij}^r + \frac{2\mu^*}{\tau_1} \frac{Q(S_{II}^r - S_0)}{S_{II}} s_{ij}^r = 2\alpha \dot{\gamma}_{ij}^p \quad (1.14)$$

Уравнения (1.12)–(1.14) можно записать в виде единого уравнения, если ввести функцию  $\hat{Q}(z)$ . Здесь  $\dot{\gamma}_{ij}^p$  – девиатор скоростей пластических деформаций. Это уравнение описывает релаксацию остаточных напряжений в материале после того как начался процесс образования микропор, а следовательно разупрочнение материала. До этого в материале происходило упрочнение в соответствии с уравнением (1.13). Уравнение (1.14) показывает, что релаксация происходит до некоторого стационарного значения  $S_0^r$  отличного от нуля. В дальнейшем при  $t \geq \tau_1$  остаточные напряжения будут изменяться по закону идеально-пластического течения, ассоциированного с поверхностью текучести  $S_{II}^r = S_0$ , которое следует из (1.14) при  $\tau_1 \rightarrow 0$ :

$$ds_{ij}^r + H(s_{mn}^r d\epsilon_{mn}^p) \frac{s_{mn}^r d\epsilon_{mn}^p}{S_{II}^2} s_{ij}^r = 2\alpha d\gamma_{ij}^p \quad (1.15)$$

где  $H(z)$  – функция Хевисайда.

2. С появлением пор ситуация существенно меняется. Теперь материал состоит из матрицы и пустот, т.е. является двухфазным материалом. Зная свойства матрицы, которые описываются уравнениями (1.10), можно найти эффективные характерис-

тики пластического материала. Очевидно, что с появлением пор в первую очередь изменяется условие пластичности материала, кроме того нужны уравнения, описывающие зарождение и эволюцию дефектов. Трудность решения этой задачи существенно зависит от формы пор. Теоретическое решение проблемы возможно на основе решения задачи о единичной поре в среде под действием сил, приложенных на бесконечности, и последующем суммировании этого решения для некоторого известного распределения пор по размерам и ориентации. Ясно, что решение в аналитической форме, если и возможно, то только для линейных сред, да и то в простейших случаях [6, 7]. Для нелинейных сред решение можно получить только численно и постараться аппроксимировать его простым аналитическим выражением, выделив наиболее существенные факторы, либо сделать это основываясь на экспериментальных данных. Рассмотрим сначала, как наиболее простой случай сферических пор. Гарсоном в [8] была решена задача для идеально пластической среды, содержащей сферическую пору и нагруженную на бесконечности двухосным неравномерным давлением. Им было получено условие пластичности для пористой среды следующего вида

$$F(\sigma_{ij}, \rho, \sigma_s) = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}s_{ij}}{\sigma_s^2} + 2\rho q_1 \operatorname{ch} \left( \frac{3q_2}{2} \frac{\sigma_{kk}}{\sigma_s} \right) - (1 + q_1^2 \rho^2) = 0 \quad (2.1)$$

где  $\sigma_{ij}$  – напряжение в пористом материале,  $\sigma_s$  – предел текучести пористого материала,  $\rho$  – пористость,  $q_1$  и  $q_2$  – подгоночные параметры. Наша задача состоит в обобщении этого условия на пористый материал, матрица которого описывается упруговязкопластическими уравнениями (1.9)–(1.10) с кинематическим упрочнением.

Для этого возьмем вместо (2.1) условие пластичности в следующем виде

$$F(\tau'_{ij}, \rho, T_s) = \frac{3}{2} \frac{\tau'_{ij}\tau'_{ij}}{T_s^2} + 2\rho q_1 \operatorname{ch} \left( \frac{3q_2}{2} \frac{\tau'_{kk}}{T_s} \right) - (1 + q_1^2 \rho^2) = 0 \quad (2.2)$$

где  $\tau'_{ij}$  – девиатор тензора активных напряжений, а  $T_s$  есть предел упругости пористого упруговязкопластического материала, который определяется из условия равенства пластичной работы для матрицы и эффективного материала

$$\tau_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = (1 - \rho) \dot{\gamma}^p [T_s(\dot{\gamma}^p) + \Psi^{-1}(\tau \dot{\gamma}^p)] \quad (2.3)$$

$$T_s = T_s(\dot{\gamma}^p) + \Psi^{-1}(\tau \dot{\gamma}^p)$$

Из первого уравнения определяется  $\dot{\gamma}^p$ , после чего из второго находим  $T_s$ . Напряжение  $\tau_{ij}$  и скорости диссипативных деформаций  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  в эффективном материале связаны ассоциированным законом пластического течения

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \tau_{ij}} \quad (2.4)$$

если ассоциативный закон имеет место для материала матрицы. Параметр  $\Lambda$  определяется из второго уравнения (2.3):

$$\Lambda = \frac{T_s}{\tau} \Psi [T_s - \tau_s(\dot{\gamma}^p)] \left( \frac{\partial F}{\partial \tau_{ij}} \tau_{ij} \right)^{-1}$$

Характеристики тензора аннигиляции  $b_{ij}$  связаны с повреждаемостью среды. Выше было получено, что девиаторная часть этого тензора  $b_{ij}$  связана с девиатором деформации разрушения и приводит к релаксации остаточных напряжений. Шаровая часть  $b_{ii}$  пропорциональна объемной деформации разрушения  $b_{ii} = \dot{\epsilon}_{ii}^R$  и связана с пористостью  $\rho$ .

