

УДК 539.374

© 1999 г. Д.Л. БЫКОВ, Д.Н. КОНОВАЛОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЕЕ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Рассматривается эндохронный вариант нелинейной теории термовязкоупругости, разработанный для описания механического поведения наполненных полимерных материалов. Для одномерного варианта этой теории указывается метод идентификации материальных констант и функций с использованием экспериментальных данных и особенностей иерархической структуры определяющих соотношений.

Рассматривается трехуровневая структура. Первый уровень соответствует тензорно-линейным операторам Больцмана–Вольтерра в форме интегралов Стильтьеса, что позволяет описывать явления ползучести и релаксации. Во втором уровне в ядра релаксации вводятся приведенные времена, функционально зависящие от температуры, инвариантов напряжений и/или деформаций, параметра поврежденности и параметров, с помощью которых различаются процессы нагружения и разгрузки. Третий уровень позволяет дополнительно учитывать конкретные условия эксплуатации конструкций, благодаря чему в число аргументов, влияющих на приведенные времена, могут быть включены градиенты напряжений или температуры, скорости напряжений и деформаций, а также другие параметры.

Детально рассмотрен вопрос об использовании экспериментальных данных по одноосному нагружению образцов для идентификации материальной функции, описывающей скорость изменения приведенного времени в рамках одномерной нелинейной модели максвелловского типа. Изложен метод численного решения нелинейной системы интегродифференциальных уравнений указанной модели. Рассмотрены три варианта решения, различающиеся типом используемых экспериментальных данных. Проведена оценка точности метода путем сравнения численных результатов с точным решением задачи, в которой имеет место сингулярная зависимость материальной функции от удельной рассеянной энергии. На основании серии опытов на одноосную релаксацию напряжений проведена идентификация материальной функции, как функции текущей деформации и удельной рассеянной энергии. Серия опытов на растяжение с постоянными скоростями деформаций использовалась в качестве контрольной. Предсказываемые теорией диаграммы одноосного растяжения отличаются в среднем от экспериментально определенных диаграмм не более, чем на 9,6%. Прогноз этих диаграмм, основанный на линейной теории вязкоупругости, дает результаты, которые по напряжениям в 2,5–4 раза превышают данные опытов.

1. Введение. Построение математических моделей, описывающих поведение реальных материалов при заданных процессах термосилового нагружения, связано с представлением об иерархической структуре соответствующих уравнений состояния. Чем шире область применения теории, тем более сложной оказывается структура физических законов, связывающих во времени напряжения, деформации, температуру и другие параметры, входящие в уравнения состояния. Для законченности физической

теории необходимо знание технологически реализуемых способов определения всех материальных функций и функционалов, входящих в ее законы, а для практической применимости следует иметь алгоритмы решения краевых и начальных задач, сформулированных на основе этой теории.

Определение физико-механических характеристик материалов производится с помощью различных опытов, после обработки и анализа полученных результатов. При произвольных уравнениях состояния задача идентификации соответствующей модели может оказаться весьма сложной даже с применением современной вычислительной техники, если в модели не используется подходящая иерархическая структура. Указанная задача еще больше усложняется при проверке универсальности построенной теории, когда определение материальных функций и функционалов проводится при различных режимах нагружения. В этом случае необходимо иметь алгоритмы идентификации, применимые не для отдельных опытов, а для широкого класса экспериментов, отвечающих условиям эксплуатации конструкций, изготовленных из исследуемых материалов.

Ниже рассматривается вариант нелинейной теории термовязкоупругости, разработанной для описания деформаций наполненных полимерных материалов [1], и показывается, как можно находить все материальные функции и функционалы, опираясь на данные различных экспериментов и особенности структуры определяющих уравнений этой теории.

2. Иерархическая структура уравнений нелинейной эндохронной теории термовязкоупругости. Будем называть иерархической структурой законов связи напряжений, деформаций, температуры и времени совокупность последовательно вводимых операторов; конкретизирующих зависимости между заданными и искомыми величинами. Каждый оператор характеризует соответствующий уровень структуры и фиксирует какие-либо свойства материала, наблюдаемые при определенных условиях нагружения, причем более высокий, по последовательности использования оператора, уровень сохраняет все свойства предыдущих уровней. Такой подход к построению определяющих уравнений накладывает ограничения на форму представления содержащихся там материальных функций и функционалов, что и облегчает их нахождение опытным путем.

