

УДК 539.43

© 1999 г. В.В. БОЛОТИН

МЕХАНИКА ЗАРОЖДЕНИЯ И РОСТА УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН

Дан обзор работ последнего десятилетия по теории усталостного разрушения, основанной на синтезе механики разрушения и механики накопления рассеянных повреждений. Обсуждены основные соотношения теории. Эти соотношения включают условия устойчивости системы тело с трещинами – нагрузочное устройство, уравнения накопления повреждений и уравнения, описывающие изменение условий на фронтах трещин. Для механизма зарождения и раннего роста трещин применена вероятностная микромеханическая модель; для повреждений на макроскопическом уровне применен континуальный вариант механики накопления повреждений. Возможности теории проиллюстрированы на примерах мелкой трещины, распространяющейся от поверхностного дефекта, трещины коррозионной усталости и плоской трещины отрыва произвольной формы в плане.

1. Понятие усталости материалов, трактуемое в широком смысле, включает различные необратимые изменения, наступающие под влиянием циклических и/или длительно действующих нагрузок. Наряду с классической многоцикловой усталостью, сюда входят малоцикловая усталость, коррозионная усталость, а также ряд процессов замедленного повреждения и деградаций, в которых существенная роль принадлежит механическим факторам [1]. Среди них: коррозионное растрескивание под напряжением, замедленное разрушение металлов и сплавов, сопровождаемое ползучестью, замедленное разрушение полимеров и композиционных материалов на их основе при постоянных или медленно изменяющихся нагрузках. Повреждения и разрушения в условиях водородного или радиационного охрупчивания, биохимической коррозии и старение также могут быть отнесены к рассматриваемому кругу явлений.

Повреждение материалов – многоуровневый процесс, который происходит в весьма широком диапазоне масштабов, начиная с атомных расстояний и заканчивая размерами натуральных крупных сооружений. Дефекты на атомно-молекулярном уровне относятся к физике твердого тела, более крупные дефекты – к материаловедению, в то время как макроскопические трещины и подобные им дефекты – к механике деформируемого твердого тела. Конечные выводы о несущей способности конструкций дает строительная механика [2].

С точки зрения механики процесс зарождения усталостных трещин представляет собой локализацию повреждений на уровне зерен, включений, микропор и волокон. Рост макроскопических трещин является результатом взаимодействия между двумя или несколькими механизмами. Один из них – накопление микроповреждений (как у фронта трещин, так и в дальнем поле). Наряду с повреждениями механического происхождения, повреждения физико-химической и биохимической природы также могут играть существенную роль. Другим механизмом, который управляет процессом роста макроскопических трещин, является перераспределение потоков энергии в теле, содержащем трещины. Это перераспределение может быть описано в терминах устойчивости системы тело с трещинами – нагрузка или нагружающее устройство. На стадиях зарождения и раннего роста доминирует механизм накопления повреждений.

По мере роста макроскопической трещины возрастает роль второго механизма, а с приближением к финальному разрушению эта роль становится доминирующей.

Синтез механики накопления повреждений и механики разрушения в общепринятом смысле служит общей основой для описания разнообразных явлений, начиная с классической многоциклового усталости и кончая замедленным разрушением при совместном действии факторов механической и немеханической природы. Эта идея лежит на поверхности, а в последние годы неоднократно высказывалась в разной форме. Первая попытка реализовать эту идею в форме математической модели относится к 1983 году [3]. В ряде последующих работ было дано приложение теории для прогнозирования роста усталостных трещин в упругих [4–6], упругопластических [7, 8] и вязкоупругих [9] средах. Приложение к композиционным материалам было дано в [10]. Рост трещин коррозионной усталости и коррозионного растрескивания под напряжением рассматривался в [11, 12]. Систематическое изложение теории с различными приложениями было дано в [13].

К настоящему времени предложено большое количество подходов к описанию процессов накопления рассеянных повреждений в сплошных средах и их локализации. Применительно к теории роста усталостных трещин наиболее удобны модели континуальной механики повреждений, особенно если уровень повреждений описывается при помощи одной или нескольких феноменологических мер, как это было предложено в работах Качанова и Работнова [14, 15]. Для ранней стадии усталостного повреждения более подходят микромеханические модели. Вследствие случайного распределения механических свойств на микроуровне зарождение трещин из микродефектов носит вероятностный характер. Вероятностные аспекты усталости рассматривались рядом авторов, начиная с классических работ Вейбулла, Афанасьева и Фрейденшталя. Обзор ранних работ можно найти в книге [16]. Современные вычислительные средства позволяют моделировать ранние этапы усталостного повреждения с достаточным приближением к реальным процессам. Пока размер трещины невелик, баланс сил и энергии в системе тело с трещинами – нагрузка еще не играет существенной роли, так что процессы могут быть описаны в рамках микромеханики повреждений в ее вероятностном варианте. Такой подход был, в частности, реализован в статье [17]. По мере развития трещины в процесс включается все большее число элементов микроструктуры, например, зерен, если рассматривается поликристаллический материал. При этом фронт трещины начинает выполнять функцию осреднителя механических свойств. Разброс механических свойств постепенно сглаживается, так что стохастический характер задачи становится менее заметным. Рост развитых макроскопических трещин в макроскопически однородном материале может быть удовлетворительно описан в рамках детерминистической модели (если, разумеется, процесс нагружения – детерминистический).

2. Рассмотрим процесс зарождения и раннего роста усталостной трещины на примере трещины отрыва, распространяющейся от поверхности полугограниченного тела (фиг. 1, *a*). Пусть у поверхности тела имеется ряд изолированных начальных дефектов с характерным размером h (фиг. 1, *b*). Под действием приложенных на бесконечности циклических напряжений $\sigma_{\infty}(t)$ вблизи некоторых дефектов появляются поврежденные зерна. Связное множество таких зерен трактуем как зародыш усталостной трещины. Это соответствует тому, что усталостная трещина является результатом внутризеренного повреждения (модель межзеренного разрушения требует отдельного обоснования). Для простоты примем, что трещина распространяется в плоскости, ортогональной поверхности тела. Размер зародышевой трещины характеризуем ее глубиной a и шириной $2c$, измеряемой на поверхности тела (фиг. 1, *c*).