Из уравнения неразрывности следует уравнение для пористости  $\rho = \Delta V_n/V$

$$\dot{\rho} = (1 - \rho)\dot{\epsilon}_{kk}^p = \Lambda \frac{3\rho(1 - \rho)}{T_s} q_1 q_2 \operatorname{sh} \frac{3q_2 \sigma_{kk}}{2T_s} \quad (2.5)$$

которое замыкает полную систему определяющих уравнений (2.2)–(2.5). Из них могут быть определены напряжения и внутренние параметры материала при заданном поле скоростей, которое определяется из уравнений движения. Критерием разрушения материала для предполагаемой модели является условие критического накопления пор. Поскольку кристаллиты находятся в стесненном состоянии и не могут деформироваться свободно, то на межкристаллитных границах образуются межкристаллитные поры. Они накапливаются до некоторого критического значения пористости, при которой происходит их катастрофическое распространение, что ведет к полному межкристаллитному разрушению материала. Это критическое значение пористости  $\rho_*$  зависит от многих внешних факторов: температуры, скорости нагружения и других, а также от структуры материала, и как показывают эксперименты, изменяется в пределах (0,05–0,5) [3]. Следует заметить, что образование пор часто связывают с образованием таких дефектов как вакансии в узлах кристаллической решетки и с их перемещением к границам кристалла, где происходит их коагуляция и образование пор [3, 5]. Основное отличие между высокотемпературным и низкотемпературным разрушением полухрупких поликристаллических материалов заключается в разном механизме разрушения. В первом случае благодаря высокой термоактивации дефектов и их большой подвижности, они успевают обеспечить полное межкристаллитное разрушение, вследствие порообразования, а во втором не успевают смягчить концентрацию напряжений, вызванную появлением трещины, и предотвратить ее катастрофическое распространение, благодаря чему и происходит хрупкое разрушение, практически за счет распространения изолированных макротрещин [5].

Приведем геометрическую интерпретацию для предложенной модели в пространстве напряжений, которая широко используется при описании теории пластического течения. Модель имеет две критические поверхности, зависящие от интенсивности скоростей пластической деформации, которые определяют поведение материала. Они показаны на фиг. 1 штриховыми линиями. Поверхность пластичности активных напряжений  $T_{II} = T_s(\rho)$ , определяет переход из упругого состояния в пластическое, поверхность  $S_{II}^* = S_0$  определяет начало образования пор. Сплошными линиями показаны стационарные положения этих поверхностей.

В модель нетрудно включить температурные эффекты, если к деформации  $\epsilon$  добавить температурную составляющую  $\epsilon_{ij}^{\Theta} = \alpha \Theta \delta_{ij}$ , а температуру  $\Theta$  определять из уравнения

$$\rho_e c_p \partial \Theta / \partial t = \chi \tau_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (2.6)$$

которое следует из предположения об адиабатичности процесса. Здесь  $c_p$  – теплоемкость при постоянном напряжении,  $\chi = 0,8–0,9$  – тепловой коэффициент конвертируемости,  $\alpha$  – коэффициент теплового расширения,  $\rho_e$  – плотность эффективного материала.

Для эллипсоидальных пор поврежденность в упруговязкопластическом материале характеризуется тензором  $\rho_{ij}$  и модель удается построить лишь на основе полуэмпирического подхода, описанного в работах [9, 10]. Однако, если поры распределены в материале хаотически и не принимают преимущественной ориентации под нагрузкой, то основным фактором, влияющим на изменение напряженно деформированного состояния, будет первый инвариант тензора  $\rho_{ij}$ , для которого в первом приближении остается справедливым уравнение (2.5) и можно использовать предложенную модель. Приведем примеры, иллюстрирующие применение модели.

3. Рассмотрим наиболее распространенный вид испытания материалов на одноосное растяжение-сжатие тонкого стержня с постоянной скоростью деформаций. Решение этой задачи позволит оценить насколько хорошо предложенная модель описывает диаграмму материалов с разупрочнением. Подчеркнем, что вид кривой  $\sigma$ - $\epsilon$  в модель явно не закладывается, а является следствием принятой модели разрушения материала на стадии упрочнения принимается простейшая гипотеза о линейном упрочнении материала.

Запишем систему определяющих уравнений (2.2)–(2.5) для одноосного напряженного состояния. Отлично от нуля только  $\sigma_{11} \neq 0$ ,  $\sigma'_{11} \neq 0$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = s_{12} = s_{13} = s_{23} = 0$ . Тогда на первой стадии пластического деформирования до появления пор материал матрицы описывается упруговязкопластическими уравнениями с линейным упрочнением

$$\dot{\epsilon}^p = \Psi(\tau - \tau_s) / \tau_0 \quad (3.1)$$

После появления пор из условия пластичности (2.2) можно выразить предел текучести пористого материала  $T_s$  через активное напряжение по формуле

$$T_s = g(\rho)\tau, \quad g(\rho) = \frac{(1 + \frac{1}{2}q_1q_2^2\rho)^{1/2}}{(1 - q_1\rho)} \quad (3.2)$$

Здесь учтено, что аргумент в выражении  $\text{sh}(x)$  в рассматриваемой задаче изменяется в ограниченном интервале  $0 \leq x < 3$  и его удобно заменить параболой  $\text{sh} x = 1 + ax^2$ . Такая замена существенно упрощает решение этого уравнения и позволяет явно записать выражение для  $T_s$ .