При выборе иерархии, то есть последовательности уровней, целесообразно идти от простого к сложному, учитывая вначале свойства материала, проявляющиеся при общих случаях нагружения, а затем – при частных, имеющих какие-либо особенности. Проиллюстрируем сказанное на примере упомянутой выше теории, а затем укажем пути нахождения введенных там материальных функций и функционалов.

Система определяющих соотношений нелинейной эндохронной теории термовязкоупругости может быть представлена в виде [1]:

$$S_{ij}(t) = \int_0^t R(t_*(t) - t_*(\tau)) d\mathcal{E}_{ij}(\tau)$$

$$\sigma(t) = \int_0^t R_\theta(t^*(t) - t^*(\tau)) d[\theta(\tau) - 3\alpha\Delta T(\tau)]$$

$$\frac{dt_*(t)}{dt} = \Phi_*(T(t), \varepsilon_u(t), \dots, \sigma_u(t), \dots, A_*(t))$$

(2.1)

$$\frac{dt^*(t)}{dt} = \Phi^*(T(t), \theta(t), \dots, \sigma(t), \dots, A_*(t))$$

$$\frac{dA_*(t)}{dt} = - \frac{dt_*}{dt} \int_0^t R'(2t_*(t) - t_*(\tau_1) - t_*(\tau_2)) d\mathcal{E}_{ij}(\tau_1) d\mathcal{E}_{ij}(\tau_2) -$$

$$-\frac{dt^*}{dt} \int_0^{t^*} R'_\theta(2t^*(t) - t^*(t_1) - t^*(t_2)) d[\theta(\tau_1) - 3\alpha\Delta T(\tau_1)] d[\theta(\tau_2) - 3\alpha\Delta T(\tau_2)]$$

$$\theta = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}, \quad \sigma = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3, \quad \Xi_{ij} = \varepsilon_{ij} - \theta \delta_{ij} / 3, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$$

$$\varepsilon_u = \sqrt{\frac{2}{3} \Xi_{ij} \Xi_{ij}}, \quad \sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$R'(t) \equiv \frac{dR(t)}{dt} \leq 0, \quad R'_\theta(t) \equiv \frac{dR_\theta(t)}{dt} \leq 0$$

Здесь σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно; $R(t)$, $R_\theta(t)$ – ядра сдвиговой и объемной релаксации; α – коэффициент линейного расширения; ΔT – разность между эксплуатационной и равновесной температурами; t_* , t^* – приведенные времена; T – абсолютная температура тела; A_* – удельная рассеянная энергия; по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до 3.

При получении выражения для мощности удельной рассеянной энергии использовалось предположение о максвелловском типе ядер $R(t)$ и $R_\theta(t)$, т.е. возможности их представления в виде

$$R(t) = \sum_{k=1}^N R_k \exp(-t/\tau_k) + R_\infty, \quad R_\theta(t) = \sum_{k=1}^{N_\theta} R_{\theta k} \exp(-t/\tau_{\theta k}) + R_{\theta\infty} \quad (2.2)$$

где R_k , $R_{\theta k}$, R_∞ , $R_{\theta\infty}$, τ_k , $\tau_{\theta k}$ – положительные константы.

Если материальные функции Φ_* и Φ^* положительны, то в каждой точке тела имеют место взаимно однозначные соответствия между приведенными временами t_* , t^* и физическим временем t , и уравнения (2.1) могут быть разрешены относительно деформаций по следующей схеме:

$$\tilde{S}_{ij}(t_*) = \int_0^{t^*} R(t_* - \tau_*) d\tilde{\Xi}_{ij}(\tau_*) \Leftrightarrow \tilde{\Xi}_{ij}(t_*) = \int_0^{t^*} \Pi(t_* - \tau_*) d\tilde{S}_{ij}(\tau_*) \quad (2.3)$$

$$\tilde{\sigma}(t^*) = \int_0^{t^*} R_\theta(t^* - \tau^*) d[\tilde{\theta}(\tau^*) - 3\alpha\Delta\tilde{T}(\tau^*)] \Leftrightarrow \tilde{\theta}(t^*) - 3\alpha\Delta\tilde{T}(t^*) = \int_0^{t^*} \Pi_\theta(t^* - \tau^*) d\tilde{\sigma}(\tau^*)$$

$$\tilde{S}_{ij}(t_*) = S_{ij}[t(t_*)], \quad \tilde{\Xi}_{ij}(t_*) = \Xi_{ij}[t(t_*)], \quad \tilde{\sigma}(t^*) = \sigma[t(t^*)], \quad \tilde{\theta}(t^*) = \theta[t(t^*)],$$

$$\Delta\tilde{T}(t^*) = \Delta T[t(t^*)]$$

где $\Pi(t)$, $\Pi_\theta(t)$ – ядра сдвиговой и объемной ползучести.