Будем моделировать поликристаллический материал как ансамбль, состоящий из элементов структуры кубической формы с размером h . Это упрощающее предположение позволяет описать рост трещины в рамках конечноэлементного подхода с кубической сеткой. Свойства элементов будем считать случайными. В реальных материалах необходимо различать разброс деформативных свойств зерен от разброса

их сопротивления накоплению повреждений. Как правило, зерна обладают сильной анизотропией, так что разброс их механических свойств в значительной степени вызван разбросом ориентаций. Численная реализация модели поликристаллического материала с учетом всех перечисленных факторов требует большого объема оперативной памяти, т.е. связана с чисто техническими трудностями. Эти трудности могут быть обойдены, если при определении напряжений и деформаций пренебречь разбросом деформативных свойств, а разброс прочностных свойств отнести к плоскости распространения трещины. Частичным оправданием для такого подхода служит то, что, во-первых, разброс деформативности значительно меньше разброса прочности и, во-вторых, поля напряжений и деформаций впереди фронта трещины относительно слабо зависят от локальной неоднородности деформативных свойств.

Повреждение отдельно взятого зерна будем описывать при помощи скалярной функции $\omega(N)$ от числа циклов N . Число N будем трактовать как непрерывный аргумент. Значение $\omega = 0$ соответствует начальному неповрежденному состоянию зерна, значение $\omega = 1$ полностью разрушенному зерну, т.е. достижению такого состояния, при котором трещина продвигается на одно зерно. Будем описывать процесс повреждения зерен уравнением

$$\frac{\partial \omega}{\partial N} = \left(\frac{\Delta \sigma - \Delta \sigma_{th}}{s} \right)^m (1 - \omega)^n, \quad \Delta \sigma \geq \Delta \sigma_{th} \quad (2.1)$$

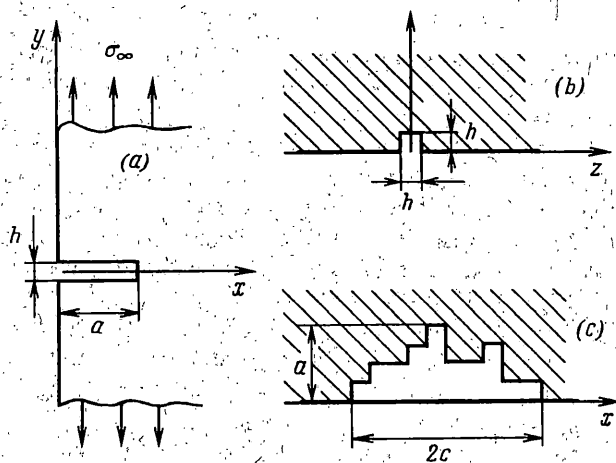
где $\Delta \sigma(N)$ – размах напряжения отрыва в рассматриваемом зерне в пределах данного цикла. Уравнение (2.1) содержит несколько параметров материала. Два из них, s и $\Delta \sigma_{th}$ имеют размерность напряжений и характеризуют сопротивление зерна накоплению повреждений. Показатель степени $m > 0$ аналогичен показателю в уравнении Пэриса для скорости роста трещины, показатель $n \geq 0$.

Сопротивление накоплению повреждений s и пороговое сопротивление $\Delta \sigma_{th}$, вообще, являются случайными величинами. Распределения этих величин изменяются в зависимости от расположения зерна по отношению к поверхности тела. Если не предположено поверхностное упрочнение, то зерна, расположенные у поверхности, уже частично повреждены и имеют меньшую прочность, чем зерна в глубине. Свойства зерен, расположенных на одинаковой глубине, можно принять независимыми и одинаково распределенными. В статье [17] было принято, что напряжение s следует распределению Вейбулла

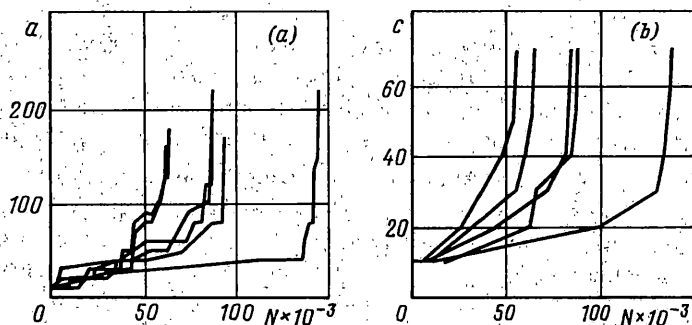
$$F(s) = 1 - \exp \left[- \frac{s - \Delta s_{th}}{s_c} \right]^\alpha, \quad s \geq \Delta s_{th} \quad (2.2)$$

с параметрами s_c , Δs_{th} и $\alpha \geq 1$. Для зерен, лежащих у поверхности и в глубине тела, были приняты различные значения s_c . Чтобы не увеличивать число параметров, значения которых трудно оценить из макроэксперимента, было принято, что $\Delta \sigma_{th} = \Delta s_{th}$, т.е. пороговые значения в формулах (2.1) и (2.2) совпадают, причем порог накопления повреждений является детерминистической величиной.