Из уравнения (2.3) получаем простую связь между пластической деформацией матрицы  $\dot{\gamma}^p$  и эффективного материала  $\dot{\epsilon}^p$ :

$$\dot{\epsilon}^p = (1 - \rho)g(\rho)\dot{\gamma}^p \quad (3.3)$$

Используя уравнения (1.14) и (2.2) для тензоров активных и остаточных напряжений, найдем скорость пластической деформации

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{1}{\tau_0}(1 - \rho)g(\rho)\Psi[\tau g(\rho) - \tau_s] \quad (3.4)$$

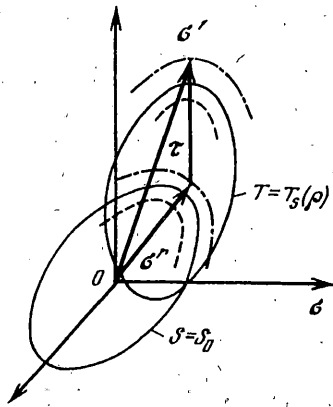
Уравнения (2.4) и (2.5) дают уравнение для пористости  $\rho$ , которое замыкает систему трех уравнений относительно трех основных неизвестных: полного напряжения  $\sigma$ , остаточного напряжения  $\sigma'$  и пористости  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon^p}{\partial t} &= \frac{1}{\tau_0}(1 - \rho)g(\rho)\Psi[\tau g(\rho) - \tau_s] \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{27}{2\tau_0}q_1q_2^2a\rho g(\rho)\dot{\epsilon}^p \\ \frac{\partial s^r}{\partial t} &= -\frac{2\bar{\mu}}{\tau_1}Q(S'_{11} - S'_0) + 2\alpha\dot{\epsilon}^p \end{aligned} \quad (3.5)$$

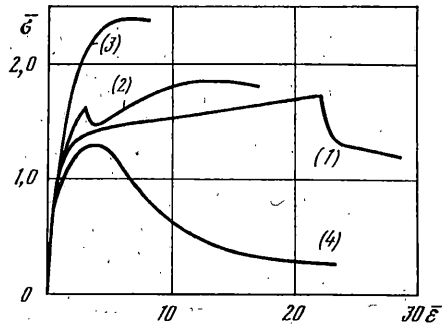
Остальные величины: активное напряжение  $\tau$ , полная и пластическая деформации  $\epsilon$ ,  $\epsilon^p$  могут быть выражены через основные переменные

$$\sigma = \tau + \sigma', \quad \epsilon = \epsilon^p + \sigma/E \quad (3.6)$$

При этом следует учесть, что скорость полной деформации  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0$  заданная величина.



Фиг. 1



Фиг. 2

Введем безразмерные переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{s}^r = \frac{s^r}{\sigma_0}, \quad \bar{\epsilon}^p = \frac{\epsilon^p}{\epsilon_0}, \quad t_0 = \dot{\epsilon}_0^{-1}, \quad \delta_0^{-1} = \frac{t_0}{\tau_0}, \quad \delta_1^{-1} = \frac{t_0}{\tau_1} \quad (3.7)$$

и запишем систему полученных уравнений через них

$$\begin{aligned} \partial \bar{\epsilon}^p / \partial \bar{t} &= \delta_0^{-1} (1 - \rho) g(\rho) \Psi[\tau g(\rho) - \tau_s] \\ \partial \rho / \partial \bar{t} &= \frac{27}{2} \delta_0^{-1} q_1 q_2 a \rho g(\rho) \dot{\epsilon}^p \\ \partial \bar{s}^r / \partial \bar{t} &= -2\bar{\mu} \delta_1^{-1} \hat{Q}(\bar{S}^r - \bar{S}_0^r) + 2\bar{\alpha} \delta_0^{-1} \dot{\epsilon}^p \end{aligned} \quad (3.8)$$

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений содержит большие параметры  $\delta_0^{-1}$  и  $\delta_1^{-1}$  в правых частях уравнений и является жесткой системой. Интегрирование по явной схеме не позволяет получить устойчивого решения и требует при параметрах порядка  $\delta_0^{-1} = 10^6 - 10^7$  чрезвычайно мелкого шага, что приводит к влиянию на результаты ошибок округления. Поэтому применялась неявная схема с линеаризацией получающейся системы нелинейных алгебраических уравнений.

В расчетах были использованы значения безразмерных величин

$$\delta_0^{-1} = 10^2 - 10^4, \quad \delta_1^{-1} = 10 - 10^3, \quad \alpha/E = 10^{-2} - 1, \quad S_0/\sigma_0 = 0,2 - 1,5, \quad T_0/\sigma_0 = 1$$

подгоночные параметры  $q_1$  и  $q_2$  не варьировались и принимались равными единице.

