

УДК 539.4:519.248

© 1999 г.

Д.А. ОНИЩЕНКО

ВЕРОЯТНОСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОМАСШТАБНОГО РАЗРУШЕНИЯ

В классической механике разрушения накоплены обширные фактические данные, свидетельствующие о том, что процессы разрушения материалов имеют многомасштабный характер. Это нашло свое отражение в разработке объединенных моделей накопления повреждений и разрушения. Процессы формирования микроповреждений и последующего макроразрушения имеют ярко выраженную стохастическую природу и поэтому проблема построения вероятностных иерархических моделей разрушения вызывает в последнее время большой интерес. В работе описывается иерархическая модель процесса разрушения в дискретной среде, элементы которой обладают случайной прочностью. Учитываются эффекты перераспределения нагрузок при разрушении отдельных элементов. Исключение из модели времени позволяет с некоторой долей условности отнести ее к разделу "стохастической квазистатики". Относительная простота "механической" компоненты модели компенсируется возможностью выполнения соответствующего строгого аналитического исследования в рамках теоретико-вероятностных подходов. Получены уравнения, определяющие в вероятностном смысле макропрочность рассмотренной системы. При исследовании их свойств применены нестандартные подходы, в частности, метод ренормализационной группы. Выполнен асимптотический анализ, результатом которого явилось обнаружение нового класса масштабно-инвариантных (вероятностных) распределений прочности. В работе сделан краткий обзор родственных моделей, а также дано описание основных принципов построения моделей стохастического разрушения дискретных сред. Отмечено, что эти принципы имеют много точек соприкосновения с теорией надежности многоэлементных систем с зависимыми отказами.

1. Введение. Вероятностная механика разрушения, в рамках которой с помощью теоретико-вероятностных и статистических методов изучаются разнообразные стохастические модели деформирования и разрушения твердых тел и сооружений, активно развивается несколько последних десятилетий (см. обзоры и монографии [1–4], где содержится обширная библиография отечественных и зарубежных публикаций по данной тематике).

Проблема построения вероятностных критериев прочности и разрушения для дискретных систем, состоящих из взаимодействующих элементов, которые обладают статистическими прочностными характеристиками, является важным и необходимым компонентом общей вероятностной механики разрушения. Возможное продвижение в решении этой задачи, с одной стороны, позволяет в первом приближении исследовать проблему применительно к моделям сплошных сред путем осуществления некоторой структурной дискретизации, а с другой стороны, соответствующие результаты представляют самостоятельный интерес с точки зрения их возможного непосредственного применения для изучения реальных сред с дискретной структурой, а также для анализа вероятностных моделей функционирования различных технических систем.

Одним из актуальных направлений исследований в этой области является корректное построение и анализ так называемых структурных моделей, в которых в явном виде учитывается многомасштабность процессов разрушения. Настоятельная потребность в разработке подобных моделей диктуется совокупностью полученных и осмысленных в рамках механики разрушения фактов, говорящих о том, что в процессах накопления повреждений и последующего разрушения конструкционных материалов участвуют элементы структуры различных геометрических масштабов (многочисленные примеры можно найти практически во всех статьях этого номера журнала).

Структурные элементы весьма разнообразны и их характерные размеры изменяются в широком диапазоне — от размеров молекул до размеров элементов реальных конструкций, при этом соответствующие процессы разрушения могут сильно отличаться по своей природе [2, 5, 6]. Наличие большого количества однотипных элементов со случайными свойствами, образующих данный структурный уровень, практически неизбежно приводит к необходимости применять вероятностные подходы к объединенному описанию процессов накопления повреждений и разрушения в соответствующем масштабе и последующего перехода глобального процесса разрушения на следующий (в иерархии масштабов) уровень.

Таким образом, полнокровная модель многомасштабного разрушения должна содержать две составляющих: "механическую" и "вероятностную". Первая из них должна обеспечивать решение задачи в детерминистической постановке, то есть при условии, что всем случайным параметрам полной модели приписаны некоторые конкретные (но при этом, вообще говоря, произвольные) значения. Вероятностная же составляющая отвечает за описание случайных параметров, предоставляет методы для преобразования случайных переменных, используемых в рамках в выбранной механической составляющей модели, а также, что очень важно, ответственна за вероятностную интерпретацию результатов, получаемых при решении задачи. Последнее, в частности, означает, что если, например, прочности элементов многоэлементной системы являются случайными величинами, то и прочность системы в целом оказывается, вообще говоря, случайной величиной. Отметим, что в некоторых случаях результаты вероятностных по постановке задач могут оказываться фактически детерминистическими. Однако предсказать такое поведение выходных параметров модели без вероятностной составляющей и соответствующего теоретико-вероятностного аппарата (например, различных теорем о средних значениях) невозможно.

С основными принципами стохастического моделирования процессов разрушений сложных систем, изложенными в терминах теории надежности, можно познакомиться по монографиям В.В. Болотина [2, 7] и их более ранним изданиям. Обладая значительной степенью общности, разработанная В.В. Болотиным теория "стохастической динамики", опирающаяся на последовательное использование аппарата теории случайных процессов, предоставила большой простор для исследований более частных проблем. В публикуемой работе рассматриваются модели прочности, которые условно можно было бы отнести к "стохастической квазистатике". За счет исключения из постановки задачи времени в некоторых случаях (соответствующие модели, описывающие статическую прочность многоэлементных систем, приводятся ниже) удастся найти аналитические решения и провести их достаточно полное исследование.

Очевидно, что построение и, в большей степени, исследование объединенных моделей сопряжено со значительными трудностями как теоретического, так и вычислительного характера. Пока основные продвижения здесь связаны с вероятностным рассмотрением задачи разрушения в "одноуровневом" приближении. Традиционный подход здесь состоит в том, что некоторые параметры "классической" механической модели разрушения, отвечающей рассматриваемому структурному уровню, полагаются случайными, с той или иной степенью математической строгости

решается сформулированная вероятностная задача. Связь с задачей накопления повреждений и разрушения на предшествующем структурном уровне осуществляется лишь косвенным образом, например, посредством введения некоторых дополнительных переменных (типа меры повреждений). При этом задание указанных выше случайных параметров и дополнительных переменных производится полуэмпирическим образом. Успешным примером реализации такого подхода могут служить объединенные структурные модели, описывающие накопление повреждений и разрушение в условиях циклического нагружения [2, 8, 9].

Альтернативным подходом является применение методов Монте-Карло, когда вклад вероятностной составляющей может быть значительно снижен по сравнению с механической составляющей. Если говорить упрощенно, то назначение первой здесь заключается в стохастическом описании входных и выходных параметров, а проблема преобразований случайных входных параметров в случайные выходные параметры остается "за кадром" – правда, за счет колоссального объема численных расчетов, который отнюдь не всегда может быть реализован даже при современном уровне вычислительной техники.

В работе будут рассмотрены модели многомасштабного разрушения, которые в абстрактном ряду стохастических структурных моделей находятся, в некотором смысле, на противоположном фланге по отношению к указанным выше: основной акцент сделан на последовательном и строгом анализе вероятностной компоненты объединенной модели. Объектом изучения являются многоэлементные системы с конечным числом степеней свободы, когда каждый элемент может находиться лишь в одном из двух возможных состояний – неразрушенном или разрушенном. Предполагается, что система, обладающая многомасштабной иерархией, находится под действием определенного воздействия. Элементы системы имеют случайную прочность. При их разрушении происходит (мгновенное) перераспределение усилий в неразрушенных элементах, при этом характер перераспределения зависит от текущего структурного уровня, на котором развивается процесс разрушения. Задача заключается в определении прочности системы в целом (как стохастического объекта) при условии, что нам известны вероятностные распределения прочностей элементов и законы перераспределения усилий.

В качестве "механической составляющей" берутся достаточно простые модели, но некоторая их условность компенсируется возможностью аналитического построения определяющих соотношений между вероятностными переменными, относящимися к соседним структурным уровням. Это позволило выполнить эффективное исследование свойств построенных моделей. Были обнаружены интересные особенности поведения прочности соответствующих систем как при конечной глубине иерархии структуры, так и в асимптотическом пределе, то есть при неограниченном увеличении числа элементов и структурных уровней в системе. В частности, проведен анализ условий формирования порога прочности. Кроме того, впервые найдены масштабно-инвариантные распределения прочности.

Формат изложения материала был, по-возможности, выбран таким, чтобы, с одной стороны, статья могла послужить некоторым введением в общую проблематику построения и анализа моделей разрушения стохастических дискретных сред (с безусловным акцентом на вероятностные аспекты), а с другой стороны, чтобы описать новые результаты, полученные автором при исследовании иерархических моделей разрушения. Используемый математический аппарат с достаточной степенью подробности приведен лишь в п. 4, поскольку, на взгляд автора, может представить самостоятельный интерес. Родственные модели и результаты отмечаются по мере изложения материала.

Материал излагается в следующей последовательности. В п. 2 формулируется общая постановка задачи о прочности многоэлементной системы и анализируются свойства важного класса систем без разгрузки. В п. 3 описывается обобщенная модель многомасштабного разрушения регулярной дискретной системы с иерархическим

строением, которая в зарубежной литературе получила название "нагруженного фрактального дерева", и демонстрируются варианты различного асимптотического поведения прочности системы. В п. 4 приводится алгоритм построения масштабно-инвариантных распределений прочности и частично исследуется проблема их устойчивости. Краткое описание родственных моделей дано в п. 5.