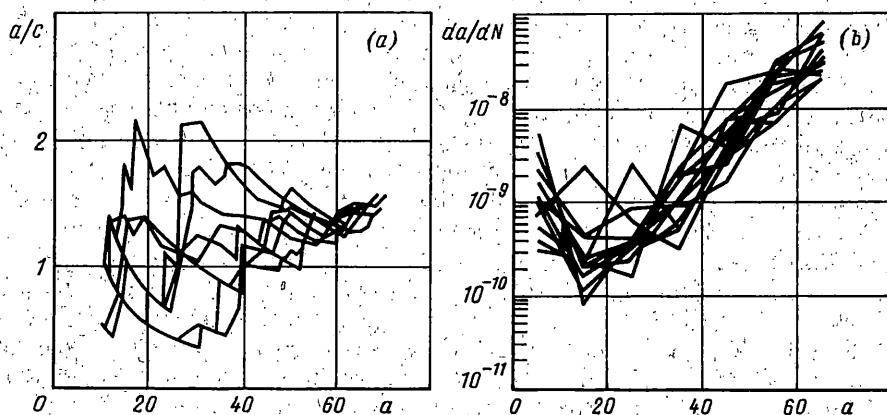
Процесс численного моделирования состоит из следующих этапов; генерирование выборочных значений $s_1, \dots, s_n$ случайного параметра s согласно распределению (2.2); нахождение поля напряжений в теле с трещиной и вычисление размахов $\Delta \sigma_1(N), \dots, \Delta \sigma_n(N)$ напряжений отрыва в зернах; определение мер повреждения $\omega_1(N), \dots, \omega_n(N)$ путем интегрирования уравнения (2.1) для каждого из зерен; проверка условий $\omega_1(N) < 1, \dots, \omega_n(N) < 1$ и выключение зерен из работы при нарушении этих условий. После этого конфигурация трещины изменяется, что требует повторения процедуры, начиная с нахождения поля повреждений для новой конфигурации. Повреждения, накопленные на предыдущем этапе, входят как начальные условия при интегрировании уравнений (2.1) на следующем этапе.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Некоторые результаты моделирования приведены на фиг. 2 и 3. Шаг мелкой сетки h отождествлялся с размером зерна; при этом мелкая сетка была составлена из $50 \times 50 \times 25 = 62\,500$ элементов. Вне этой области использована укрупненная сетка. При расчете приняты следующие численные данные: для зерен, расположенных у поверхности, $s_c = 2400$ МПа, $\alpha = 2$; для зерен во внутренней области $s_c = 3200$ МПа, $\alpha = 4$. Для всех зерен принято, что $\Delta s_{th} = \Delta \sigma_{th} = 320$ МПа, $m = 4$, $n = 1$. Вычисления

выполнены при $\sigma_{\infty}^{\max} = 150$ МПа, $\sigma_{\infty}^{\min} = 0$. Чтобы связать размеры трещин и скорости их роста с реальными масштабами для типичного поликристаллического сплава, принято, что $h = 10$ мкм. Таким образом, начальный дефект моделирован как лунка с характерным размером 10 мкм.

Несколько выборочных реализаций процессов $a(N)$ и $c(N)$ показаны на фиг. 2. При этом размеры трещин отложены в мкм. Эти процессы – ступенчатые с шагом $\Delta a = \Delta c = h$. Для большей наглядности эти процессы сглажены путем соединения средних точек ступеней отрезками прямых. Как видно из фиг. 2, разброс реализаций весьма велик. В частности, число циклов до углубления трещины на несколько шагов изменяется от $70 \cdot 10^3$ до $180 \cdot 10^3$ циклов. Аналогично для распространения трещины вдоль поверхности до размера $40h$ требуется от $80 \cdot 10^3$ до $180 \cdot 10^3$ циклов.

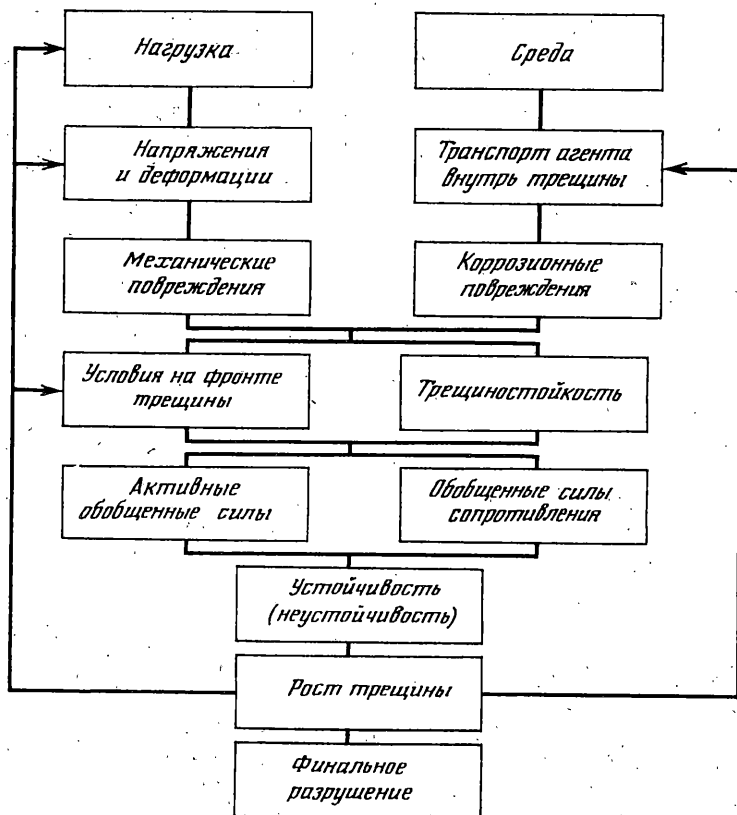
Сглаженные реализации отношения c/a в функции от глубины трещины a , измеряемой в мкм, представлены на фиг. 3, *a*. На начальной стадии разброс этого отношения весьма велик: оно изменяется от 0.5 до 2.0. По мере углубления трещины отношение стабилизируется около значения $c/a = 1.5$. Поведение этого отношения существенно зависит от параметров распределения (2.2). Так, при равных значениях s_c для приповерхностных зерен и зерен в глубине значение c/a может оказаться близким к единице.

На фиг. 3, *b* показана зависимость сглаженной скорости роста da/dN , измеряемой в м/цикл, от глубины трещины a . В некотором смысле эти графики можно рассматривать как начальную часть стандартной диаграммы роста усталостной трещины, т.е. графика зависимости da/dN от размаха коэффициента интенсивности напряжений $\Delta K = Y\Delta\sigma_{\infty}(\pi a)^{1/2}$ (здесь Y -форм-фактор). Наиболее характерной стороной представленной диаграммы является ее немонотонный характер. Вначале рост трещин замедляется; после продвижения фронта трещины на глубину порядка нескольких зерен процесс роста восстанавливается. Это находится в согласии с опытными данными по кинетике роста малых усталостных трещин [18].

3. Если трещина достаточно глубока, то локальные эффекты, в частности, разброс свойств между зернами перестает играть заметную роль. Поэтому рост макроскопических усталостных трещин можно описывать в рамках детерминистических моделей, дополняя их континуальными моделями накопления повреждений [14, 19].