Результаты были получены в виде кривых  $\sigma - \epsilon$  при постоянной скорости деформации  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0$ . На фиг. 2 приведены четыре характерные кривые для различного типа материалов. Первые три кривые получены при  $\bar{S}_0 = 1,5$  и разных значениях параметра упрочнения  $\alpha$  (см. таблицу). Как видно из фиг. 2, кривые при переходе во вторую стадию деформирования при появлении пор имеют излом, после которого следует разупрочнение.

Для кривой 1 при малых  $\bar{\alpha} = 0,01$  характерны большие пластические деформации в стадии упрочнения и резкий спад напряжений при разупрочнении, которое затем выходит на стационарное значение.



Кривая 2 получена при  $\bar{\alpha} = 0,1$  и  $\bar{S}_0 = 1,5$  в этом случае диаграмма имеет "зуб" текучести, после которого происходит частичное разупрочнение материала с последующим упрочнением. Такое поведение характерно для мягких сталей, железа и некоторых других материалов, в которых происходят фазовые превращения.

Кривая 3 получена при большом значении параметра кинематического упрочнения  $\bar{\alpha} = 0,9$  и указанных в таблице остальных параметрах. Видно, что в этом случае участок разупрочнения невелик, критическое значение  $\rho_*$  достигается при сравнительно небольших деформациях. Кривые такого типа характерны для высокопрочных материалов.

№	1	2	3	4
$\tau_0$	0,01	0,01	0,01	0,01
$\tau_1$	1,0	1,0	1,0	1,0
$S_0$	1,5	1,5	1,5	0,2
$\alpha$	0,01	0,1	0,9	0,1
$q_1$	1,0	1,0	1,0	1,0
$q_2$	1,0	1,0	1,0	1,0

Кривой 4 соответствуют значения  $S_0 < 1$  ( $\bar{\alpha} = 0,1$ ,  $\bar{S}_0 = 0,2$ ). В этом случае диаграмма  $\sigma - \epsilon$  получается гладкой без излома, характерного для предыдущего случая ( $S_0 > 1$ ), с длительным участком разупорядочения, предшествующим полному разрушению материала при  $\rho_* = 0,5$ . Диаграммы такого вида характерны для таких материалов как некоторые грунты, глина.

Таким образом очевидно, что при сравнительно небольшом произволе в четыре параметра, модель позволяет описать, по крайней мере, качественно очень широкий спектр свойств различных материалов. При феноменологическом количественном описании реальных материалов дополнительно может быть использован произвол в выборе функций  $Q(z)$ ,  $\Psi(z)$ ,  $\alpha(\epsilon^p)$ ,  $E(\epsilon^p)$ , которые фигурируют в модели, но в данных расчетах принимались линейными или постоянными.

Перейдем теперь к решению задачи об исследовании локализации деформаций в случае неоднородного напряженно-деформированного состояния. Рассмотрим задачу о динамическом разрушении тонкого стержня, растягиваемого мгновенно приложенными к его концам постоянными скоростями  $v = V_* H(t)$ , где  $H(t)$  — функция Хевисайда.

Будем считать, что величина скорости  $V_* \leq v_0$ , где  $v_0$  — скорость, при которой на конце стержня возникает напряжение, равное пределу текучести  $\sigma_0$ . Тогда вдоль стержня навстречу друг другу будут распространяться две упругие волны, после их столкновения в центре стержня при величине  $V_* > \frac{1}{2}v_0$  возникнут пластические деформации и может произойти локализация деформации и разрушение стержня.

Система определяющих уравнений (3.8) остается такой же, как и в предыдущей задаче об одноосном квазистатическом растяжении стержня, но теперь все величины, включая и скорость деформации  $\dot{\epsilon}$ , являются неизвестными величинами, зависящими от двух переменных  $x$  и  $t$ . Для замыкания системы уравнений необходимо привлечь дополнительно два уравнения: уравнение движения пористого материала

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{1-\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad (3.9)$$

и уравнение совместности поля полных деформаций и скоростей

$$\partial \epsilon / \partial t - \partial v / \partial x = 0 \quad (3.10)$$

Получится система пяти уравнений относительно пяти неизвестных величин. Вводя безразмерные переменные по формулам

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad \bar{s}^r = \frac{s^r}{\sigma_0}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{a\varepsilon_0} \quad (3.11)$$

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 E, \quad v_0 = a\varepsilon_0, \quad t_0 = \frac{l}{a}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho_0}$$

получаем систему уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{1}{1-\rho} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{t_0}{\tau_0} (1-\rho)g(\rho)\Psi(\tau g(\rho) - \tau_s) = -\frac{t_0}{\tau_0} \dot{\varepsilon}^p \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{27}{2} q_1 q_2^2 \alpha \rho g(\rho) \frac{t_0}{\tau_0} \dot{\varepsilon}^p, \quad \frac{\partial s^r}{\partial t} = -2\bar{\mu} \frac{t_0}{\tau_1} Q(S^r - S_0^r) + 2\bar{\alpha} \frac{t_0}{\tau_0} \dot{\varepsilon}^p$$