2. Многоэлементные системы без разружки. Здесь излагаются основные принципы построения моделей разрушения многоэлементных систем, моделирующих дискретную среду, элементы которых обладают случайной прочностью. Описываются свойства систем без разружки, имеющие важное значение для последующего анализа иерархических моделей.

2.1. Основные положения одноуровневой модели разрушения. Прежде чем приступить к построению вероятностной модели многомасштабного разрушения, необходимо выполнить корректное построение аналогичной модели в "одноуровневом" случае, когда предполагается, что характер разрушения не изменяется с увеличением числа разрушенных элементов. Ниже приведены основные положения варианта такой модели с исключенным временем. Более полная соответствующая модель в квазистатической постановке была описана в [10].

Для наглядности описание модели будет выполнено на примере статически неопределимой стержневой системы, изображенной на фиг. 1. Пусть многоэлементная система (МС), находящаяся под действием некоторого воздействия Q , состоит из n элементов E^1, \dots, E^n , которые каким-либо образом пронумерованы. Каждый элемент может быть в неразрушенном или разрушенном состоянии (критерий разрушения элемента описан ниже). Система может находиться в неповрежденном (исходном) состоянии, в каком-либо поврежденном состоянии, а также быть полностью разрушенной. Чтобы отличать состояния частичного разрушения от полного разрушения, последнее будет ниже называться коллапсом системы. Произвольное состояние МС идентифицируется перечислением неразрушенных (работоспособных) элементов, то есть указанием соответствующего набора номеров $I_k = \{i_1, \dots, i_k\}$, где $1 \leq k \leq n$. При этом обозначение $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ соответствует исходному состоянию.

Все поврежденные состояния поделим на две группы – допустимые и критические (недопустимые). Множество последних обозначим через Z . В частности, оно включает в себя состояние I_0 (разрушение всех n элементов). Например, для системы, показанной на фиг. 1, к критическим состояниям разумно отнести и конфигурации (всего их n) с одним неразрушенным элементом. Переход системы (по мере развития процесса разрушения) в любое критическое состояние отождествим с ее коллапсом. Потребуем, чтобы множество Z удовлетворяло естественному условию: если некоторое состояние I_k принадлежит Z , то и все состояния, которые могут быть получены из I_k удалением каких-либо элементов, также принадлежит Z .

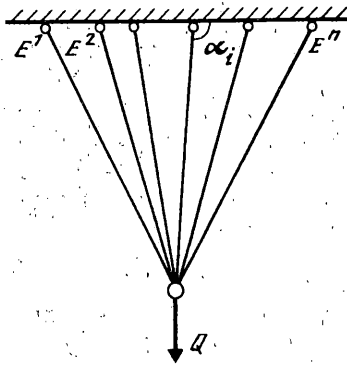
Пусть усилия в элементах однозначно зависят от нагрузки и текущей (допустимой) конфигурации системы. Например, в предположении о линейно-упругом характере деформирования стержней системы, показанной на фиг. 1, осевые усилия q в неразрушенных элементах МС при одинаковых жесткостях всех стержней вычисляются по формуле

$$q_j = \frac{\sin^2 \alpha_j}{\sum_{i \in I_k} \sin^3 \alpha_i} Q$$

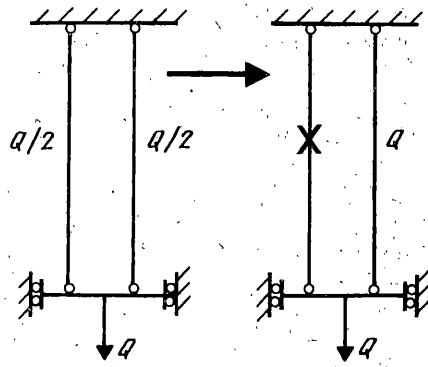
т.е. однозначно определяются нагрузкой Q и набором неразрушенных элементов I_k

$$q_j = q_j(I_k; Q), \quad j \in I_k. \quad (2.1)$$

Наличие зависимости усилий от конфигурации означает, в частности, что при разрушении элементов имеет место перераспределение нагрузок.



Фиг. 1



Фиг. 2

Пусть, далее, прочность отдельного элемента E^i (в данном случае, прочность стержня на растяжение) определяется некоторой неотрицательной характеристикой R_i ($i = 1, \dots, n$). Величины R_i считаются случайными и описываются заданными функциями распределения (ф.р.) $F^{(i)}(x)$. В модели предполагается, что прочности элементов МС являются независимыми случайными величинами при допущении о возможности различия соответствующих ф.р.

Введем критерий перегруженности (в данной модели, вообще говоря, не тождественный критерию разрушения) отдельного элемента, который запишем в традиционном виде

$$q_i > r_i \quad (2.2)$$

где r_i — реализация случайной величины R_i . Нетрудно видеть, что в этом случае функция распределения прочности получает следующую удобную интерпретацию: $F^{(i)}(x) = \text{Prob}\{R_i < x\}$ — значение ф.р. прочности данного элемента при аргументе, равном x , равно вероятности этого элемента оказаться перегруженным при нагрузке x . Состояния МС хотя бы с одним перегруженным элементом назовем перегруженными, а в противном случае — неперегруженными.

Переходим к формулировке критерия разрушения МС в целом, то есть коллапса системы. Предположим на время, что каждому элементу системы приписано конкретное значение его прочности r_i . Процесс разрушения МС анализируется в рамках пошаговой процедуры: при заданной нагрузке на каждом шаге критерий перегруженности (2.2) проверяется для всех неразрушенных элементов, и какие-то из перегруженных элементов — выбираемые при помощи дополнительного критерия, который ниже называется "правилом выбора", — считаются разрушенными и удаляются из системы. Производится пересчет нагрузок в новой конфигурации системы, и процедура повторяется. Возможны два варианта завершения этой итерационной процедуры. Первый — на каком-то этапе процесса разрушения МС окажется в допустимом неперегруженном состоянии (система осталась в исходном состоянии или повреждена, но коллапс не наступил); второй — МС попадет в недопустимое состояние (коллапс системы).

Процедура является корректной, поскольку однозначно отвечает на вопрос: реализуется ли коллапс при произвольной реализации набора прочностей $\{r_i; i = 1, \dots, n\}$. В силу постановки задачи коллапс системы является случайным событием. Поэтому при заданном воздействии Q коллапс реализуется лишь с некоторой вероятностью $\mathcal{P}_c(Q)$. Если теперь под Q понимать интенсивность некоторой нагрузки заданного вида (на фиг. 1 такой нагрузкой является вертикальная сила, направленная вниз), то совокупность значений $\mathcal{P}_c(Q)$ есть не что иное, как ф.р. прочности системы.

Теперь можно математически сформулировать задачу: найти ф.р. прочности МС при заданных (а) ф.р. прочности $F^{(i)}(x)$ ее элементов, (б) законе перераспределения усилий (2.1) и (с) правиле выбора.

Остановимся на последнем пункте, очень важном для последующего изложения. Правило выбора в описанной модели должно формулироваться исходя из дополнительной информации о процессах деформирования и разрушения в реальном аналоге исследуемой МС. Вполне реалистичными, например, представляются такие варианты:

- разрушенным из числа нескольких перегруженных элементов считается "самый" перегруженный элемент;
- разрушенными считаются все перегруженные элементы. Возможны и другие варианты.

Анализируя процесс разрушения в построенной модели, вообще говоря, можно столкнуться с ситуацией, когда при различных правилах выбора получаются отличающиеся друг от друга последовательности отказов элементов, или различные пути разрушения. А поэтому и вероятность реализации коллапса в МС может зависеть от правила выбора (несложно построить соответствующий пример).

В то же время, как было показано в [10], для определенного класса МС (они могут быть названы системами без разгрузки) полное решение задачи может быть найдено без конкретизации правила выбора (см. ниже п. 2.3).

2.2. Базовый пример двухэлементной системы. Приведем решение задачи о прочности системы, состоящей из двух упругих стержней (фиг. 2); соответствующую модель назовем двухэлементной. Пусть стержни тождественны, но их прочности случайны и задаются одинаковой ф.р. $F_0(x)$. Предположим, что в исходном состоянии приложенная нагрузка распределяется между стержнями поровну.

$$q_1(\{1, 2\}; Q) = q_2(\{1, 2\}; Q) = Q/2$$

(это имеет место, например, если нагружение осуществляется таким образом, что удлинения стержней равны) и что после разрушения одного из них она полностью передается на неразрушенный, т.е. усилие в последнем удваивается

$$q_1(\{1\}; Q) = q_2(\{2\}; Q) = Q \quad (2.3)$$

Можно проверить, что вероятность коллапса данной системы вычисляется по формуле

$$\mathcal{P}_c(Q) = 2F_0(Q/2)F_0(Q) - [F_0(Q/2)]^2 \quad (2.4)$$

и, более того, этот результат не зависит от правила выбора.

Формула (2.4) есть (простейший) частный случай общей формулы, дающей решение классической задачи о прочности статистического пучка волокон [11]. Если пучок состоит из n волокон (или система, показанная на фиг. 2, включает n стержней) и нагрузка распределяется равномерно между всеми неразрушенными волокнами, то при любом правиле выбора результирующая формула для вероятности коллапса может быть записана, например, в следующей рекуррентной форме:

$$w^{(k)}(Q) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} C_k^i [F_0(Q/k)]^i w^{(k-i)}(Q) \quad (k=1, \dots, n) \quad (2.5)$$

где Q – полная нагрузка, $w^{(k)}(Q)$ – вероятность коллапса пучка из k элементов при нагрузке Q (полагаем $w^{(0)}(Q) \equiv 1$), C_k^i – число сочетаний, $F_0(x)$ – функция распределения прочности элементов.