Анализ уравнений (2.1) показывает, что они имеют трехуровневую структуру. На первом уровне используются тензорно линейные операторы Больцмана – Вольтерра в форме интегралов Стильтьеса (первые два уравнения системы (2.1)), позволяющие описывать явления релаксации и ползучести (2.3). Эти уравнения содержат приведенные, а не истинные времена, что делает их в общем случае нелинейными, хотя тензорная линейность сохраняется. При $t_* = t^* = t$ из (2.1) следуют соотношения линейной теории вязкоупругости, поэтому функций $R(t)$, $R_\theta(t)$ должны совпадать с ядрами сдвиговой и объемной релаксации, определяемыми стандартными методами при малых деформациях. Заметим, что экспериментальное нахождение ядер $R(t)$ и $R_\theta(t)$ в (2.1) следует производить при полной линейности операторов Больцмана – Вольтерра. Физическая корректность линейной теории подтверждается выполнением условий Брейера – Оната относительно ядер релаксации [2].

Второй уровень структуры вводится третьим и четвертым уравнениями системы

(2.1) в форме дифференциальных операторов, связывающих приведенные времена с материальными функциями Φ_* и Φ^* . Последние могут зависеть от большого числа аргументов, отражающих влияние различных факторов на механические характеристики материалов. На втором уровне учитываются зависимости Φ_* и Φ^* от температуры, инвариантов напряжений и/или деформаций [3], удельной рассеянной энергии, принимаемой за параметр поврежденности, и параметров, с помощью которых различаются процессы нагружения и разгрузки. Перечисленные аргументы достаточны для описания процессов нагружения в наиболее часто встречающихся условиях эксплуатации конструкций.

Третий уровень позволяет дополнительно учитывать конкретные особенности напряженно-деформированного состояния и температурных полей, а также влияние на механические характеристики материалов каких-либо физических или химических процессов. В этом случае в числе дополнительных аргументов могут быть градиенты напряжений и температур, скорости напряжений и деформаций, эквивалентные напряжения и деформации, образованные некоторыми комбинациями их инвариантов, параметры диффузии [4] и охрупчивания и другие. С помощью дополнительных аргументов можно учитывать также процессы частичной "залечиваемости" полимерных материалов [1]. Таким образом, третий уровень иерархической структуры сохраняет возможность дальнейшего расширения пределов применимости рассматриваемой теории. Рациональное использование третьего уровня возможно при наличии априорной информации о конкретных условиях эксплуатации конструкций.

3. Метод численного решения системы интегро-дифференциальных уравнений, описывающей одномерную нелинейную вязкоупругую модель максвелловского типа. Рассмотрим одномерный вариант системы определяющих соотношений (2.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sum_{k=1}^N E_k \int_0^t \exp\{-[t_*(t) - t_*(\tau)]/\tau_k\} d\varepsilon(\tau) + E_\infty \varepsilon(t) \\ \frac{dA_*}{dt} &= \frac{dt_*}{dt} \sum_{k=1}^N \frac{E_k}{\tau_k} \left[\int_0^t \exp\{-[t_*(t) - t_*(\tau)]/\tau_k\} d\varepsilon(\tau) \right]^2 \\ \frac{dt_*}{dt} &= \Phi(T(t), \varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t), \varepsilon_m(t), \sigma(t), \dot{\sigma}(t), \sigma_m(t), A_*(t)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$ – напряжение и деформация в момент времени t , $A_*(t)$ – удельная рассеянная энергия, $t_*(t)$ – функция приведенного (модифицированного) времени, $T(t)$ – температура, $\dot{\sigma}(t)$, $\dot{\varepsilon}(t)$ – скорости напряжения и деформации, $\sigma_m(t)$, $\varepsilon_m(t)$ – максимальные (по абсолютной величине) значения напряжения и деформации на временном интервале $[0, t]$, т.е.

$$\sigma_m(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} |\sigma(\tau)|; \quad \varepsilon_m(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} |\varepsilon(\tau)|$$

$E_1, \dots, E_N, E_\infty$ – набор модулей упругости, τ_1, \dots, τ_N – набор времен релаксации, $\Phi(T, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \varepsilon_m, \sigma, \dot{\sigma}, \sigma_m, A_*)$ – положительная функция, описывающая зависимость скорости изменения приведенного времени от параметров напряженно-деформированного состояния, удельной рассеянной энергии и температуры.