$$g(\rho) = \frac{(1 + \frac{1}{2} q_1 q_2^2 \alpha \rho)^{1/2}}{1 - q_1 \rho}$$

Прежде чем переходить к ее решению необходимо провести ее исследование. Эта система уравнений принадлежит к гиперболическому типу, она зависит от безразмерных параметров  $\delta_0, \delta_1$  и  $\bar{\mu}\delta_0$ ,  $\bar{\alpha}\delta_0$  для большинства материалов, таких как металлы, керамики и др. параметры  $\delta_0$  и  $\delta_1$  малы [13, 14], а  $\bar{\mu} = O(1)$ ,  $\bar{\alpha} = O(1)$ . Это приводит к определенным трудностям при ее интегрировании, так как получается "жесткая" система нелинейных уравнений с малыми параметрами при старших производных. Характерным для таких систем уравнений является наличие тонких пограничных и внутренних слоев быстрого изменения решения. Другим осложняющим фактором является то обстоятельство, что при стремлении к нулю параметров  $\delta_0$  и  $\delta_1$ , предельные уравнения вырождаются в уравнения эллиптического типа, для которых исходная начально-краевая задача является некорректной. Подобного рода, но более простые системы уравнений и структура пограничных для них исследовалась в работах [15, 16], в которых было показано, что для их решения следует использовать неявные схемы интегрирования, основанные на методе расщепления [17]. С другой стороны для решения начально-краевых задач для гиперболических систем уравнения оптимальными являются методы, использующие характеристическую форму записи уравнений.

Введем вектор решения  $U$  с компонентами  $U(v, \varepsilon, \sigma, \rho, s^r)$ . Система уравнений (3.12) записана в виде, разрешенном относительно производных по времени

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = F(u) \quad (3.13)$$

Характеристики числа  $\lambda_i$  матрицы  $A$  находятся из условия

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (3.14)$$

и звуковые характеристики системы имеют наклоны  $\lambda_{1,2} = \pm c$ , зависящие от пористости материала  $c = (1-\rho)^{-1/2}$ , а остальные три являются стационарными. Левые

собственные векторы матрицы  $A$  соответственно будут

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= c, \quad \mathbf{I}_1 = (1, 0, -c, 0, 0) \\
 \lambda_2 &= -c, \quad \mathbf{I}_2 = (-1, 0, -c, 0, 0) \\
 \lambda_3 &= 0, \quad \mathbf{I}_3 = (0, 1, -1, 0, 0) \\
 \lambda_4 &= 0, \quad \mathbf{I}_4 = (0, 0, 0, 1, 0) \\
 \lambda_5 &= 0, \quad \mathbf{I}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Умножая систему (3.12) слева на  $\mathbf{I}_i$ , получаем характеристическую форму записи системы (3.12)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(v - c\sigma)}{\partial t} - c \frac{\partial(v - c\sigma)}{\partial x} &= c \frac{t_0}{\tau_0} \dot{\varepsilon}^p \\
 \frac{\partial(v + c\sigma)}{\partial t} - c \frac{\partial(v + c\sigma)}{\partial x} &= -c \frac{t_0}{\tau_0} \dot{\varepsilon}^p \\
 \frac{\partial(\varepsilon - \sigma)}{\partial t} &= \frac{t_0}{\tau_0} \dot{\varepsilon}^p = \frac{t_0}{\tau_0} (1 - \rho)g(\rho)\Psi(\tau g(\rho) - \tau_s) \\
 \frac{\partial\rho}{\partial t} &= \frac{27}{2} q_1 q_2^2 a \rho g(\rho) \frac{t_0}{\tau_0} \dot{\varepsilon}^p \\
 \frac{\partial s^r}{\partial t} &= -2\bar{\mu} \frac{t_0}{\tau_0} Q(S^r - S_0^r) + 2\bar{\alpha} \frac{t_0}{\tau_0} \dot{\varepsilon}^p
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

которая отражает направленный характер распространения инвариантов вдоль характеристических линий. Основываясь на формуле (3.16), построим неявную разностную схему обратного метода характеристик второго порядка точности на шести точечном шаблоне [18].

Производные в (3.16) по  $x$  аппроксимируются полусуммой односторонних разностей вперед на  $n$  и  $(n + 1)$  слоях, а производные по  $t$  полусуммой конечных разностей в точках  $(i - 1)$  и  $i$  при  $\lambda_i > 0$ . При  $\lambda_i < 0$  используется разность назад и узлы  $i$  и  $(i + 1)$ .

К достоинствам этой схемы также следует отнести ее абсолютную устойчивость. Более подробное ее описание приведено в [18]. При применении вышеизложенной разностной схемы к нашей задаче получается нелинейная система алгебраических уравнений, которая решалась методом градиентного спуска. Метод был реализован следующим образом. Решаемая система представлялась в виде