Идея синтеза механики накопления повреждений и механики тел с трещинами проиллюстрирована на фиг. 4. Повреждения изменяют макроскопические свойства материала, в том числе его локальные характеристики трещиностойкости. В результате изменяются условия устойчивости системы тело с трещинами – нагрузка. Эти условия могут быть сформулированы в терминах обобщенных сил механики разрушения – активных обобщенных сил (типа J -интеграла) и обобщенных сил сопротивления (типа критических значений J -интеграла, J_c). В зависимости от соотношения между обобщенными силами фронт трещины остается неподвижным при продолжающемся накоплении повреждений, продвигается непрерывно, подрастает скачком до следующего положения, или начинает расти динамически вплоть до финального разрушения. В схеме, показанной на фиг. 4, имеется ряд обратных связей, что придает задаче комплексный характер. Так, накопление повреждений в концевой зоне приводит к затуплению фронта трещины, циклическому упрочнению или разупрочнению и т.д. В результате изменяются напряжения у фронта трещины, что влияет на скорость накопления повреждений. Аналогично можно обсудить и другие связи, показанные на фиг. 4.

Будем трактовать параметры трещин как своего рода обобщенные координаты. В статье [3] было предложено называть их координатами Гриффитса (кратко, G -координатами). Вместе с обычными обобщенными координатами Лагранжа (L -координатами) они описывают состояние тела с трещинами в условиях взаимодействия с нагрузками и окружающей средой. Усталостные трещины, как правило, необратимы.



Фиг. 4

Поэтому почти всегда G -координаты можно выбрать так, что они будут удовлетворять условиям односторонних связей, например, быть неубывающими переменными. При обсуждении роста усталостных трещин целесообразно (как это делают и в классической механике разрушения) разделить задачу на две части: определение полей напряжений, деформаций и перемещений при фиксированных G -координатах и исследование устойчивости системы тело с трещинами – нагрузка по отношению к вариациям G -координат [20, 21].

В дальнейшем ограничимся квазистатическими задачами, трактуя процессы нагружения и распространения трещин как квазистатические. Принцип виртуальных перемещений для механических систем с односторонними связями требует, чтобы в состоянии равновесия выполнялось условие $\delta_G W \leq 0$. Здесь $\delta_G W$ – сумма виртуальных работ всех внешних и внутренних сил, включая работу разрушения, произведенных на вариациях G -координат. При этом все уравнения равновесия и совместности, а также граничные условия по отношению к L -координатам полагаются выполненными как для невозмущенного, исследуемого состояния равновесия, так и для смежных возмущенных состояний. В зависимости от знака $\delta_G W$ состояние системы будет устойчивым или неустойчивым по отношению к росту трещин. Трещины не распространяются, если $\delta_G W < 0$ для всех G -координат. Соответствующее состояние называем субравновесным по отношению к G -координатам. Если $\delta_G W = 0$ по отношению к части G -координат и $\delta_G W < 0$ по отношению к остальным G -координатам, то состояние называем равновесным по отношению к первой группе координат. Равновесные состояния могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Устойчивость имеет

место, если выполняется условие $\delta_G(\delta_G W) < 0$, где варьирование виртуальной работы $\delta_G W$ производится по тем G -координатам, для которых выполнены условия равновесности. Если $\delta_G W > 0$ хотя бы для одной из G -координат, то состояние системы называем неравновесным; это состояние, очевидно, неустойчиво.

Пусть число G -координат $a_1, \dots, a_m$ конечно, а их вариации удовлетворяют условиям $\delta a_1 \geq 0, \dots, \delta a_m \geq 0$. Представим сумму виртуальных работ, произведенных на G -координатах, в виде

$$\delta_G W = \sum_{j=1}^m G_j \delta \alpha_j - \sum_{j=1}^m \Gamma_j \delta a_j \quad (3.1)$$

где G_j – активные обобщенные силы, Γ_j – обобщенные силы сопротивления. Последние соответствуют работе, совершенной при разрушении материала. Система тело с трещинами – нагрузка находится в субравновесном состоянии, если $G_j < \Gamma_j$ при всех $j = 1, \dots, m$. Состояние системы равновесно по отношению к $\mu \leq m$ координатам $a_1, \dots, a_\mu$, если $G_j = \Gamma_j$ для этих координат и $G_j < \Gamma_j$ для остальных координат. Система находится в неравновесном состоянии, если хотя бы для одной из G -координат имеет место неравенство $G_j > \Gamma_j$. Условие устойчивости равновесных состояний имеет вид

$$\sum_{j=1}^{\mu} \sum_{k=1}^{\mu} \frac{\partial}{\partial a_k} (G_j - \Gamma_j) \delta a_j \delta a_k < 0 \quad (3.2)$$

причем отрицательность квадратичной формы требуется только в первом ортанте, т.е. при $\delta a_1 > 0, \dots, \delta a_\mu > 0$ [20].

Приведенные выше понятия применимы к задачам хрупкого, квазихрупкого, а при некоторых ограничениях – и вязкого разрушения. Переходя к математическим моделям усталости и родственных явлений, мы должны ввести дополнительные функции состояния, характеризующие распределение микроповреждений в теле. В рамках континуальной механики повреждения [13–15] уровень повреждений описывается при помощи функции $\omega(x, t)$ координат точек тела x и времени t . Это может быть скалярная или тензорная функция, а также набор таких функций. В каждый момент времени уровень повреждений является функционалом предыстории нагружения, роста трещин и накопления повреждений. В простейшем случае повреждения характеризуются скалярной функцией $\omega(x, t)$, причем $\omega = 0$ для неповрежденного материала, $\omega = 1$ для полностью поврежденного материала. Примером уравнения, связывающего скалярную меру ω с размахом локальных напряжений, служит уравнение (2.1), если относить его не к отдельно взятому зерну, а к некоторой точке сплошной среды. В более общем случае целесообразно, оставаясь в рамках скалярных полей, отдельно учитывать повреждения различных типов, например, ансамбли микротрещин отрыва и сдвига, чисто механические и коррозионные повреждения и т.п. [13].