Механическим аналогом этой модели является система параллельно соединенных N вязкоупругих элементов типа "пружина – демпфер" и одного упругого элемента с жесткостью E_∞ . Жесткость пружины k -го вязкоупругого элемента равна E_k , а мгновенное значение коэффициента вязкости демпфера $\mu_k(t)$ равно $E_k \tau_k (dt_*/dt)^{-1}$. Отметим, что в рассматриваемой модели временные зависимости коэффициентов вязкости всех демпферов описываются одной и той же функцией $(dt_*/dt)^{-1}$.

Система из трех соотношений (3.1) при заданной температуре $T(t)$ устанавливает связь между четырьмя функциями времени $\varepsilon(t)$, $\sigma(t)$, $A_*(t)$ и $t_*(t)$. Полагая одну из этих функций известной и добавляя к системе (3.1) естественные начальные условия $A_*(0) = 0$ и $t_*(0) = 0$, можно сформулировать задачу Коши для определения остальных трех функций. Ниже будут рассмотрены следующие три задачи:

(1) задана история деформации $\varepsilon(t)$; требуется разрешить систему (3.1) относительно функций $\sigma(t)$, $A_*(t)$, $t_*(t)$;

(2) задана история напряжения $\sigma(t)$; требуется разрешить систему (3.1) относительно функций $\varepsilon(t)$, $A_*(t)$, $t_*(t)$;

(3) задана история деформации $\varepsilon(t)$ и история напряжения $\sigma(t)$; требуется разрешить "усеченную" систему (3.1) (без последнего уравнения) относительно функций $A_*(t)$, $t_*(t)$.

Последняя задача связана с задачей идентификации материальной функции $\Phi(T, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \varepsilon_m, \sigma, \dot{\sigma}, \sigma_m, A_*)$ с использованием экспериментальных данных по одноосному нагружению образцов.

Для численного решения указанных задач используется представление соотношений (3.1) в приращениях на интервале $[t, t + \Delta t]$, полученное в предположении о линейном законе изменения величин σ , ε , A_* , t_* на этом интервале

$$\begin{aligned} \sigma(t) + \Delta\sigma &= \sum_{k=1}^N E_k \left[I_k(t) \exp(-\Delta t_* / \tau_k) + \Delta\varepsilon \times F_1 \left(\frac{\Delta t_*}{\tau_k} \right) \right] + E_\infty [\varepsilon(t) + \Delta\varepsilon] \\ \Delta A_* &= \Delta t_* \sum_{k=1}^N \frac{E_k}{\tau_k} \left[I_k^2(t) F_1 \left(\frac{2\Delta t_*}{\tau_k} \right) + I_k(t) \Delta\varepsilon \times F_1^2 \left(\frac{\Delta t_*}{\tau_k} \right) + (\Delta\varepsilon)^2 F_2 \left(\frac{\Delta t_*}{\tau_k} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\Delta t_* = \Delta t \times \Phi \left(T(t) + \frac{\Delta T}{2}, \varepsilon(t) + \frac{\Delta\varepsilon}{2}, \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t}, \max \left\{ \varepsilon_m(t), \left| \varepsilon(t) + \frac{\Delta\varepsilon}{2} \right| \right\}, \sigma(t) + \frac{\Delta\sigma}{2}, \frac{\Delta\sigma}{\Delta t}, \right.$$

$$\left. \max \left\{ \sigma_m(t), \left| \sigma(t) + \frac{\Delta\sigma}{2} \right| \right\}, A_*(t) + \frac{\Delta A_*}{2} \right)$$

$$I_k(t) = \int_0^t \exp\{-[t_*(t) - t_*(\tau)] / \tau_k\} d\varepsilon(\tau), \quad F_1(x) = (1 - e^{-x}) / x,$$

$$F_2(x) = [1 - 2F_1(x) + F_1(2x)] / x^2$$

где $\Delta\sigma$, $\Delta\varepsilon$, ΔA_* , Δt_* – приращения соответствующих величин на интервале $[t, t + \Delta t]$, $I_k(t)$ – величина упругой деформации в k -ом вязкоупругом элементе в момент времени t .