$$f_i(x_j) = 0 \quad (i, j = 1 \dots N) \tag{3.17}$$

После этого составлялась скалярная функция

$$u(x_j) = \sum_i f_i^2(x_j) = 0 \tag{3.18}$$

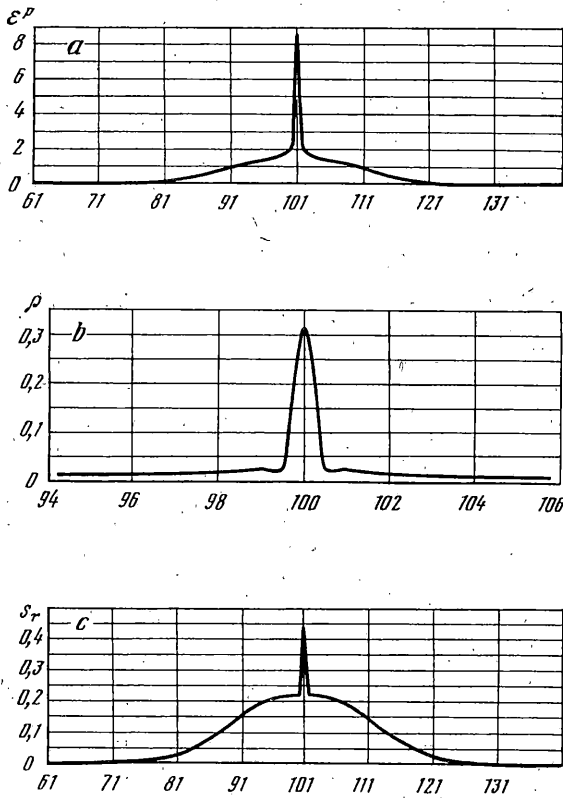
Таким образом решение исходной системы уравнений будет также решением уравнения (3.18).

Для решения этого уравнения линеаризуем выражение

$$u(x_j + \lambda \nabla_j u(x_i)) = u(x_j) + \lambda \nabla_j u(x_i) \cdot \nabla_j u(x_i) = 0 \tag{3.19}$$

откуда следует, что

$$\lambda = - \frac{u(x_j)}{\nabla_j u(x_i) \cdot \nabla_j u(x_i)} \tag{3.20}$$



Фиг. 3

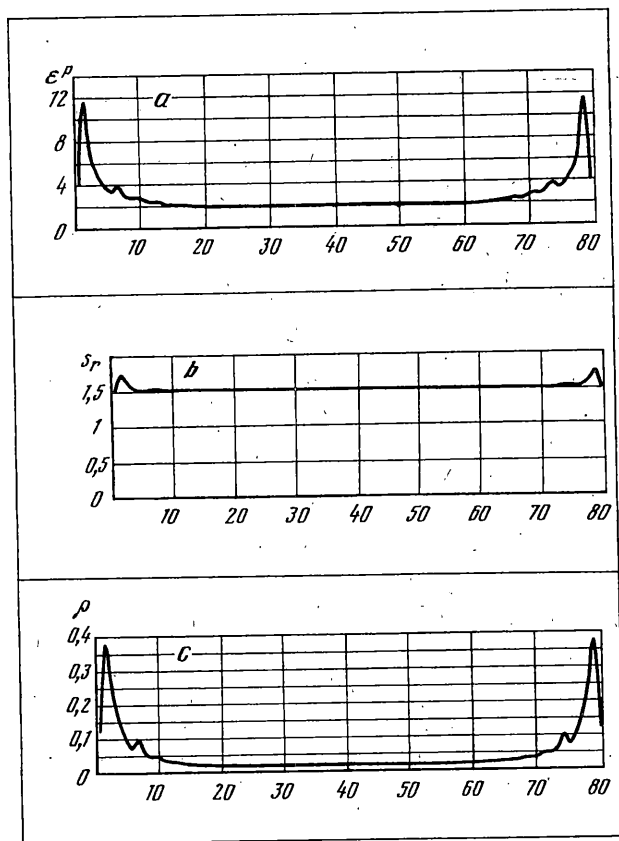
Пользуясь этой формулой строим итерационный процесс

$$x_j^{k+1} = x_j^k - \frac{u(x_i^k)}{\nabla_j u(x_i^k) \cdot \nabla_j u(x_i^k)} \nabla_j u(x_i^k) \quad (3.21)$$

Этот процесс и был реализован в программе. Причем матрица градиента для системы уравнений  $W_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$  содержит всего шесть ненулевых членов в строке. Таким образом при вычислении градиента скалярной функции  $u(x_j)$  необходимо затратить не  $O(N^2)$  операций, а всего  $O(N)$  вычислений, поэтому решение нашей системы уравнений этим методом не требует большого объема вычислений и является достаточно точным.

Численное моделирование проводилось для нескольких наборов параметров. Подгоночные параметры  $q_1$  и  $q_2$  не менялись и были равны единице,  $\delta_0 = 10^{-3}$ , а  $\delta_1 = 10^{-1}$ . В качестве  $\sigma_0$  в формулах (32) был взят предел упругости материала, модуль упрочнения  $\alpha$  был отнесен к модулю Юнга  $E$ . Менялись параметры  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{\delta}_0$ . Скорость концов стержня была постоянна и ее безразмерная величина  $v = 0,8$ , что соответствует нескольким метрам в секунду. Условие разрушения материала было определено как условие достижения пористостью критического значения  $\rho_* = 0,3$ .

В первом примере  $\bar{\alpha} = 0,1$ ,  $\bar{\delta}_0 = 0,2$  при столкновении волн в центре стержня началось интенсивное пластическое течение, а через некоторое время началось разрушение. Рост пористости привел к еще большей интенсификации течения в узкой области и к локализации пористости и пластической деформации (см. фиг. 3 а, б).