Отметим, что соотношения (2.4) и (2.5) предоставляют точное аналитическое решение задачи.

2.3. Характеристические свойства систем без разгрузки. Независимость решения

задачи прочности от правила выбора, без сомнения, является весьма выигрышной характеристикой соответствующей модели, поскольку, как уже отмечалось выше, правило выбора не может быть конкретизировано без дополнительной детализации "механической" составляющей объединенной модели. Было показано [10], что это свойство является, в некотором смысле, ключевым еще и по другой причине – его наличие выделяет особый класс систем без разгрузки, для которых оказывается возможным получить общее аналитическое решение стохастической задачи прочности (в рамках описанной выше структурной модели).

Определение. Многоэлементная система из n элементов называется системой без разгрузки, если для любых допустимых состояний $I_k \subset I_m$, $m \leq n$ выполняются следующие условия:

$$q_i(I_m; Q) \leq q_i(I_k; Q) \quad (2.6)$$

при всех $i \in I_k$ (конфигурации I_k получаются из конфигурации I_m удалением одного или нескольких элементов). Непосредственно из определения следует, что ни в одном работоспособном элементе такой системы усилие не уменьшается на любом пути разрушения, т.е. в системе не происходит разгрузки.

Простыми примерами механических систем без разгрузки служат показанная на фиг. 1 статически неопределимая стержневая система (при некоторых ограничениях на допустимые конфигурации и соотношение жесткости стержней), широко встречающиеся на практике системы элементов, воспринимающие нагрузку по схеме параллельного соединения (фиг. 2), а также некоторые модели однонаправленных волокнистых композитов с учетом эффектов неравномерного перераспределения усилий (см., например, [12]).

Для систем без разгрузки вероятность коллапса может быть найдена в явном виде.

Утверждение. Вероятность коллапса системы без разгрузки из n элементов при заданном воздействии Q не зависит от правила выбора и вычисляется по следующей формуле [10, 13]

$$\mathcal{P}_c(I_n) = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{P}_c(I_n \setminus \{i\}) - \sum_{i_1, i_2=1}^n a_{i_1} a_{i_2} \mathcal{P}_c(I_n \setminus \{i_1, i_2\}) + \dots + (-1)^{n+1} a_1 \dots a_n \quad (2.7)$$

Здесь символ $\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n$ означает, что в данной сумме надо перебрать все наборы из m несовпадающих между собой целых чисел, принадлежащих набору I_n ; $a_i = F^{(i)}(q_i(I_n; Q))$ ($i = 1, \dots, n$); $q_i(I_n; Q)$ – нагрузка в элементе i в исходном состоянии системы, а $F^{(i)}(\cdot)$ – ф.р. прочности этого элемента.

Формула (2.7) является рекуррентной. Для вычисления величин $\mathcal{P}_c(I_m)$; $I_m = \{i_1, \dots, i_m\}$ при $m < n$ нужно, если $I_m \notin Z$, использовать в (2.7) набор I_m вместо I_n , а если $I_m \in Z$, то положить $\mathcal{P}_c(I_m) = 1$ (напомним, что Z – это множество критических конфигураций для исследуемой МС).

Доказательство основано на применении теоремы о вероятности суммы совместных событий. Вычисление вероятностей отдельных слагаемых удастся выполнить в явном виде благодаря выявленным особым свойствам систем без разгрузки, примером которых может служить следующее: для системы без разгрузки при заданной реализации набора прочностей элементов $\{r_i, i = 1, \dots, n\}$ и заданном воздействии Q при всех возможных правилах выбора путь разрушения либо остановится в одном и том же допустимом неперегруженном состоянии, либо завершится коллапсом системы.

Замечание 1. В случае системы с разгрузкой формула (2.7) также оказывается весьма полезной, поскольку с ее помощью можно получить верхнюю оценку для вероятности коллапса системы при произвольном правиле выбора.

Формула для прочности пучка (2.5) может быть автоматически получена из об-

щей формулы (2.7), если заметить, что усилия задаются соотношениями $q_i(I_n \setminus \{i_1, \dots, i_m\}; Q) = Q/(n-m)$, и положить $w^{(n-m)}(Q) = \mathcal{P}_c(I_n \setminus \{i_1, \dots, i_m\}; Q)$.

Теперь применим формулу (2.7) для простой системы из двух элементов (фиг. 2) в более общем по сравнению с рассмотренным ранее случае: предположим, что после разрушения одного из элементов усилие во втором элементе принимает значение ϑQ , $\vartheta > 0$. Получаемая система будет системой без разгрузки при условии $\vartheta \geq 1/2$, и из (2.7) следует, что вероятность коллапса в этом случае равна

$$\mathcal{P}_c(Q) = 2F_0(Q/2)F_0(\vartheta Q) - [F_0(Q/2)]^2$$

Если нагрузка Q в рассматриваемой задаче может принимать различные значения, то удобно ввести функцию перераспределения нагрузок $g(x)$, значение которой равно усилию в неразрушенном элементе поврежденной системы, если усилия (равные) в элементах системы в неповрежденном состоянии равны x . Для последующего приложения к модели многомасштабного разрушения удобно также использовать в качестве аргумента ф.р. прочности системы в целом F_{sys} удельную нагрузку, то есть в расчете на один элемент. Тогда последняя формула может быть переписана в виде

$$F_{\text{sys}}(x) = \mathcal{P}_c(x) = 2F_0(x)F_0(g(x)) - [F_0(x)]^2 \quad (2.8)$$

Естественно, функция $g(x)$ должна удовлетворять условию отсутствия разгрузки

$$g(x) \geq x, \quad g'(x) > 0 \quad (2.9)$$

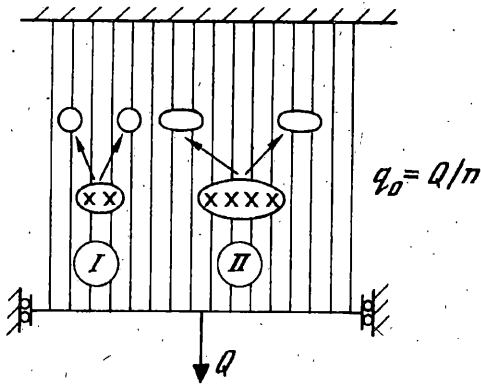
Второе условие добавлено во избежание ситуации, когда вероятность коллапса $\mathcal{P}_c(x)$ может оказаться немонокотонной функцией вследствие "экзотических" свойств функции перераспределения нагрузок.

3. Иерархическая модель разрушения стохастической дискретной среды. В этом разделе будет описана модель, в которой, несмотря на ее достаточно абстрактный характер, находят отражение некоторые характерные черты реальных процессов многомасштабного разрушения. После построения определяющих уравнений рассмотрены возможные варианты асимптотического поведения прочности соответствующей системы.

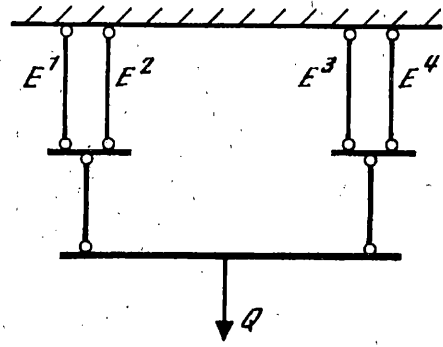
3.1. Общие принципы построения иерархических моделей. Переходим к моделированию многомасштабного разрушения. Описываемая модель является непосредственным развитием модели классического пучка на случай, когда структура МС обладает иерархической, или многоуровневой, структурой. Элементы этой модели также стохастически однородны, а отличие заключается в законе перераспределения нагрузок, который теперь становится масштабно-зависимым.

Чтобы пояснить основные положения модели, воспользуемся одной из базовых схем разрушения волокнистого композита, волокна которого погружены в матрицу (фиг. 3). Наличие матрицы приводит к локализации процесса перераспределения усилий в окрестности разрушенных волокон, когда рост усилий происходит лишь в волокнах, соседних с разрушенным, а не равномерно во всех неразрушенных волокнах, как в модели классического пучка. Соответствующие стохастические модели прочности отличаются критериями "соседства" и законами перераспределения нагрузок; при этом достаточно подробные исследования в асимптотическом пределе (т.е. при $n \rightarrow \infty$) были выполнены (см., например, [12]) для случая, когда вся дополнительная нагрузка распределяется поровну между двумя неразрушенными волокнами, ближайшими к группе разрушенных (зона I на фиг. 3). В то же время интерес представляет исследование случая, когда размеры "зоны возмущения" растут с ростом зоны разрушения (зона II на фиг. 3).

Серьезные технические проблемы, возникающие при аналитическом исследовании соответствующих вероятностных задач, связаны, в первую очередь, с нарушением симметрии конфигурации МС в поврежденном состоянии, что приводит к необхо-



Фиг. 3



Фиг. 4

димости рассмотрения очень сложных комбинаторных задач. Конечно, формула (2.7) по-прежнему дает ответ, но при достаточно больших значениях n этот ответ будет лишь формальным – без "удачной" конкретизации закона перераспределения нагрузок даже качественный анализ величины $\mathcal{P}_c(I_n)$ в зависимости от воздействия Q представляется практически невозможным.