Любая состоятельная модель роста усталостных трещин должна содержать дополнительные параметры, имеющие размерность длины. Эти параметры описывают состояния у фронтов трещины и являются функционалами от предыстории нагружения, деформирования и повреждения. Роль эти параметров могут выполнять эффективные радиусы кривизны на фронте, т.е. некоторые размеры, характеризующие концентрацию напряжений у фронтов. В процессе распространения трещины её фронт может попеременно заостряться и затупляться; это явление описывается как кинетика изменения эффективного радиуса кривизны на фронте [13]. Если модель роста усталостной трещины строится на основе модели тонкой пластической зоны из нелинейной механики разрушения, то роль параметра длины выполняет циклическое (обратимое в пределах цикла) раскрытие на фронте трещины [8].

Поведение усталостных трещин зависит, как и в задачах хрупкого разрушения, от соотношения между обобщенными силами. Трещина не растет в момент времени t по G -координате a_k , растет непрерывно или распространяется скачком в зависимости от

знака разности обобщенных сил

$$H_k = G_k[s(t), a(t), \omega(t), \rho(t)] - \Gamma_k[s(t), a(t), \omega(t), \rho(t)] \quad (3.3)$$

Здесь символы $s(t)$, $a(t)$, $\omega(t)$ и $\rho(t)$ обозначают совокупности параметров, характеризующих соответственно нагрузки и воздействия, размеры и форму трещин, уровни повреждений и условия на фронте трещин, достигаемые к моменту времени t . При циклическом нагружении условие формулируется по отношению к верхней грани разности обобщенных сил в пределах N -го цикла, т.е. при $t \in (t_{N-1}, t_N]$:

$$H_k = \sup_{t \in (t_{N-1}, t_N]} \{G_k[s(t), a(t), \omega(t), \rho(t)] - \Gamma_k[s(t), a(t), \omega(t), \rho(t)]\} \quad (3.4)$$

Соотношения (3.3) и (3.4) включают все варианты развития трещин: накопление повреждений при неподвижном фронте; непрерывное продвижение фронта при выполнении равенства $H_k = 0$; скачкообразный рост трещины при многократном изменении знака H_k , т.е. при многократном переходе из одного субравновесного состояния в другое через неустойчивое равновесное или неравновесное состояние; наконец, финальное разрушение, которое сопровождается динамическим распространением трещины. Частный случай роста усталостной трещины как результат полного повреждения на ее фронте также описывается в рамках этого подхода. Условие непрерывного роста в последнем случае

$$\Gamma_k[s(t), a(t), \omega(t), \rho(t)] = \Gamma_* \quad (3.5)$$

в сущности, использовалось рядом авторов для моделирования роста трещины при ползучести в виде соотношения $\omega = \omega_*$. Здесь $\Gamma_*(\omega_*)$ – предельное значение обобщенной силы сопротивления, ω_* – предельный уровень повреждений.

4. Для иллюстрации рассмотрим двухмерную задачу о росте трещины коррозионной усталости от поверхности тела в условиях отрыва (фиг. 1,а). Пусть у входа в трещину (при $x = 0$) задана постоянная концентрации активного агента c_∞ . У фронта трещины (при $x = a$) возникает циклическая пластическая зона длиной λ_p . При этом

$$\lambda_p = a \left[\sec \left(\frac{\pi \Delta \sigma_\infty}{4 \sigma_0} - 1 \right) \right] \quad (4.1)$$

где σ_0 – предельное напряжение, аналогичное пределу текучести при одноосном растяжении (совпадающее в частных случаях с этим пределом). Длина λ_p или соответствующее значение циклического раскрытия на фронте входит в постановку задачи как дополнительный параметр. Повреждения описываем при помощи двух скалярных мер, различая меру механических повреждений $\omega_f(x, t)$ и меру коррозионных повреждений $\omega_c(x, t)$. Для простоты считаем, что эти меры аддитивны, причем условие $\omega_f + \omega_c = 1$ отвечает полному повреждению материала.

Задача о росте трещины является однопараметрической; роль G -координаты выполняет глубина трещины a . Пренебрегая влиянием повреждений на значение активной обобщенной силы, определяем ее согласно [22] как

$$G = \frac{8Y^2 \eta \sigma_0^2 a}{\pi E} \left[\ln \cos \left(\frac{\pi \sigma_\infty}{2 \sigma_0} \right) + \frac{\pi \sigma_\infty}{2 \sigma_0} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi \sigma_\infty}{2 \sigma_0} \right) \right] \quad (4.2)$$

Здесь σ_∞ – напряжение отрыва, приложенное "на бесконечности", E – модуль Юнга, $\eta = 1$ при плоском напряженном состоянии и $\eta = 1 - \nu^2$ при плоской деформации, ν – коэффициент Пуассона, Y – форм-фактор порядка единицы. Для обобщенной силы сопротивления примем выражение

$$\Gamma = \gamma_0 [1 - \chi(\psi_f + \psi_c)] \quad (4.3)$$

где γ_0 – удельная работа разрушения для неповрежденного материала, ψ_f и ψ_c – меры повреждения на фронте трещины от чисто механических и коррозионных воздействий соответственно. Если задавать меры только на продолжении фронта трещины $x \geq a$, $y = 0$, то $\psi_f(t) = \omega_f(a, t)$, $\psi_c(t) = \omega_c(a, t)$. В формулу (4.3) входит постоянная χ . При этом $\gamma_0(1 - \psi)$ имеет смысл остаточного значения удельной работы разрушения при полном повреждении материала.