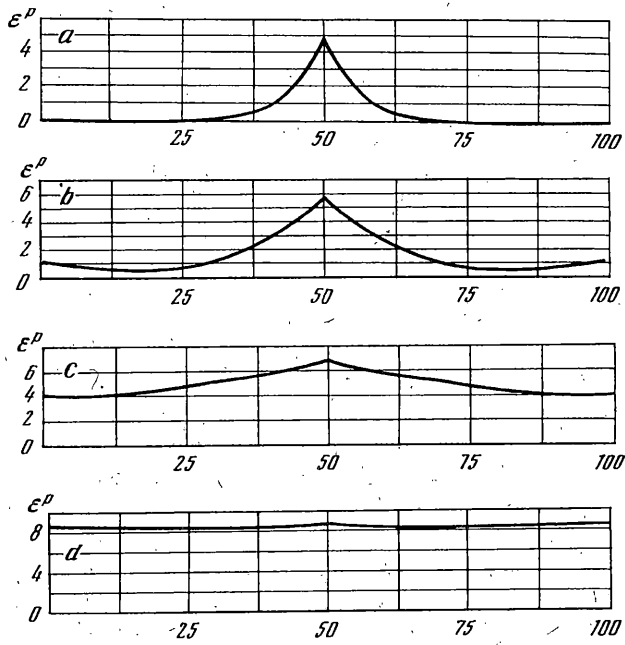


Фиг. 4

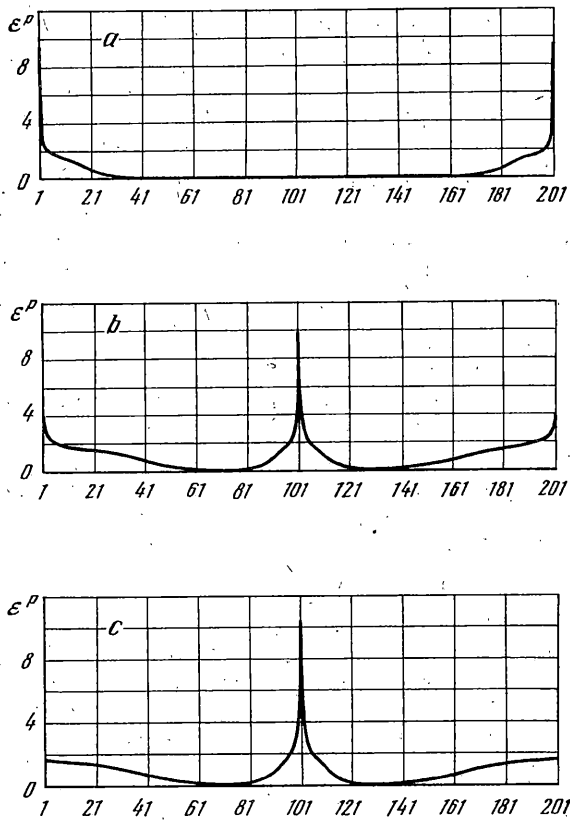
При увеличении параметра  $\alpha$  ( $\bar{\alpha} = 0,9$ ;  $\bar{S}_0 = 0,2$ ) наблюдалась такая же картина, но при этом локализация деформаций протекала намного быстрее, что объясняется большим значением  $\bar{\alpha}$  и малым значением  $\bar{S}_0$ . В этом случае остаточные напряжения очень быстро вырастают до значения  $\bar{S}_0$  и раньше возникает пористость, что приводит к более резкой локализации и меньшей интегральной деформации  $\epsilon$  для всего стержня.

В случае  $\bar{\alpha} = 0,9$ ,  $\bar{S}_0 = 1,5$  при столкновении волн в центре стержня началось интенсивное пластическое течение, но ввиду большого значения  $\alpha$  разрушения не произошло. При дальнейшем распространении волн и при их отражении от концов стержня начинается пластическое течение. Так как источник энергии в данном случае ближе, и также из-за большого упрочнения интенсивность волны с противоположного конца стержня больше и несет большую энергию, то это течение более интенсивно, чем в середине стержня и поэтому, деформация становится достаточно большой для того, чтобы разрушение и локализация деформации произошла на концах стержня (фиг. 4).

В четвертом примере использовались следующие значения  $\bar{\alpha} = 0,01$ ,  $\bar{S}_0 = 1,5$ . Как при столкновении волн в середине стержня, так и при достижении фронтами концов стержня пластическое течение было недостаточно интенсивно, чтобы привести к разрушению. В результате чего после нескольких проходов волн вдоль стержня фронты волн исчезают. На фиг. 5, где показаны распределения пластической деформации



Фиг. 5



Фиг. 6

ции  $\varepsilon^p$  по длине стержня в разные моменты времени ( $\bar{t} = 1; \bar{t} = 1,8; \bar{t} = 3,8; \bar{t} = 10$ ). Сравнительно небольшая локализация деформации, которая наблюдается в начальные моменты времени, из-за диссипаций рассеивается и после десятка пробегов волны по стержню в нем установилось однородное состояние. Таким образом в этом случае происходит однородное растяжение стержня.