3.2. *Базовая модель иерархической системы (ИС).* В этом пункте представлена модель многомасштабного разрушения, в которой нашли отражение соображения, высказанные выше, и аналитическое исследование которой оказалось успешным. Модель описывается без непосредственных ссылок на стержневые аналоги, поскольку, как представляется, она может найти применение и за пределами классической механики разрушения. Тем не менее можно указать аналогию в виде стержневой модели (фиг. 4), которая хотя и является достаточно искусственной, в то же время соответствует абстрактной модели по свойствам.

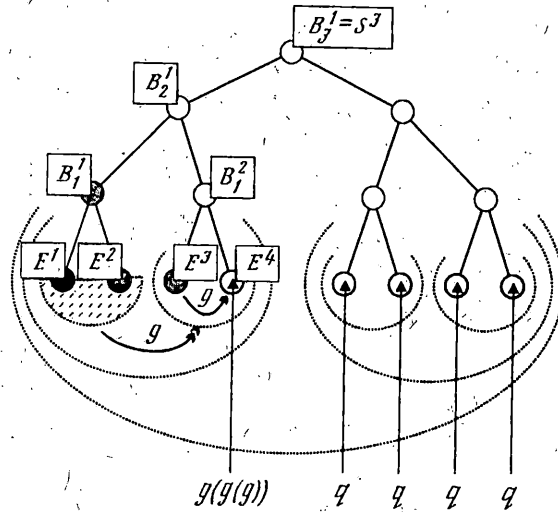
Основные положения рассматриваемой модели, которую далее будем называть моделью коллапса иерархической системы (ИС), таковы:

- структура системы представляет собой бинарное дерево n -го порядка (см. фиг. 5, где изображена структурная схема системы $S^{(3)}$ при глубине иерархий $n = 3$); собственно элементы системы (стохастически одинаковые) E^1, E^2, \dots, E^{2^n} расположены на 0-м иерархическом уровне и структурно объединены попарно в блоки 1-го уровня B_1^j , пары которых в свою очередь объединены в блоки следующего уровня B_2^j и т.д. Блок B_n отвечает системе в целом ($S^{(n)}$);

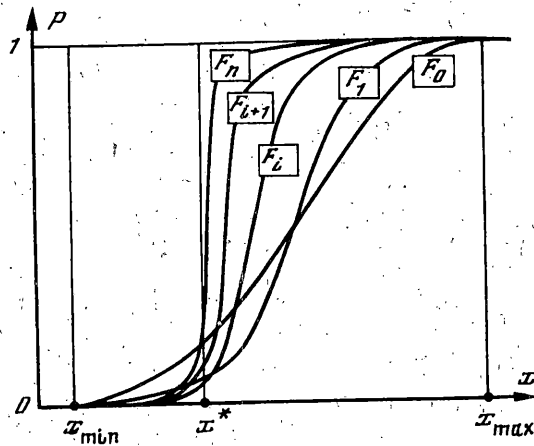
- элементы E^j обладают случайной прочностью R с непрерывным распределением $F_0(x)$, заданным на носителе $[x_{\min}, x_{\max}]$, $x_{\min} \geq 0$, $x_{\max} \leq \infty$ (фиг. 6);

- в исходном состоянии нагрузка на все элементы E^j одинакова (поэтому вероятности их разрушения также одинаковы); пусть соответствующее значение равно q . Разрушение произвольного элемента (например, E^1 на фиг. 5) вызывает изменение нагрузки только в парном элементе E^2 , причем новое ее значение равно $g(q)$. При разрушении элемента E^2 разрушенным считается блок B_1^1 , что приводит к изменению нагрузок в элементах E^3 и E^4 парного блока B_1^2 от значений q к значениям $g(q)$. В случае последующего разрушения элемента E^3 нагрузка в парном элементе E^4 становится равной $g(g(q))$ и т.д.;

- элементы считаются разрушенными, если выполняется критерий перегруженности (2.2) $q_i > r_i$, где q_i – текущая нагрузка на данный элемент, а r_i – реализация случайной величины R .



Фиг. 5



Фиг. 6

Можно показать, что если функция g отвечает условиям (2.9), то ИС является системой без разгрузки, и поэтому для нее справедливы все соответствующие утверждения, сформулированные выше для таких систем. В частности, верна и общая формула (2.7) для расчета вероятности коллапса системы. Однако в данном случае наличие строгой регулярности в структуре ИС позволяет записать определяющие соотношения в другом, эквивалентном, виде, который, как оказывается, допускает эффективное аналитическое исследование.

Действительно, по построению процесс разрушения, развивающийся внутри данного блока, не оказывает никакого воздействия на одноуровневые с ним блоки вплоть до полного его разрушения. Поэтому можно ввести понятие прочности блока и трактовать каждый блок как иерархическую систему, построенную по тем же правилам, что и полная ИС. Следовательно, прочность (в вероятностном понимании) любого блока может быть найдена в рамках двухэлементной модели с функцией нагрузок g . Используя формулу (2.8) на каждом структурном уровне, получаем, что распределе-

ние прочности $F_n(x)$ системы $S^{(n)}$ определяется следующими рекуррентными уравнениями [14]:

$$F_m = \mathcal{L}\{F_{m-1}\} \quad (m = 1, \dots, n) \quad (3.1)$$

где функциональный оператор $\mathcal{L}\{\cdot\}$, осуществляющий последовательное преобразование функций распределения прочностей блоков, определен соотношением

$$F_m(x) = 2F_{m-1}(x)F_{m-1}(g(x)) - [F_{m-1}(x)]^2 \quad (m = 1, \dots, n) \quad (3.2)$$

Здесь $F_m(x)$ – ф.р. прочности блоков B_m^j ($j = 1, \dots, 2^{n-m}$). Если последовательно выразить все величины $F_m(x)$ ($m = 1, \dots, n$) (при разных значениях аргумента x) через значения ф.р. $F_0(x)$, то, конечно, будет получено не что иное, как формула (2.7).

В иерархии вероятностных структурных моделей прочности (см. [2, 15]) модель ИС занимает промежуточное положение между моделями слабейшего звена Вейбулла и пучка Даниелса [11]: она обладает существенной структурной избыточностью в отличие от первой (разрушение одного или нескольких элементов не означает неизбежного разрушения всей системы) и свойством концентрации усилий в отличие от второй.

Замечание 2. Удвоение нагрузки в элементе, парном к разрушенному, на первый взгляд вызывает резкое повышение вероятности разрушения последнего и, вообще говоря, развитие лавинообразного процесса разрушения в силу перегруженности все новых и новых элементов. Такая ситуация действительно может иметь место, если коэффициент вариации прочности (отношение среднеквадратичного отклонения к среднему значению) у элементов системы очень мал. Но в этом случае сама вероятностная постановка становится малоинтересной, поскольку и в рамках детерминистического подхода могут быть получены вполне приемлемые результаты. Отметим далее, что в обобщенных моделях структурный параметр (коэффициент "ветвления") может быть принят произвольным, что резко снижает уровень концентрации нагрузки, да и сам закон перераспределения нагрузок может оказаться другим. Однако и рассматриваемая базовая модель с удвоением нагрузок, помимо преимуществ в чисто методическом плане по сравнению с усложненными моделями, также является содержательной и в смысле нетривиальности ее свойств, так как в действительности разброс прочности элементов структуры различных сред достаточно высок. Например, коэффициент вариации прочности некоторых волокон, применяемых в композитах, превышает 30% [16] – это означает, что значение x_{\min} очень тесно подходит к нулю, и поэтому при умеренных нагрузках на соответствующую систему удвоение (учетверение и т.д.) усилий в элементах совсем еще не означает перехода процесса разрушения в лавинообразную стадию.

Замечание 3. Впервые модель ИС в частном случае $g(x) = 2x$ была предложена в [17], где получила название нагруженного фрактального дерева (определяющие уравнения оказались, правда, неверными и позднее были исправлены в [18]). Использование термина "фрактальное" в данном случае не вполне оправдано, поскольку речь не идет о свойствах геометрической структуры. Некоторым "оправданием" может служить наблюдение, что в асимптотическом пределе $n \rightarrow \infty$ любая ветвь (подсистема) дерева тождественна дереву в целом – принято считать, что свойство самоподобия является одной из "визитных карточек" фрактальных объектов.

3.3. Обобщенные модели. Базовая модель ИС, описанная в предыдущем разделе, допускает различные обобщения и усовершенствования. Приведем наиболее характерные примеры.

(1). Модель ИС с произвольным коэффициентом ветвления k , $k \geq 2$. Если правило равномерного перераспределения нагрузок действует на всех структурных уровнях, то каждый блок представляет собой "пучок" блоков предыдущего структурного уровня и его прочность поэтому определяется по формуле (2.5). Вероятность коллапса в этой модели может быть вычислена с помощью следующих рекуррентных

соотношений [19]:

$$F_m(x) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} C_k^i \lambda^{(k-i)} \left(\frac{k}{k-i} x \right) [F_{m-1}(x)]^i \quad (m=1, \dots, n)$$

$$\lambda^{(j)}(u) = \sum_{i=1}^j (-1)^{i+1} C_j^i \lambda^{(j-i)} \left(\frac{j}{j-i} u \right) [F_{m-1}(u)]^i \quad (j=1, \dots, k-1)$$

$$\lambda^{(0)}(\cdot) \equiv 1$$

(2). Модель ИС с двумя критериями разрушения. В базовой модели ИС (бинарное дерево) критерий разрушения условно может быть назван критерием вязкого типа, поскольку коллапс системы и разрушение каждого блока происходит только вследствие последовательного разрушения всех элементов системы или, соответственно, блока. Дополнение модели вторым, независимым от первого, критерием разрушения хрупкого типа, соотношенного непосредственно с самим блоком, значительно обогащает свойства модели. Такие модели численно и аналитически исследовались в работах [14, 20, 21]. Определяющие уравнения для этого случая можно записать, например, в форме

$$F_0(x) = f_0(x)$$

$$P_m(x) = 2F_{m-1}(x)F_{m-1}(g_m(x)) - [F_{m-1}(x)]^2$$

$$F_m(x) = P_m(x) + f_m(x) - P_m(x)f_m(x) \quad (m=1, \dots, n)$$

где $f_m(x)$ ($m=0, \dots, n$) – вероятности спонтанного разрушения блоков B_m^j (см. фиг. 5) при текущей удельной нагрузке на блок x . Подчеркнем, что событие спонтанного разрушения блока является независимым (в вероятностном смысле) от событий разрушения или неразрушенных элементов, образующих данный блок.