Для описания кинетики повреждаемости возьмем порогово-степенные зависимости, аналогичные уравнению (2.1):

$$\frac{\partial \omega_f}{\partial t} = \left(\frac{\Delta \sigma - \Delta \sigma_{th}}{\sigma_d} \right)^{m_f}, \quad \frac{\partial \omega_c}{\partial t} = \frac{1}{t_c} \left(\frac{c_t - c_{th}}{c_d} \right)^{m_c} \quad (4.4)$$

В эти уравнения входят размах напряжений $\Delta \sigma$ на продолжении фронта $x \geq a$, $y = 0$, а также концентрация активного агента c_t на фронте трещины. Кроме того, уравнение содержит параметры материала σ_d , σ_{th} , c_d , c_{th} , m_f , m_c , t_c . Чтобы учесть закрытие трещины при разгрузке и родственные эффекты [1], надо рассматривать напряжения c_d и $\Delta \sigma_{th}$ как функции от характеристики цикла $R = \sigma_{\infty}^{\min} / \sigma_{\infty}^{\max}$ или заменять размах действующих напряжений $\Delta \sigma$ на некоторое эффективное значение размаха. При $\Delta \sigma < \Delta \sigma_{th}$ и $c < c_{th}$ правые части в соответствующих уравнениях (4.4) следует положить равными нулю.

Значение c_t во втором уравнении (4.4) вообще, отлично от концентрации c_{∞} у входа в трещину. Уравнение массопереноса и сопутствующие граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial(hc)}{\partial t} + v \frac{\partial(hc)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(hD \frac{\partial c}{\partial x} \right) + 2f(c, \omega_c) \quad (4.5)$$

$$c = c_{\infty} \quad (x = x_e), \quad D(\partial c / \partial x) = f(c, \psi_c) \quad (x = a)$$

где h – раскрытие трещины в данном поперечном сечении, v – конвективная скорость, D – коэффициент диффузии, $f(c, \omega_c)$ – функция, характеризующая скорость реакции на поверхности трещины. Уравнение массопереноса учитывает, наряду с диффузией агента в глубину трещины, его поглощение на боковых стенках. Первое граничное условие из (4.5) ставится на границе, которая отделяет область диффузионного механизма $x_e < x < a$ от области $0 \leq x \leq x_e$, где действует насосный механизм, т.е. происходит циклическое обновление среды. Если пренебречь сжимаемостью среды и изменением раскрытия трещины по ее длине, то нетрудно оценить порядок значения x_e из условия сохранения массы. Второе граничное условие из (4.5) связывает диффузионный поток вблизи фронта со скоростью реакции $f(c, \psi_c)$ на фронте. Простейшая форма для скорости реакции будет

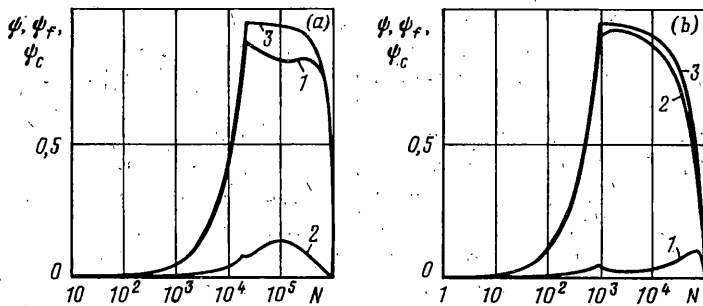
$$f(c, \omega_c) = k(1 - \omega_c^{\beta})(c_s - c) \quad (4.6)$$

где k – коэффициент скорости реакции, c_s – концентрация, соответствующая насыщению или некоторому порогу коррозионного повреждения, показатель $\beta \geq 0$. Формула (4.6) учитывает (в феноменологической форме) замедляющий эффект от накопления коррозионных повреждений. Впрочем, этот эффект может быть учтен, если принять, что c_s в формуле (4.6) зависит от ω_c .

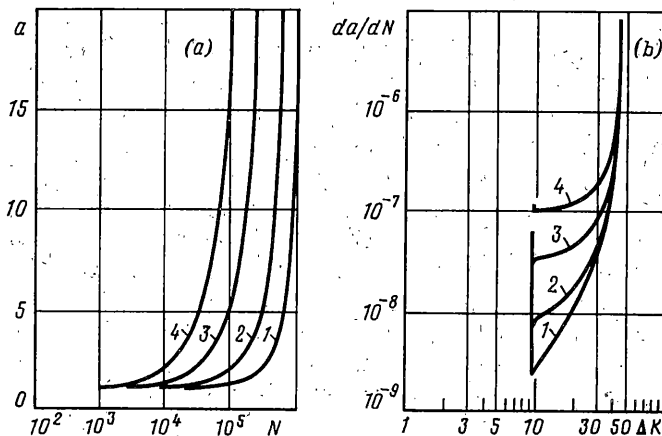
Вместо решения краевой задачи (4.5) в статье [12] было использовано эвристическое уравнение для концентрации на фронте c_t :

$$\frac{dc_t}{dt} = \frac{c_a - c_t}{\tau_D} + \frac{c_b - c_t}{\lambda_D} \frac{da}{dt} \quad (4.7)$$

Первый член в правой части учитывает диффузию при неподвижном фронте



Фиг. 5



Фиг. 6

трещины, второй член учитывает влияние роста трещины. Уравнение (4.7) содержит параметры c_a , c_b , τ_D , λ_D , которые в принципе следует определять из эксперимента. Порядок их значений нетрудно определить, сопоставляя уравнения (4.5)–(4.7). Действительно, рассматривая субстанциональную производную $dc_i/dt = \partial c_i/\partial x + (\partial c_i/\partial x)(da/dt)$, замечаем, что первый член в правой части отвечает первому члену в правой части уравнения (4.7). Характерное время диффузии τ_D , как видно из (4.5), имеет порядок $(a-x_e)^2/D$. При этом, как следует из условия при $x = x_e$, имеет место оценка $c_a \sim c_\infty$. Характерную длину λ_D оценим, используя граничные условия при $x = a$ и формулу (4.5) для скорости реакции. Тогда $\lambda_D \sim D/k$, $c_b \sim c_s$.

Некоторые численные результаты [23] приведены на фиг. 5, 6. Результаты получены при $\Delta\sigma_\infty = 200$ МПа; $R = 0,25$, $f = 1$ Гц и начальных условиях $a_0 = 1$ мм, $c(x, 0) = c_\infty$, при $0 \leq x \leq a$. Механические свойства материала: $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,3$, $\sigma_0 = 500$ МПа. Параметры в уравнениях (4.4) взяты следующие: $\sigma_d = 5$ ГПа, $\Delta\sigma_{th} = 250$ МПа, $t_c = 10^3$ с, $c_{th} = 0$, $m_f = 4$, $m_c = 1$, $\chi = 0$. В уравнениях и принято, что $D = 10^{-6}$ м²/с, $k = 10^{-5}$ м/с, $c_s/c_d = 0,5$, $\beta = 2$. Концентрация на входе также задана в виде отношения c_∞ к параметру материала c_d .