Если задана история деформации, то решение соответствующей задачи на интервале $[t, t + \Delta t]$ сводится к решению системы трех нелинейных уравнений (3.2) относительно приращений $\Delta\sigma$, ΔA_* , Δt_* . Определяя из первого уравнения системы (3.2) зависимость $\Delta\sigma(\Delta t_*)$, а из второго уравнения этой системы – зависимость $\Delta A_*(\Delta t_*)$, и подставляя затем эти зависимости в третье уравнение системы, получим следующее уравнение для определения Δt_* :

$$\begin{aligned} \Delta t_* &= \Delta t \times \Phi \left(T(t) + \frac{\Delta T}{2}, \varepsilon(t) + \frac{\Delta\varepsilon}{2}, \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t}, \max \left\{ \varepsilon_m(t), \left| \varepsilon(t) + \frac{\Delta\varepsilon}{2} \right| \right\}, \sigma(t) + \frac{\Delta\sigma(\Delta t_*)}{2}, \right. \\ &\left. \frac{\Delta\sigma(\Delta t_*)}{\Delta t}, \max \left\{ \sigma_m(t), \left| \sigma(t) + \frac{\Delta\sigma(\Delta t_*)}{2} \right| \right\}, A_*(t) + \frac{\Delta A_*(\Delta t_*)}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для решения уравнения (3.3) применяется итерационный процесс

$$\Delta t_*^{(n+1)} = \Delta t \times \Phi \left(T(t) + \frac{\Delta T}{2}, \varepsilon(t) + \frac{\Delta \varepsilon}{2}, \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t}, \max \left\{ \varepsilon_m(t), \left| \varepsilon(t) + \frac{\Delta \varepsilon}{2} \right| \right\}, \sigma(t) + \frac{\Delta \sigma(\Delta t_*^{(n)})}{2}, \right. \\ \left. \frac{\Delta \sigma(\Delta t_*^{(n)})}{\Delta t}, \max \left\{ \sigma_m(t), \left| \sigma(t) + \frac{\Delta \sigma(\Delta t_*^{(n)})}{2} \right| \right\}, A_*(t) + \frac{\Delta A_*(\Delta t_*^{(n)})}{2} \right) \quad (3.4)$$

с начальным приближением

$$\Delta t_*^{(0)} = \Delta t \times \Phi \left(T(t) + \frac{\Delta T}{2}, \varepsilon(t) + \frac{\Delta \varepsilon}{2}, \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t}, \max \left\{ \varepsilon_m(t), \left| \varepsilon(t) + \frac{\Delta \varepsilon}{2} \right| \right\}, \sigma(t) + \frac{\Delta \sigma^{(0)}}{2}, \right. \\ \left. \frac{\Delta \sigma^{(0)}}{\Delta t}, \max \left\{ \sigma_m(t), \left| \sigma(t) + \frac{\Delta \sigma^{(0)}}{2} \right| \right\}, A_*(t) + \frac{\Delta A_*^{(0)}}{2} \right) \quad (3.5)$$

в котором величины $\Delta \sigma^{(0)}$ и $\Delta A_*^{(0)}$ предполагаются либо нулевыми, либо полученными с помощью линейной экстраполяции решения на предыдущем временном шаге.

Если задана история напряжения, то решение соответствующей задачи на интервале $[t, t + \Delta t]$ сводится к решению системы трех нелинейных уравнений (3.2) относительно приращений $\Delta \varepsilon$, ΔA_* , Δt_* . Определяя из первого уравнения системы (3.2) зависимость $\Delta \varepsilon(\Delta t_*)$, а из второго уравнения этой системы – зависимость $\Delta A_*(\Delta t_*)$ с учетом $\Delta \varepsilon(\Delta t_*)$, и подставляя затем эти величины в третье уравнение системы, получим следующее уравнение для определения Δt_* :

$$\Delta t_* = \Delta t \times \Phi \left(T(t) + \frac{\Delta T}{2}, \varepsilon(t) + \frac{\Delta \varepsilon(\Delta t_*)}{2}, \frac{\Delta \varepsilon(\Delta t_*)}{\Delta t}, \max \left\{ \varepsilon_m(t), \left| \varepsilon(t) + \frac{\Delta \varepsilon(\Delta t_*)}{2} \right| \right\}, \right. \\ \left. \sigma(t) + \frac{\Delta \sigma}{2}, \frac{\Delta \sigma}{\Delta t}, \max \left\{ \sigma_m(t), \left| \sigma(t) + \frac{\Delta \sigma}{2} \right| \right\}, A_*(t) + \frac{\Delta A_*(\Delta t_*)}{2} \right) \quad (3.6)$$