(3). Модели с нарушением "внутренней симметрии". Можно рассматривать модели, элементы которых принадлежат к различным выборкам с точки зрения их стохастической прочности. Это приводит к появлению в расчетных формулах первого уровня (определяющих вероятности разрушения блоков B_i^j через вероятности разрушения элементов E^i) различных ф.р. $F_0^{(i)}$. Далее, функция перераспределения нагрузок может быть различной на разных структурных уровнях, и тогда в определяющих соотношениях вместо одной функции g будет представлено целое семейство $\{g_i, i=1, \dots, n\}$ таких функций (некоторые примеры рассмотрены в [21–23]).

Указанные видоизменения, естественно, приводят к усложнению моделей, и их анализ становится еще более трудным. С другой стороны, в усовершенствованных моделях могут быть обнаружены принципиально новые свойства.

(4). Гипотеза стохастической независимости прочностей элементов ИС во многих случаях может быть принята лишь в качестве первого приближения. Интерес представляет, например, постановка задачи, в которой зависимыми являются прочности лишь соседних элементов. Например, при пространственной дискретизации сплошной среды, вообще говоря, имеется корреляция прочностных (и многих других) характеристик, степень которой тем выше, чем ближе расположены элементы. Исследование таких моделей в рамках аналитических подходов существенно сложнее, и в настоящее время может выполняться, видимо, лишь численно. Однако, как будет показано ниже, при достаточно большом числе структурных уровней асимптотическая прочность ИС обладает некоторой универсальностью вне зависимости от исходного распределения прочностей.

3.4. Асимптотические свойства базовой модели. Численные исследования различных моделей ИС [18, 20–24] хотя и привели к обнаружению некоторых (иногда – весьма интересных) закономерностей как в диапазоне умеренных значений параметра

n – глубины иерархии ИС, так и при достаточно больших его значениях, тем не менее не могут служить математическим доказательством в ситуации, когда истина лежит "на бесконечности". Оставшаяся часть статьи будет посвящена применению аналитических, во многом нетрадиционных подходов к изучению прочности базовой модели (п. 3.2) в асимптотическом пределе.

В рекуррентной форме (3.2) расчетные формулы для вероятности коллапса ИС выглядят не столь грозно по сравнению с формулой (2.7), однако качественный анализ свойств ф.р. $F_n(x)$ оказывается непростой задачей даже в описанной схеме бинарного дерева.

Говорят, что стохастическая МС имеет асимптотический порог прочности x^* , если ф.р. прочности F_n ведет себя следующим образом: при $n \rightarrow \infty F_n(x) \rightarrow 1$ для всех $x > x^*$ и $F_n(x) \rightarrow 0$ для всех $x < x^*$, или, иными словами, когда $F_n(x) \rightarrow H(x^*)$, где $H(x^*)$ – функция Хевисайда (см. фиг. 6). Если выполняется условие $x_{\min} < x^* < x_{\max}$, то будем называть порог нетривиальным – в отличие от случаев, когда $x^* = x_{\min}$ или $x^* = x_{\max}$. Если в системе формируется порог прочности, то при достаточно большом размере системы вероятность ее коллапса очень мала при нагрузках меньших критического значения x^* и, напротив, близка к 1 при нагрузках, превышающих это критическое значение. Причем перестройка свойств системы происходит скачком – характерный размер интервала нагрузок, в котором вероятность коллапса возрастает, скажем, от значения 0,001 до 0,999, очень быстро уменьшается с ростом n .

Нетривиальный порог прочности реализуется, например, в модели классического пучка [11]; при этом пороговое значение находится аналитически

$$x^* = x'[1 - F_0(x')], \quad 1 - F_0(x') - x' \frac{dF_0(x')}{dx} = 0$$

где F_0 – ф.р. прочности отдельного волокна. Существенно также, что от исходного распределения прочности F_0 зависит лишь численное значение порога, но не сам факт его формирования.

Непосредственная проверка показывает, что для базовой модели ИС функция Хевисайда $H(x^*)$ удовлетворяет соотношениям (3.2) при произвольном значении x^* . Однако вопрос, существуют ли невырожденные начальные распределения F_0 , которые рекуррентными соотношениями (3.1), (3.2) переводятся асимптотически в ступенчатую функцию, в строгой постановке не исследован. Более того, имеются основания считать (хотя это пока строго не доказано), что ступенчатые ф.р. $H(x^*)$ неустойчивы в смысле итераций (3.2).

В то же время применительно к модели ИС обнаружено явление, которое может быть охарактеризовано как формирование квазипорога прочности [18, 20]. Картина выглядит следующим образом: при достаточно больших n ф.р. F_n становится похожей на ступенчатую функцию $H(x_n^*)$, но при этом $x_n^* \rightarrow x_{\min}$ при $n \rightarrow \infty$ – порог дрейфует в сторону уменьшения вплоть до левой границы носителя исходного распределения.

Можно доказать, что квазипорог реализуется в базовой модели ИС в случае, когда (а) исходное прочностное распределение F_0 имеет конечный носитель, т.е. $x_{\max} < \infty$, и (б) функция нагрузки обладает следующим свойством:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \underbrace{g(g \dots (g(x)) \dots)}_i > x_{\max} \quad \forall x \in [x_{\min}, x_{\max}] \quad (3.3)$$

(доказательство не элементарно и в основной части следует рассуждениям, приведенным в [14] для случая $g(x) = 2x$). Аналогичное утверждение справедливо и для общей модели ИС с произвольным коэффициентом ветвления $k > 2$ при выполнении условия (а), если ограничиться случаем равномерного перераспределения нагрузок [19]. Выявление условий возникновения квазипорога в случае бесконечного носителя ($x_{\max} = \infty$) требует еще более сложного анализа, поскольку необходимым становится учет поведения "хвоста" распределения F_0 на бесконечности.

Еще одним вариантом асимптотического поведения ф.р. прочности ИС может быть асимптотическое стремление к некоторому невырожденному предельному распределению $F^{(s)}$

$$F_n(x) \rightarrow F^{(s)}(x) \quad \forall x \in [x_{\min}, x_{\max}]$$

При этом распределение $F^{(s)}$ должно являться неподвижной точкой функционального преобразования (3.1):

$$F^{(s)} = \mathcal{L}\{F^{(s)}\} \quad (3.4)$$

и быть устойчивым (в каком смысле, будет пояснено ниже).

4. Масштабно-инвариантные распределения прочности. В [18] была высказана гипотеза об универсальном характере явления возникновения квазипорога в системах с регулярной иерархической структурой. Как показывают приведенные выше примеры, частично эта гипотеза подтвердилась. Однако выяснилось, что в общем случае это не так – обобщенные модели многомасштабного разрушения намного богаче и даже в случае простейшей бинарной структуры могут порождать нетривиальные устойчивые предельные распределения, отличные от ступенчатых.

В этом разделе демонстрируется общий алгоритм отыскания нетривиальных решений функционального уравнения (3.4) для базовой модели ИС. Если такое решение существует, то одна и та же ф.р. $F^{(s)}$ описывает прочность блоков, относящихся к разным структурным уровням системы. Поскольку каждому уровню в структуре ИС в некотором смысле соответствует своя "степень разрешения", с которой анализируется задача прочности, или, как говорят, масштаб рассмотрения, то указанное решение может быть охарактеризовано как масштабно-инвариантное распределение прочности (для краткости, просто МИ-распределение). Ниже приведены примеры найденных МИ-распределений, в некотором приближении доказана их устойчивость по Ляпунову.

4.1. Алгоритм нахождения МИ-распределений. Из (3.4) с учетом того, что оператор $\mathcal{L}\{\cdot\}$ задается соотношениями (3.1), (3.2), находим следующее условие, которому должна удовлетворять функция $F^{(s)}$:

$$1 = 2F^{(s)}(g(x)) - F^{(s)}(x), \quad x \in [x_{\min}, x_{\max}] \quad (4.1)$$

Пусть $\varphi(i, x)$ есть результат i -кратного применения функции нагрузок g к значению x :

$$\varphi(i, x) = g^{(i)}(x) \equiv \underbrace{g \circ \dots \circ g}_i(x) \quad (i = 0, 1, \dots), \quad \varphi(0, x) \equiv x \quad (4.2)$$

Тогда из (4.1) следует, что

$$F^{(s)}(\varphi(i, x)) = 1 - 2^{-i}(1 - F^{(s)}(x)) \quad (4.3)$$

при $i = 0, 1, \dots$ и $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$.