На фиг. 5 показано, как меры повреждения на фронте трещины ψ_f (кривые 1), ψ_c (кривые 2) и $\psi = \psi_f + \psi_c$ (кривые 3) изменяются в функции от числа циклов N . Фиг. 5, а получена при $c_\infty/c_d = 0,25$ (относительно низкая концентрация агента у входа в трещину), фиг. 5, б при $c_\infty/c_d = 1$. Начальные ветви кривых соответствуют накоплению повреждений при неподвижном фронте. При низкой концентрации агента доминируют механические повреждения, при высокой концентрации – коррозионные

повреждения. Страгивание трещины происходит, когда суммарная мера повреждений достигает максимума. Заметим, что этот максимум заметно ниже, чем критическое значение $\chi = 1$. Таким образом, даже при страгивании условия (3.5) не достигается. Далее происходит рост трещины при достаточно высоком уровне суммарных повреждений, хотя соотношение между составляющими изменяется. Резкое уменьшение повреждений на фронте означает ускорение роста с приближением к финальному разрушению. Напомним, что фронт движется, так что значения ψ_f , ψ_c и ψ , начиная с момента страгивания, относятся к различным частицам материала.

На фиг. 6,а показано влияние концентрации агента на глубину трещины в мкм, рассматриваемую как функцию числа циклов N . Кривые 1–4 относятся к концентрациям $c_\infty/c_d = 0,25; 0,5; 0,75$ и $1,0$ соответственно. Кривые сходны по конфигурации; однако числа циклов до страгивания трещины и до финального разрушения изменяются на порядок и более при варьировании концентрации в указанных выше пределах.

На фиг. 6,б результаты показаны в виде зависимости скорости роста da/dN в м/цикл от размаха коэффициента интенсивности напряжений $\Delta K = Y\Delta\sigma_\infty(\pi a)^{1/2}$, измеряемого в МПа $\cdot$ м^{1/2}. Все кривые начинаются при значении ΔK , которое отвечает глубине трещины a_0 и заканчиваются при значении, близком к критическому $\Delta K_c = K_c(1 - R)$, $K_c = (\gamma_0 E/\eta)^{1/2}$. Однако скорость роста в пределах диаграммы отличается на несколько порядков, особенно на начальном этапе. Детальное рассмотрение показывает, что на этом этапе скорость da/dN как функция от ΔK изменяется немонотонно. Это можно объяснить непростым характером взаимодействия между двумя механизмами накопления микроповреждений; отчасти заметному по немонотонному поведению мер ψ_f , ψ_c на фиг. 5. При высокой концентрации (кривая 4 на фиг. 6,б) этот эффект почти полностью исчезает. Однако здесь наблюдается затяжное плато, которое связано с преобладанием коррозионных повреждений. Скорость da/dN начинает возрастать лишь при достаточной глубине трещины.

5. Одно из преимуществ предлагаемого подхода состоит в возможности его распространения на многопараметрические усталостные трещины. В частности, тело может содержать произвольное счетное число трещин. Их размеры заданы при помощи G -координат $a_1, \dots, a_m$. Например, полагая, что внутренняя плоская трещина растет, сохраняя в плане эллиптическую форму, приходим к задаче с двумя G -координатами – длинами полуосей эллипса a и b . Аналогично может быть поставлена задача о расчете трещины, которая распространяется от поверхности. Полуэллиптическая форма, заданная с точностью до двух параметров, служит удовлетворительным приближением для приповерхностных трещин [24]. Однако множество G -координат может быть континуальным, например, в задачах о росте извилистых и ветвящихся трещин или трещин, имеющих произвольную форму в плане [13].

Рассмотрим плоскую трещину отрыва в линейно упругой повреждаемой среде. Контур трещины C предполагаем гладким. Зададим уравнение контура $r = R(\varphi)$ в полярных координатах r, φ , трактуя $R(\varphi)$ как континуальное множество G -координат. Роль индекса при обобщенных координатах выполняет значения полярного угла φ , например, $\varphi \in [0, 2\pi]$ для внутренних трещин. Вследствие необратимости трещин вариации обобщенных координат удовлетворяют условию $\delta R(\varphi) \geq 0$. Виртуальная работа, произведенная на этих вариациях, состоит из двух частей. Выразим сумму работ всех внешних сил и внутренних сил упругости через плотность потока энергии упругой деформации $G(\varphi)$ через фронт трещины, а виртуальную работу разрушения через удельную работу разрушения $\gamma(\varphi)$. Тогда

$$\delta_G W = \int_C G(\varphi) R(\varphi) d\varphi - \int_C \gamma(\varphi) R(\varphi) d\varphi \quad (5.1)$$

откуда следует, что локальное поведение фронта трещины зависит от знака разности $G(\varphi) - \gamma(\varphi)$, где $\gamma(\varphi)$ равно значению $\gamma(\varphi)$ на C .

Фронт трещины не продвигается, если всюду на C выполнено условие $G(\varphi) < \Gamma(\varphi)$. Трещина растет устойчиво на части контура C_+ , если $G(\varphi) = \Gamma(\varphi)$, $\partial G(\varphi)/\partial r < \partial \Gamma(\varphi)/\partial r$, $\varphi \in C_+$ при дополнительном условии субравновесности $G(\varphi) < \Gamma(\varphi)$ на остальной части контура, и т.д. Для фактических вычислений положим, что

$$G(\varphi) = \eta K^2(\varphi) / E, \quad \Gamma(\varphi) = \gamma_0 [1 - \psi(\varphi)] \quad (5.2)$$

где $K(\varphi)$ – коэффициент интенсивности напряжений на фронте, $\psi(\varphi)$ – значение меры повреждений $\omega(r, \varphi)$ на C . Поскольку материал принят линейно упругим, то необходимо ввести дополнительный параметр длины. В качестве такого параметра возьмем эффективный радиус кривизны на фронте $\rho(\varphi)$, точнее такой размер, что величина $(R/\rho)^{1/2}$ имеет порядок коэффициента концентрации в данной точке контура. Эта величина, вообще, изменяется в процессе роста трещины, фронт которой может попеременно затупляться и заостряться. Подходящее уравнение для эволюции эффективного радиуса имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho_s - \rho}{\lambda_p} \frac{\partial R}{\partial t} + (\rho_b - \rho) \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5.3)$$

Здесь ρ_s и ρ_b – значения острого и тупого радиусов; λ_p – некоторый параметр, имеющий размерность длины. Первый член в правой части (5.3) описывает заострение радиуса при ускорении роста трещины, второй – затупление вследствие процесса накопления повреждений на фронте. Напряжения отрыва на фронте и на его продолжении, очевидно, существенно зависят от текущих значений $\rho(\varphi, t)$.