Для решения уравнения (3.6) применяется итерационный процесс

$$\Delta t_*^{(n+1)} = \Delta t \times \Phi \left(T(t) + \frac{\Delta T}{2}, \varepsilon(t) + \frac{\Delta \varepsilon(\Delta t_*^{(n)})}{2}, \frac{\Delta \varepsilon(\Delta t_*^{(n)})}{\Delta t}, \max \left\{ \varepsilon_m(t), \left| \varepsilon(t) + \frac{\Delta \varepsilon(\Delta t_*^{(n)})}{2} \right| \right\}, \right. \\ \left. \sigma(t) + \frac{\Delta \sigma}{2}, \frac{\Delta \sigma}{\Delta t}, \max \left\{ \sigma_m(t), \left| \sigma(t) + \frac{\Delta \sigma}{2} \right| \right\}, A_*(t) + \frac{\Delta A_*(\Delta t_*^{(n)})}{2} \right) \quad (3.7)$$

с начальным приближением

$$\Delta t_*^{(0)} = \Delta t \times \Phi \left(T(t) + \frac{\Delta T}{2}, \varepsilon(t) + \frac{\Delta \varepsilon^{(0)}}{2}, \frac{\Delta \varepsilon^{(0)}}{\Delta t}, \max \left\{ \varepsilon_m(t), \left| \varepsilon(t) + \frac{\Delta \varepsilon^{(0)}}{2} \right| \right\}, \right. \\ \left. \sigma(t) + \frac{\Delta \sigma}{2}, \frac{\Delta \sigma}{\Delta t}, \max \left\{ \sigma_m(t), \left| \sigma(t) + \frac{\Delta \sigma}{2} \right| \right\}, A_*(t) + \frac{\Delta A_*^{(0)}}{2} \right) \quad (3.8)$$

в котором величины $\Delta \varepsilon^{(0)}$ и $\Delta A_*^{(0)}$ предполагаются либо нулевыми, либо полученными с помощью линейной экстраполяции решения на предыдущем временном шаге.

Если заданы истории деформации и напряжения, то величина Δt_* может быть определена из решения первого уравнения системы (3.2), которое в этом случае может быть представлено в следующем виде:

$$f(\Delta t_*) = \sum_{k=1}^N E_k \left[I_k(t) \exp(-\Delta t_* / \tau_k) + \Delta \varepsilon \times F_1 \left(\frac{\Delta t_*}{\tau_k} \right) \right] + E_\infty \varepsilon(t + \Delta t) - \sigma(t + \Delta t) = 0 \quad (3.9)$$

Для решения этого уравнения используется схема метода Ньютона

$$\Delta t_*^{(n+1)} = \Delta t_*^{(n)} - f(\Delta t_*^{(n)}) [df(\Delta t_*^{(n)}) / d(\Delta t_*)]^{-1} \quad (3.10)$$

$$\frac{df}{d(\Delta t_*)} = \sum_{k=1}^N E_k \left[-\frac{1}{\tau_k} I_k(t) \exp(-\Delta t_* / \tau_k) + \frac{\Delta \varepsilon}{\tau_k} \times F_3 \left(\frac{\Delta t_*}{\tau_k} \right) \right]$$

$$F_3(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} = \frac{e^{-x} + x e^{-x} - 1}{x^2}$$

На первом временном шаге решения начальное приближение $\Delta t_*^{(0)}$ берется равным величине временного шага Δt . На последующих временных шагах начальное приближение $\Delta t_*^{(0)}$ может вычисляться путем линейной экстраполяции решения на предыдущем временном шаге. Другой способ вычисления начального приближения основан на применении явной разностной схемы первого порядка к уравнению

$$\frac{d\sigma}{dt} = E_0 \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{dt_*}{dt} \sum_{k=1}^N \frac{E_k}{\tau_k} I_k(t), \quad E_0 = \sum_{k=1}^N E_k + E_\infty \quad (3.11)$$

где E_0 – мгновенный модуль упругости материала. Это уравнение может быть получено путем дифференцирования по времени обеих частей первого уравнения системы (3.1). Полученное с помощью уравнения (3.11) выражение для начального приближения $\Delta t_*^{(0)}$ имеет следующий вид:

$$\Delta t_*^{(0)} = (E_0 \Delta \varepsilon - \Delta \sigma) \left[\sum_{k=1}^N \frac{E_k}{\tau_k} I_k(t) \right]^{-1} \quad (3.12)$$

После определения величины приращения приведенного времени Δt_* на текущем временном шаге величина приращения рассеянной энергии ΔA_* может быть вычислена с использованием второго уравнения системы (3.2).