Рассмотрим как изменяется поведение стержня при увеличении скорости, приложенной к концам стержня. Если  $\nu > 1$ , то пластическое течение начинается на концах стержня, а не в центре стержня. При этом, если оно превышает некоторую критическую величину  $\nu \geq \nu_*$ , то локализация деформации на конце стержня приведет к его разрушению; если же  $\nu \leq \nu_*$ , то стержень будет разрушаться по центру. В результате численного эксперимента при  $\bar{S}_0 = 0,2; \bar{\alpha} = 0,1$  было установлено, что  $\nu_* = 1,65 \pm 0,05$ .

На фиг. 6 показаны распределения пластической деформации при скоростях удара  $\nu = 1,5 - 1,7$ . На фиг. 6 а при  $\nu = 1,7$  локализация на концах стержня приводит к его разрыву. При  $\nu = 1,6$  (фиг. 6 б) локализация начинается на концах стержня, но она не успевает привести к критической величине пористости и следовательно к разрушению стержня. После столкновения встречных волн в центре стержня локализация происходит с большой скоростью, и стержень разрушается посередине. При  $\nu = 1,5$  локализация на концах стержня очень мала, и стержень также разрушается посередине.

Исследование локализации в двумерной постановке при квазистатическом растяжении образца приведено в [17].

В заключение отметим, что проведенное исследование показывает, что если на первой стадии пластического деформирования при упрочнении материала статическая диаграмма или стационарная кривая  $\sigma - \varepsilon$ , оказывает существенное, а в некоторых случаях даже решающее влияние на распространение волн в твердых телах, то в стадии разупрочнения ее вид не играет роли. Характер локализации и разупрочнения зависит от других факторов, в частности от  $S_0, \alpha$  и  $\nu_*$ . Поэтому вряд ли имеет смысл пытаться исследовать локализацию и разрушение на основе классической упругопластической модели с разупрочняющейся зависимостью  $\sigma - \varepsilon$  (см. [19]–[20]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01–98–00957) и Международного научного фонда (грант J9M100).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gilliman J.J. Dislocation dynamics and the response of material to impact // Appl. Mech. Rev. 1968. V. 21. No. 8. P. 767–783.
2. Зегер А. Механизм скольжения и упрочнения в кубических гранецентрированных и гексагональных плотноупакованных металлах // Дислокации и механические свойства кристаллов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. С. 179–268.
3. Судзуки Т., Есинага Х., Такеути С. Динамика дислокаций и пластичность. М.: Мир, 1989. 294 с.
4. Майборода В.П., Кравчук А.С., Холин Н.Н. Скоростное деформирование материалов. М.: Машиностроение, 1986. 260 с.
5. Селективное разрушение минералов / Под ред. Ревнивцева В.И. М.: Недра. 1988. 286 с.
6. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of the ellipsoidal inclusion, and related problems. // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 376. 1957. V. 241. N 1226. P. 376–396.
7. Budiansky B., O'Connell R.J. Elastic moduli of a cracked solid // Intern. J. Solids and structures. 1976. V. 12. No. 2. P. 81–97.
8. Gurson A.L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. // Trans. ASME. Ser. H. J. Eng. Materials Technol. 1977. V. 99. No. 1. P. 2–15.
9. Hill R. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals // J. Mech. and Phys. of Solids. 1967. V. 15. No. 2. P. 79–97.

10. Кукуджанов В.Н., Иванов В.Л., Ковшов А.Н., Шнейдерман Д.Н. Исследование локализации пластических деформаций при потере устойчивости откосов. Препринт 538. М.: ИПМех РАН. 1994. 67 с.
11. Kukudzhanov V.N. and other. On problem of damage and localization of strains // Chalmer Univ. Publ. Goteborg. 1995. No. 11. P. 35.
12. Кукуджанов В.Н. Микромеханическая модель неупругой среды для описания локализации деформаций // Тр. 9-ой конф. по прочности и пластичности. Т. 2. Прочность и пластичность. М.: ИПМ РАН. 1996. 118–125 с.
13. Кукуджанов В.Н. Одномерные задачи распространения волн напряжений в стержнях. М.: ВЦ АН СССР. Сообщения по прикладной математике. Вып. 7. 1977. 54 с.
14. Penzyna P. Thermodynamic theory of viscoplasticity // Advances in Applied Mechanics, N.Y.; L.: Acad. Press. 1971. V. 11. P. 313–354.
15. Kukudzhanov V.N. Modeling of the strain softening and localization in dynamical problems // J. Physique IV France. 1998. V. 8. Pr. 8. P. 207–214.
16. Кукуджанов В.Н. О структуре полос локализации деформации в нелокальной теории пластичности при динамическом нагружении // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 6. С. 104–114.
17. Кукуджанов В.Н., Кибардин В.Ю. Численное моделирование локализации пластических деформаций // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 6.
18. Кукуджанов В.Н. Разностные методы решения задач механики деформируемых тел. М.: МФТИ, 1992. 122 с.
19. Bazant Z.P., Belytschko T.B. Wave propagation in a strain softening bar; exact solution // J.Eng. Mech. 1985. V. 111. No. 3. P. 381–389.
20. Belytschko T., Wang Xiao-Jun, Bazant Z.P., Hyun Y. Transient solutions for one-dimensional problems with strain softening // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1987. V. 54. No. 3. P. 513–518.

Москва

Поступила в редакцию  
12.02.1999