Предположим теперь, что соотношение (4.3) выполняется не только при целых значениях i , но и при любых действительных, то есть что при всех x имеет место тождество

$$F^{(s)}(\varphi(\lambda, x)) = 1 - 2^{-\lambda}(1 - F^{(s)}(x)) \quad (\lambda \in \mathbb{R}_1^+)$$

Дифференцируя его по λ и полагая $\lambda = 0$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $F^{(s)}$ с независимой переменной x :

$$\frac{dF^{(s)}(x)}{dx} \frac{\partial \varphi(0, x)}{\partial \lambda} = \ln 2 [1 - F^{(s)}(x)]$$

Это уравнение легко решается (принимая во внимание условие $F^{(s)}(x_{\min}) = 0$):

$$F^{(s)}(x) = 1 - \exp\left(-\int_{x_{\min}}^x \frac{\ln 2}{\phi'_\lambda(0, x)} dx\right) \quad (4.4)$$

Если удастся вычислить в явном виде производную $(\partial\phi(\lambda, x)/\partial\lambda)$ при $\lambda = 0$, то подбирая значения x_{\min} и x_{\max} так, чтобы выполнялись условия (2.9) и $F^{(s)}(x_{\max}) = 1$; вообще говоря, находим искомое МИ-распределение.

4.2. *Примеры.* Описанный алгоритм приводит к цели, например, для следующих функций $g(x)$, задающих перераспределение нагрузок: $a + bx$; x^a (при очевидных ограничениях на параметры). Приведем несколько примеров:

$$g(x) = x + a, \quad a > 0$$

$$F^{(s)}(x) = 1 - e^{-\gamma(x-x_{\min})}, \quad x_{\min} \geq 0, \quad x_{\max} = \infty \quad (\gamma = \ln 2 / a) \quad (4.5)$$

$$g(x) = ax, \quad a > 1$$

$$F^{(s)}(x) = 1 - (x_{\min} / x)^\gamma, \quad x_{\min} > 0, \quad x_{\max} = \infty \quad (\gamma = \ln 2 / \ln a) \quad (4.6)$$

$$g(x) = a + bx, \quad a > 0, \quad 0 < b < 1$$

$$F^{(s)}(x) = 1 - \left(\frac{x_{\max} - x}{x_{\max} - x_{\min}}\right)^\gamma, \quad x_{\min} \geq 0, \quad x_{\max} = \frac{a}{1-b} \quad \left(\gamma = -\frac{\ln 2}{\ln b}\right) \quad (4.7)$$

$$g(x) = x^a, \quad 0 < a < 1$$

$$F^{(s)}(x) = 1 - \left(\frac{\ln x}{\ln x_{\min}}\right)^\gamma, \quad x_{\min} > 0, \quad x_{\max} = 1 \quad \left(\gamma = \frac{\ln 2}{\ln(1/a)}\right) \quad (4.8)$$

$$g(x) = x^a, \quad a > 1$$

$$F^{(s)}(x) = 1 - \left(\frac{\ln x_{\min}}{\ln x}\right)^\gamma, \quad x_{\min} > 1, \quad x_{\max} = \infty \quad \left(\gamma = \frac{\ln 2}{\ln a}\right) \quad (4.9)$$

Все функции нагрузок g , для которых найдены МИ-распределения (4.5)–(4.9), удовлетворяют условию отсутствия разгрузки (2.9). Интересно отметить, что среди приведенных примеров есть распределения, которые широко применяются в различных приложениях теории вероятностей и статистики: это показательное распределение (4.5), используемое, например, для описания во времени вероятностей отказов технических систем, и так называемое распределение Парето (4.6), используемое в финансово-экономических моделях для описания потерь [25].

4.3. *Проблема устойчивости МИ-распределений и метод ренормгруппы.* Как уже указывалось выше, очень важным является вопрос об устойчивости МИ-распределений. Строгое исследование устойчивости распределений (4.4) как неподвижных точек итераций (3.4) представляется достаточно трудной задачей. Ниже, пользуясь естественным групповым свойством рекурсии (3.4), с помощью метода ренормализационной группы (РГ) построим некоторую вспомогательную бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, особые точки которой порождаются функциями $F^{(s)}$, и выполним анализ устойчивости этих точек.

Замечание 4. Метод РГ (см., например, [26, 27]), первоначально разработанный в квантовой теории поля, затем был эффективно применен в теории критических явлений [28] и других моделях многомасштабных систем, в т.ч., в задачах турбулентности, перколяции, физики полимеров [29, 30]. Схожесть математического аппарата,

используемого в этих моделях, привела к выработке понятия преобразований функциональной автомодельности, не привязанного к конкретному физическому содержанию задач [31, 32]. Тем самым потенциальные возможности и области приложения для ренормгруппового подхода были существенно расширены, что, в частности, подтверждается и его использованием в рассматриваемой задаче из вероятностной механики разрушения.

(1). Прежде всего заметим, что в силу (3.2) значение функции F_n в произвольной точке x_0 однозначно определяется значениями функции F_0 в первых $(n + 1)$ -ой точках

$$x_i = \varphi(i, x_0) \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (4.10)$$

где $\varphi(i, x)$ определена в (4.2). Ниже x_0 считается фиксированным параметром и в последующих выкладках опущен. Введем далее специальные обозначения для значений функции F_m в точках (4.10):

$$h_i^{(m)} = F_m(x_i), \quad h^{(m)} = \{h_i^{(m)}\}_{i=0}^{\infty} \quad (m = 0, 1, \dots)$$

где $h^{(m)}$ – бесконечномерный вектор. В этих обозначениях уравнения (3.2) переписываются в виде

$$h_i^{(m)} = 2h_i^{(m-1)}h_{i+1}^{(m-1)} - (h_i^{(m-1)})^2$$

или в векторной форме

$$h^{(m)} = \mathcal{M}\{h^{(m-1)}\}$$

где \mathcal{M} – соответствующий (бесконечномерный) функциональный оператор. С учетом рекуррентного характера последнего соотношения теперь очевидным образом можно ввести оператор $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_i\}$:

$$h^{(m)} = \mathcal{G}\{m, h^{(0)}\}$$

Как нетрудно проверить, оператор \mathcal{G} обладает естественным групповым свойством

$$\mathcal{G}\{l + m, h^{(0)}\} = \mathcal{G}\{m, \mathcal{G}\{l, h^{(0)}\}\} \quad (\forall l, m \in \mathbb{N}), \quad \mathcal{G}\{0, h^{(0)}\} = h^{(0)} \quad (4.11)$$

Это соотношение отражает групповой закон композиции преобразования (3.1) и является функциональным уравнением дискретной РГ.

(2). Предположим, что групповое свойство справедливо не только при целых значениях аргументов l и m , но и при всех неотрицательных действительных значениях. Тогда, по аналогии с конечномерным случаем, из общей теории [26] следует, что функциональное уравнение (4.11) эквивалентно следующему дифференциальному уравнению Ли

$$\frac{\partial \mathcal{G}\{\lambda, h^{(0)}\}}{\partial \lambda} = \beta(\mathcal{G}), \quad \beta(h^{(0)}) = \left. \frac{\partial \mathcal{G}\{\lambda, h^{(0)}\}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \quad (\lambda \in \mathbb{R}_1^+) \quad (4.12)$$

РГ-функция β не известна. Однако можно воспользоваться некоторым ее приближением, используя разностные выражения для оценки первой производной (по λ) функции \mathcal{G} . Заметим, что такой подход очень близок к методу ренормгруппы в квантовой теории поля [26], где он был эффективно применен для улучшения результатов теории возмущений.

Ограничимся простейшим вариантом – разностной формулой первого порядка. В этом случае компоненты векторной функции β имеют следующий вид:

$$\beta_i(h^{(0)}) \approx (\mathcal{G}_i\{1, h^{(0)}\} - \mathcal{G}_i\{0, h^{(0)}\})/1 = 2h_i^{(0)}h_{i+1}^{(0)} - (h_i^{(0)})^2 - h_i^{(0)}$$

Подставляя эти соотношения в правую часть уравнения (4.12), получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, приближенно описывающих

"динамику" значений распределений прочности рассматриваемой многоуровневой системы в фиксированных точках x_i при увеличении глубины иерархии, т.е. при возрастании аргумента λ (напомним, что $\mathcal{G}_i\{\lambda, h^{(0)}\} = F_\lambda(x_i)$ при целых значениях λ):

$$\frac{d\mathcal{G}_i(\lambda)}{d\lambda} = \mathcal{G}_i(\lambda)[2\mathcal{G}_{i+1}(\lambda) - 1] - [\mathcal{G}_i(\lambda)]^2, \quad \mathcal{G}_i(0) = h_i^{(0)} \quad (4.13)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}_1^+ \quad (i = 0, 1, \dots)$$

(3). Конечно, функциональные уравнения (3.2) не тождественны дифференциальным уравнениям (4.13), и исследование вопроса о близости их решений составляет предмет отдельного исследования. Некоторыми аргументами в поддержку такой гипотезы могут служить следующие наблюдения. Непосредственно видно, что "стационарные" распределения $F^{(s)}$ (в частности, (4.5)–(4.9)) порождают неподвижные точки $\mathcal{G}^{(s)}$ полученной вспомогательной системы (4.13), если положить $\mathcal{G}_i^{(s)} = F^{(s)}(x_i)$.