В качестве условия завершения итерационных процессов (3.4), (3.7), (3.10) на каждом временном шаге используется условие

$$\frac{|\Delta t_*^{(n+1)} - \Delta t_*^{(n)}|}{\Delta t_*^{(n)}} < \varepsilon_{\Delta t_*} \quad (3.13)$$

в котором параметр $\varepsilon_{\Delta t_*}$ характеризует допустимую погрешность.

4. Решение одномерной тестовой задачи. В качестве тестовой рассматривалась задача об одноосном растяжении с постоянной мощностью рассеяния энергии ($dA_*/dt = W_0 H(t)$, $H(t)$ – функция Хевисайда). Материальная функция Φ бралась в виде $\Phi = (1 - A_*/A_s)^{-\alpha}$. Ниже приводится точное решение для случая, когда ядро релаксации описывается одной экспонентой ($N = 1$, $E_\infty = 0$):

$$t_*(t) = \begin{cases} \frac{t_s}{1-\alpha} [1 - \varphi^{(1-\alpha)}(t)], & \text{если } \alpha \neq 1 \\ -t_s \ln \varphi(t), & \text{если } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\sigma(t) = \sqrt{W_0 E_1 \tau_1} \varphi^{\frac{\alpha}{2}}(t) H(t)$$

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{W_0 \tau_1}{E_1}} \left[\varphi^{\frac{\alpha}{2}}(t) H(t) + \frac{2t_s}{\tau_1(2-\alpha)} \left(1 - \varphi^{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}(t) \right) \right], & \text{если } \alpha \neq 2 \\ \sqrt{\frac{W_0 \tau_1}{E_1}} \left[\varphi^{\frac{\alpha}{2}}(t) H(t) - \frac{t_s}{\tau_1} \ln \varphi(t) \right], & \text{если } \alpha = 2 \end{cases}$$

$$W(t) = W_0 \tau_1 \left[\varphi^{\alpha}(t) \delta(t) - \frac{\alpha}{2t_s} \varphi^{\alpha-1}(t) H(t) + \frac{H(t)}{\tau_1} \right] H(t)$$

$$A(t) = W_0 t + \frac{W_0 \tau_1}{2} \varphi^{\alpha}(t) H(t)$$

В этих выражениях $W(t)$ – мощность работы внутренних сил, $A(t)$ – работа внутренних сил, $\delta(t)$ – δ -функция Дирака, $t_s = A_s/W_0$ – время достижения предельного состояния, $\varphi(t) = 1 - t/t_s$.

В начальный момент ($t = 0$) напряжение претерпевает скачок на величину $\sqrt{W_0 E_1 \tau_1}$, а деформация – скачок на величину $\sqrt{W_0 \tau_1 / E_1}$. После начального скачка напряжение монотонно убывает до нуля ($\sigma(t_s) = 0$). При $\alpha < 2$ зависимость $\sigma(t)$ описывается кривой с выпуклостью "вверх"; при $\alpha = 2$ – прямой линией, а при $\alpha > 2$ – кривой с выпуклостью "вниз". Характер зависимости $\varepsilon(t)$ определяется соотношением параметров α , τ_1 и t_s . В начальный момент времени ($t = +0$) и в момент разрушения ($t = t_s$) имеют место следующие зависимости:

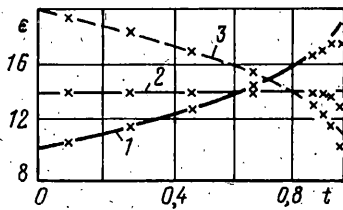
$$\varepsilon(+0) = \sqrt{\frac{W_0 \tau_1}{E_1}}, \quad \frac{d\varepsilon(+0)}{dt} = \sqrt{\frac{W_0 \tau_1}{E_1}} \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{\alpha}{2t_s} \right)$$

$$\varepsilon(t_s) = \begin{cases} \varepsilon(+0) \frac{2t_s}{\tau_1(2-\alpha)}, & \text{если } \alpha < 2 \\ +\infty, & \text{если } \alpha \geq 2 \end{cases}$$