Трудности при вычислении обобщенных сил преодолеваются естественным образом: значения, найденные на каждом шаге моделирования, служат начальным приближением для следующего шага. Другой способ – представление контура трещины в виде эллипса или дуги эллипса. Тогда вместо (5.1) имеем

$$\delta_G W = (G_a - \Gamma_a) \delta a + (G_b - \Gamma_b) \delta b \quad (5.4)$$

где $G_a, G_b, \Gamma_a, \Gamma_b$ – обобщенные силы, соответствующие G -координатам – длинам полуосей эллипса a и b . Обобщенные силы могут быть вычислены путем интегрирования обобщенных сил из (5.2) по контуру трещины с последующим дифференцированием по a и b [22]. Например, для внутренней трещины ($b \leq a$):

$$G_a = \frac{2\pi\sigma_\infty^2 b^2 (1-\nu)}{3\mu E(k)} \left[1 + k'^2 \frac{D(k)}{E(k)} \right] \quad (5.5)$$

$$G_b = \frac{2\pi\sigma_\infty^2 ab (1-\nu)}{3\mu E(k)} \left[2 + k' \frac{D(k)}{E(k)} \right]$$

$$\Gamma_a = \int_0^{2\pi} \gamma(\beta) b \cos^2 \beta d\beta, \quad \Gamma_b = \int_0^{2\pi} \gamma(\beta) a \sin^2 \beta d\beta \quad (5.6)$$

где μ – модуль сдвига, $k'^2 = 1 - k^2 = b^2/a^2$, $D(k) = [K(k) - E(k)]/k^2$, $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы в форме Лежандра. В формулах (5.6) интегрирование производится по эллиптическому углу β .

Как следует из (5.4) эллиптическая трещина растет непрерывно по координате a , если $G_a = \Gamma_a$, $\partial G_a/\partial a < \partial \Gamma_a/\partial a$, $G_b < \Gamma_b$, по координате b , если $G_b = \Gamma_b$, $\partial G_b/\partial b < \partial \Gamma_b/\partial b$, $G_a < \Gamma_a$. Некоторые результаты вычислений с использованием формул (5.5) и (5.6) приведены в [13].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-282).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Handbook of Fatigue Crack Propagation in Metallic Structures / Ed. A. Carpinteri. V. 1. Amsterdam: Elsevier, 1994. 955 p.
2. Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 448 с.
3. Болотин В.В. Уравнения роста усталостных трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 153–160.
4. Болотин В.В. Объединенные модели в механике разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 127–137.
5. Bolotin V.V. A unified approach to damage accumulation and fatigue crack growth // Eng. Fract. Mech. 1985. V. 22. No 3. P. 387–398.
6. Болотин В.В., Минаков Б.В., Чирков В.П. Влияние начальных условий на страгивание и распространение усталостных трещин // Изв. РАН. МТТ. 1994. No 1. С. 73–79.
7. Болотин В.В., Ковех В.М. Влияние микроповреждений на распространение усталостных трещин // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 1029–1038.
8. Bolotin V.V., Lebedev V.L. Analytical model of fatigue crack growth retardation due to overloading // Intern. J. Solids and Structures. 1996. V. 33. No 9. P. 1229–1242.
9. Болотин В.В. О распространении усталостных трещин в линейных вязкоупругих средах // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 4. С. 117–127.
10. Bolotin V.V. Delaminations in composite structures: its origin, buckling, growth and stability // Composites. 1996. V. 27B. No 2. P. 129–145.
11. Болотин В.В. Механическая модель коррозионного растрескивания. // Машиноведение. 1987. № 4. С. 20–26.
12. Болотин В.В., Шипков А.А. Модель роста усталостных трещин с учетом факторов окружающей среды // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 313–322.
13. Bolotin V.V. Mechanics of Fatigue. Boca Raton: CRC Press, 1998. 480 p.
14. Kachanov L.M. Introduction in Continuous Damage Mechanics. Dordrecht: Nijhoff, 1986. 283 p.
15. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
16. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965. 279 с.
17. Bolotin V.V., Babkin A.A., Belousov I.L. Probabilistic model of early fatigue crack growth // Probab. Eng. Mech. 1998. V. 13. N 3. P. 227–232.
18. The Behaviour of Short Fatigue Cracks / Eds K.J. Miller and E.R. de los Rios. London: Inst. Mech. Eng., 1986. 560 p.
19. Bažant Z.P. Mechanics of distributed cracking // Appl. Mech. Rev. 1986. V. 39. No 5. P. 675–705.
20. Bolotin V.V. Fracture from the standpoint of non-linear stability // Intern. J. Non-Linear Mechanics. 1994. V. 29. No 4. P. 569–585.
21. Bolotin V.V. Stability problems in Fracture Mechanics. New York: Wiley, 1996. 188 p.
22. Болотин В.В. Об обобщенных силах в аналитической механике разрушения // Новожиловский сборник / Под ред. Н.С. Соломенко. СПб.: Судостроение, 1992. С. 161–170.
23. Болотин В.В., Ковех В.М., Шипков А.А. Моделирование роста трещин коррозионной усталости // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998. № 5. С. 67–71.
24. Part-Through Crack Fatigue Life Prediction / Ed. J.B. Chang. Philadelphia: ASTM, 1979. 216 p.

Москва

Поступила в редакцию
12.02.1999