Кроме того, замечая, что каждое уравнение цепочки (4.13) записано фактически в виде интегрируемого в квадратурах уравнения Риккати, можно, например, показать, что если найдется такое $i = i^*$, что при всех $i \geq i^*$:

$$0 < \mathcal{G}_i(\lambda) < 1 \quad \text{при } \lambda \geq 0 \quad (4.14)$$

то это свойство справедливо и для $i = i^* - 1$.

Отсюда следует, что если при $\lambda = 0$ вектор $\mathcal{G}(0)$ отвечает некоторому вероятностному распределению, то при условии (4.14) свойства порождаемых уравнениями (4.13) решений не вступают в противоречие с характерными свойствами вероятностных распределений.

4.4. Устойчивость неподвижных точек определяющей системы дифференциальных уравнений. Помещая неподвижную точку системы (4.13) в начало координат заменой переменных $y(\lambda) = \mathcal{G}(\lambda) - \mathcal{G}^{(s)}$, приводим систему к виду

$$dy_i / d\lambda = \mathcal{G}_i^{(s)}(2y_{i+1} - y_i) + y_i(2y_{i+1} - y_i)$$

Матрица оператора линейной части имеет треугольный вид. Собственные значения α легко определяются и при этом оказываются отрицательными: $\alpha_i = -\mathcal{G}_i^{(s)} < 0$ ($i = 1, 2, \dots$). При некоторых дополнительных условиях (можно проверить, что в данном случае они выполняются), из теоремы об устойчивости по первому приближению решений бесконечной системы дифференциальных уравнений [33] следует, что стационарные решения $\mathcal{G}^{(s)}$ системы (4.13) асимптотически устойчивы, если точка $\mathcal{G}(0)$ достаточно близка к $\mathcal{G}^{(s)}$ (строгая трактовка последнего условия требует введения некоторой нормы в соответствующем бесконечномерном пространстве) и кроме того, имеет место экспоненциальная сходимость решений $\mathcal{G}(\lambda)$ к $\mathcal{G}^{(s)}$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Приведенные выше рассуждения дают основания предположить также устойчивость и распределений $F^{(s)}$ как неподвижных точек итераций (3.2).

5. Родственные модели. В этом разделе указывается на взаимосвязь рассмотренных иерархических моделей разрушения с моделями теории надежности, теории перколяции, а также указываются возможные области приложения помимо собственно механики разрушения.

5.1. Структурные модели разрушения как объект теории надежности. Вероятностные структурные модели тесно связаны с задачами, решаемыми в рамках теории надежности статически неопределимых строительных конструкций и сложных технических систем. Эффекты перераспределения нагрузок во всех этих моделях не могут быть учтены с помощью традиционных методов математической теории надежности и требуют иных подходов (см., например, [7, 10, 34–36]).

Основная трудность, возникающая при попытке определения прочности МС с избыточными связями, заключается в том, что вследствие перераспределения нагрузок отказы элементов не являются независимыми событиями. По этой причине формализация критерия прочности МС, т.е. его выражение через критерии прочности отдельных элементов, наталкивается на значительные сложности.

В теории надежности конструкций и сооружений решенной может считаться задача для случая, когда диаграммы деформирования элементов описываются с помощью упругоидеальнопластической модели (соответствующие ссылки можно найти в обзоре [35]). Что касается конструкций с "хрупкими" элементами (которые после достижения критического состояния полностью теряют несущую способность), то эта задача исследована со значительно меньшей полнотой. Хотя для её решения и предложен достаточно общий метод, основанный на применении теории графов (см., например, [34]), он, с одной стороны, не охватывает всех особенностей поведения систем общего вида (в частности, явления разгрузки), а с другой стороны, не предоставляет возможности получить решение в замкнутом виде, что затрудняет его практическое использование. Перспективным представляется подход, основанный на поиске верхней и нижней оценок вероятности коллапса многоэлементной системы (в качестве примера можно указать работу [37], где были получены некоторые общие оценки, правда, без учета возможности явления разгрузки).

5.2. Замечание о моделях разрушения перколяционного типа. Особым типом вероятностных моделей разрушения МС являются модели, заимствующие математический аппарат из теории перколяции [30]. В одноуровневой модели [38, 39] разрушение системы, состоящей из большого числа статистически однородных элементов, соотносится с формированием некоторого связного множества из разрушенных элементов, "пронизывающего" всю систему. При этом вероятность разрушения всех элементов одинакова и равна p_0 , $0 < p_0 < 1$.

Были предложены также модели многоуровневой перколяции [40–42] в которых среда моделируется иерархической системой блоков; вероятность разрушения (p_m) каждого из которых вычисляется по той или иной схеме перколяции на множестве блоков предыдущего структурного уровня. Определяющее соотношение имеет вид

$$p_m = \Pi(p_{m-1}) \quad (m = n, n-1, \dots, 1) \quad (5.1)$$

где $\Pi(x)$ – некоторый полином (обычно степени от 2 до 4), а n – глубина иерархии.

В обоих вариантах вероятности разрушения элементов постоянны и соответствующие акты разрушения считаются независимыми событиями. Уравнения (5.1) являются очевидным аналогом уравнений (3.1), но, естественно, проще, поскольку не учитывают эффект перераспределения нагрузок. Интересно отметить, что они также допускают теоретический порог прочности, но он оказывается неустойчивым. В [43] на конкретном примере продемонстрированы недостатки моделей разрушения перколяционного типа. Представляется, что такие схемы в большей степени подходят для моделирования процессов накопления повреждений в ранних стадиях.

5.3. Возможные области приложения. Область приложения моделей ИС не ограничена только собственно механикой разрушения: они находят применение при моделировании процессов с различным физическим содержанием, происходящих в той или иной стохастической дискретной среде, элементы которой могут находиться в одном из двух (в простейшем случае) состояний, условно, s_1 – "не разрушен" и s_2 – "разрушен". В частности, модели ИС используются:

(а) для описания сейсмической активности в блоковой среде [17, 24, 42, 44], где переход $s_1 \rightarrow s_2$ сопоставляется со сдвигом блоков относительно друг друга. Предполагается, что в геотектонической блоковой среде непрерывно идет процесс накопления потенциальной энергии, сопровождаемый ростом касательных напряжений (в соответствующем масштабе). Микроземлетрясения при этом соответствуют единичные акты сдвигов блоков относительно малого масштаба, не приводящие к

существенной "догрузке" других блоков. Сильному же землетрясению отвечает случай коллапса рассмотренной модели ИС, когда сдвиг одного или нескольких "мелких" блоков вызывает сдвиг соседних и т.д., что порождает каскадный процесс актов сдвига на все возрастающих масштабных уровнях;

(b) при моделировании пожаров [21–23, 45] (s_1 – "не горит", s_2 – "горит"). Предполагается, что горящие элементы (деревья в природном пожаре и различные объекты в техногенном пожаре) оказывают соответствующее воздействие на соседние негорящие и могут, с некоторой вероятностью, вызвать их возгорание. При возгорании группы элементов (блоков более высокого уровня иерархии по терминологии описанной модели ИС) размеры зоны поражения растут. В рамках этих моделей могут рассчитываться не только вероятности возникновения глобального пожара и вероятности его локализации на каком-то масштабном уровне, но также и такие характеристики, как, например, средняя площадь пожара или ожидаемый ущерб. Специфический характер нагрузки при горении предоставляет интересную возможность введения в модель ИС "защиты", снижающей интенсивность воздействия. В [21–23] рассмотрены задачи об оптимальном размещении защитных ресурсов по структурным уровням ИС и в модельных ситуациях найдены нетривиальные схемы;

(c) в задачах оптимального проектирования структур из однонаправленных волокон [18, 46]. В частности, утверждается [46], что если количество волокон фиксировано, то иерархическая структура в некоторых модельных ситуациях позволяет повысить прочность пучка по сравнению с классическим пучком, в котором нагрузка перераспределяется равномерно.

6. Заключение. В работе изложены основные положения вероятностной модели многомасштабного разрушения дискретной среды, когда процесс разрушения имеет иерархический характер. Отличительной чертой описанной многоуровневой модели ИС (иерархическая система) является локализованный характер перераспределения нагрузок в системе при разрушении отдельных элементов, причем размеры зоны "возмущения" растут при переходе процесса разрушения с одного структурного уровня на другой. Так же как и одноуровневые модели "наислабейшего звена" Вейбулла и "статистического пучка" Даниелса, иерархическая модель может служить некоторым приближением для описания деформирования и разрушения реальных материалов со случайной микроструктурой.

Несмотря на жестко заданную структуру, модели регулярных ИС потенциально весьма разнообразны в силу произвольности свойств функции перераспределения нагрузок и значения коэффициента "ветвления". Это позволяет надеяться на возможное применение модели ИС при изучении иерархических процессов разрушения в различных физических системах.

Установленный факт существования в иерархической модели устойчивых МИ- (масштабно-инвариантных) распределений прочности допускает следующую интерпретацию: при достаточно большой глубине иерархии n система "забывает" о конкретном характере прочности своих элементов, находящихся на низшем уровне иерархии, и генерирует некоторое универсальное асимптотическое распределение прочности, определяемое лишь законом перераспределения нагрузок (подобные явления иногда называют самоорганизацией). Большой интерес представляет исследование вопроса об определении области притяжения МИ-распределений – по всей видимости, если распределение прочности элементов достаточно далеко "отстоит" от соответствующего МИ-распределения, то в асимптотическом пределе в системе реализуется явление квазипорога прочности.

Можно ожидать, что в усложненных моделях семейство МИ-распределений значительно более обширно, чем в рассмотренной в статье модели со структурой бинарного дерева. При этом необходимо иметь в виду, что возможность выразить соответствующую функцию распределения в аналитической форме является скорее исключением, чем правилом.

Возможными направлениями развития описанной модели, наряду с усложнениями ее "структуры", являются ее применение к задачам усталостной прочности и рассмотрение случайной нагрузки. Первая из задач требует моделирования многоступенчатого нагружения, так как при разрушении элементов нагрузки (средние в цикле) в соседних элементах, вообще говоря, повышаются.

Относительно второй из указанных задач можно отметить, что если нагрузка является случайной величиной, то в модели с исключенным временем это не привносит особых дополнительных трудностей, поскольку решение тогда получается интегрированием вероятности коллапса при заданной нагрузке по плотности ее распределения. Рассмотрение же нагрузки, заданной случайным (во времени) процессом, существенно усложняет модель, но ее исследование в части, касающейся анализа изменения конфигурации соответствующей системы вследствие развивающегося процесса разрушения может опираться на приведенные в настоящей статье подходы и решения для случая детерминированной нагрузки.

Автор признателен Р.В. Гольдштейну за проявленное внимание к работе.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 96-15-96251).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Болотин В.В. Задачи теории надежности в механике деформируемых твердых тел // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. С. 63–77.
- [2] Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.
- [3] Yao J.T.P., Kozin F., Wen Y.-K., Yang J.-N., Schueller G.I., Ditlevsen O. Stochastic fatigue, fracture and damage analysis // Struct. Safety. 1986. V. 3. No. 3–4. P. 231–267.
- [4] Винклер Т., Михель Б., Скурт Л. Методы вероятностной механики разрушения // Успехи механики. 1990. Т. 13. Вып. 3/4. С. 3–20.
- [5] Гольдштейн Р.В. О структурно-континуальном подходе в механике катастрофического разрушения сложных технических систем // Докл. РАН. 1993. Т. 330. № 1. С. 45–47.
- [6] Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. Некоторые модели формирования иерархических структур при разрушении // МТТ. 1999. № 5. С. 49–71.
- [7] Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1982. 351 с.
- [8] Болотин В.В. Механика зарождения и роста усталостных трещин // МТТ. 1999. № 5. С. 4–16.
- [9] Доможиров Л.И., Махутов Н.А. Иерархия трещин в механике циклического разрушения // МТТ. 1999. № 5. С. 17–26.
- [10] Онищенко Д.А. Некоторые принципы построения и анализа квазистатических моделей вероятностной механики разрушения дискретных систем. Препринт № 572. М.: Ин-т проблем механики РАН, 1996. 31 с.
- [11] Daniels H.E. The statistical theory of strengths of bundles of threads // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1945. V. 183. No. 995. P. 405–435.
- [12] Phoenix S.L., Smith R.L. A comparison of probabilistic techniques for the strength of fibrous materials under local load-sharing among fibers // Intern. J. Solids Structures. 1983. V. 19. No. 6. P. 479–496.
- [13] Онищенко Д.А. Отказоустойчивые строительные конструкции, их анализ и методы исследования // Материалы научн. семинара "Надежность, живучесть и безопасность технических систем", Санкт-Петербург, 1992. СПб.: О-во "Знание", 1992. С. 102–107.
- [14] Onishchenko D.A., Borodich F.M., Gomati J. Mathematical background for modelling of the collapse of probabilistic hierarchical structures (fractal trees) with several criteria of failure // Techn. Report TR/MAT/DAO-FMB-JG/97-94. Glasgow: Glasgow Caledonian Univ. 1997. 16 p.
- [15] Freudenthal A.M. Statistical approach to brittle fracture // Fracture / Ed. H. Liebowitz. N.-Y.: Acad. Press, 1968. V. 2. – Фрейденталь А.М. Статистический подход к хрупкому разрушению // Разрушение / Под ред. Г. Либовица. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 616–645.

- [16] Ермоленко А.Ф., Кульков А.А., Мануйлов В.Ф. Волокнистые армирующие элементы // Композиционные материалы / Под ред. В.В. Васильева и Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. С. 14–37.
- [17] Smalley R.F., Jr., Turcotte D.L., Solla S.R. A renormalization group approach to the stick-slip behavior of faults // J. Geophys. Res. 1985. V. 90. No. B2. P. 1894–1990.
- [18] Newman W.I., Gabrielov A.M. Failure of hierarchical distributions of fibre bundles. I // Intern. J. Fracture. 1991. V. 50. No. 1. P. 1–14.
- [19] Onishchenko D.A. Asymptotic properties of fractal tree models for developing processes // ZAMM. 1996. V. 76. Suppl. No. 3. S. 523–524.
- [20] Gómez J.B., Pacheco A.F., Seguí-Santónja A.J. Instability of loaded fractal trees // Trans. ASME: J. Appl. Mech. 1993. V. 60. No. 4. P. 959–961.
- [21] Goldstein R.V., Onishchenko D.A. Reliability modelling for hierarchical systems incorporating failure criteria of different scales // Proc. 17th Intern. Conf. on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE'98), 1988. Lisboa, Portugal: ASME, 1998. 7 p.
- [22] Гольдштейн Р.В., Онищенко Д.А. Принцип избирательности масштабов защиты иерархических технических систем для предотвращения их катастрофического разрушения // Докл. РАН. 1996. Т. 346. № 2. С. 185–187.
- [23] Goldstein R.V., Onishchenko D.A. Risk evaluation for hierarchical technical systems in the presence of multilevel protection // Proc. Symp. / Workshop "Risk and Economic Evaluation of Failure and Malfunction of Systems: Cost and Insurance Assessment of Failures", Lisbon, Portugal, 1995. V. 1. Lisbon. P. 59–68.
- [24] Newman W.I., Turcotte D.L., Gabrielov A.M. Log-periodic behavior of a hierarchical failure model with applications to precursory seismic activation // Phys. Rev. E. 1995. V. 52. No. 5–A. P. 4827–4835.
- [25] Справочник по теории вероятностей и математической статистике / Под ред. В.С. Королюка. Киев: Наук. думка, 1978. 582 с.
- [26] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984. 597 с.
- [27] Stanley H.E. Scaling, universality, and renormalization: Three pillars of modern critical phenomena // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71. No. 2. P. 358–366.
- [28] Ma S.-K. Modern Theory of Critical Phenomena. London: Benjamin, 1976. – Ма III. Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980. 298 с.
- [29] Теодорович Э.В. Применение метода ренормализационной группы для описания турбулентности (обзор) // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29. № 2. С. 149–163.
- [30] Bunde A., Havlin S. Percolation I // Fractals and Disordered Systems / Eds A. Bunde and S. Havlin. Berlin et al.: Springer, 1996. P. 59–113.
- [31] Ширков Д.В. Ренормализационная группа, принцип инвариантности и функциональная автомодельность // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 1. С. 64–67.
- [32] Shirkov D.V. Renormalization group symmetry and Sophus Lie group analysis. Preprint N E2-95-186. Dubna: Joint Inst. Nucl. Res. 1995. 12 p.
- [33] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
- [34] Bennett R.M., Ang A.H.-S. Formulations of structural system reliability // J. Eng. Mech. 1986. V. 112. No. 11. P. 1135–1151.
- [35] Ditlevsen O., Vjerager P. Methods of structural systems reliability // Struct. Safety. 1986. V. 3. No. 3–4. P. 195–229.
- [36] Чепурин Е.В. Статистические методы в теории надежности // Обзорение прикладной и промышленной математики. 1994. Т. 1. Вып. 2. С. 279–330.
- [37] Ditlevsen O. Narrow reliability bounds for structural systems // J. Struct. Mech. 1979. V. 7. No. 4. P. 453–472.
- [38] Челидзе Т.Л., Колесников Ю.М. Моделирование и прогноз процесса разрушения в рамках теории протекания // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1983. № 5. С. 24–34.
- [39] Челидзе Т.Л. Теория перколяции и критерии разрушения // Успехи механики. 1985. Т. 8. № 2. С. 39–55.
- [40] Allègre C.J., Le Mouél J.L., Provost A. Scaling rules in rock fracture and possible implications for earthquake prediction // Nature. 1982. V. 297. No. 5861. P. 47–49.

- [41] *Madden T.R.* Microcrack connectivity in rocks: a renormalization group approach to the critical phenomena of conduction and failure in crystalline rocks // *J. Geophys. Res.* 1983. V. 88. No. B1. P. 585–592.
- [42] *Allegre C.J., Le Mouél J.L., Chau H.D., Narteau C.* Scaling organization of fracture tectonics (SOFT) and earthquake mechanism // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1995. V. 92, P. 215–233.
- [43] *Молчанов С.А., Писаренко В.Ф., Резникова А.Я.* О перколяционном подходе в теории разрушения // *Математические методы в сейсмологии и геодинамике: Вычисл. сейсмология.* Вып. 19. М.: Наука, 1986. С. 3–8.
- [44] *Дискретные свойства геофизической среды / Под ред. М.А. Садовского.* М.: Наука, 1989. 174 с.
- [45] *Loreto V., Pietronero L., Vespignani A., Zapperi S.* Renormalization group approach to the critical behavior of the forest–fire model // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 75. No. 3. P. 465–468.
- [46] *Zhang S.-d., Huang Z.-q., Ding E.-j.* Complex fiber bundle model for optimization of heterogeneous materials // *Phys. Rev. E.* 1996. V. 54. No. 4. Pt A. P. 3314–3319.

Москва

Поступила в редакцию
12.02.1999