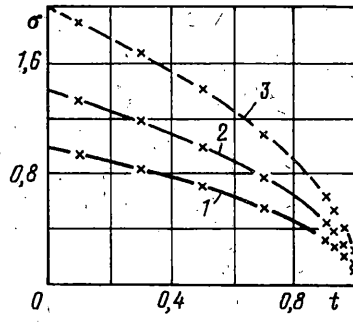
$$\frac{d\varepsilon(t_s)}{dt} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{если } \alpha = 1 \text{ и } 2t_s / \tau_1 > 1 \\ 0, & \text{если } \alpha = 1 \text{ и } 2t_s / \tau_1 = 1 \\ -\infty, & \text{если } \alpha = 1 \text{ и } 2t_s / \tau_1 < 1 \\ -\infty, & \text{если } \alpha < 1 \end{cases}$$

Численное решение задачи проводилось для следующего набора исходных данных: модуль упругости $E_1 = 10$ МПа, время релаксации $\tau_1 = 1, 2, 4$ с, предельное значение удельной рассеянной энергии $A_s = 0,1$ МПа, удельная мощность рассеяния $W_0 = 0,1$ МПа/с, параметр $\alpha = 1$. Отметим, что в рассматриваемом случае (т.е. при $\alpha = 1$), если выполнено условие $2t_s / \tau_1 > 1$, то деформация монотонно возрастает вплоть до момента разрушения. Если $2t_s / \tau_1 = 1$, то деформация остается постоянной (режим релаксации). Если же выполняется условие $2t_s / \tau_1 < 1$, то деформация монотонно убывает вплоть до момента разрушения. Рассматривались три варианта решения задачи:

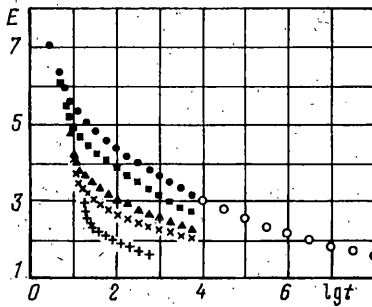
(I) задана история деформации $\varepsilon(t)$; требуется определить функции $\sigma(t)$, $t_*(t)$, $A_*(t)$;



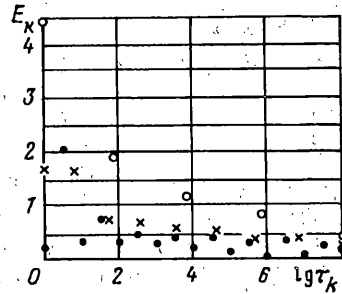
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

(2) задана история напряжения $\sigma(t)$; требуется определить функции $\varepsilon(t)$, $t_*(t)$, $A_*(t)$;

(3) заданы история деформации $\varepsilon(t)$ и история напряжения $\sigma(t)$; требуется определить функции $t_*(t)$, $A_*(t)$.

Каждая из трех задач решалась на временном интервале $[0; 0,99t_s]$. При этом интервалы $[0; 0,9t_s]$ и $[0,9t_s; 0,99t_s]$ разбивались на одинаковое количество шагов численного интегрирования (n_s). Рассматривались три варианта разбиения: $n_s = 9; 90; 900$. На фиг. 1, 2 представлены точные временные зависимости напряжений $\sigma(t)$ [МПа] и деформации $\varepsilon(t)$ [%] для трех значений времени релаксации τ_1 (кривые 1–3 соответствуют $\tau_1 = 1, 2, 4$ с), а также точки соответствующих численных решений, полученных при $n_s = 900$ (t [с]). Здесь и в дальнейшем величины модулей и напряжений указаны в [МПа].

В табл. 1 приведены максимальные по всем точкам численного решения величины относительных погрешностей расчета напряжения (δ_σ), приведенного времени (δ_{t^*}) и удельной рассеянной энергии (δ_{A^*}), а также значения параметра m_i , характеризующего скорость сходимости итерационного процесса (3.4) (m_i – максимальное количество итераций при $\varepsilon_{\Delta t^*} = 0,001$, см. условие (3.13)).

5. Об идентификации материальных констант и функций, входящих в соотношения одномерной эндохронной модели. В общем виде задача идентификации может быть сформулирована как задача определения оптимального набора материальных констант и функций из условия минимума отклонения результатов теоретических прогнозов от соответствующих экспериментальных данных по одноосному деформированию (нагружению) образцов исследуемого материала. Если для исследуемого материала существует класс "линейных" процессов деформирования (нагружения), в кото-

Таблица 1

τ_1 [с]	n_s	δ_σ [%]	δ_{τ_1} [%]	δ_{A_s} [%]	m_i
1	9	6,5	11,1	6,6	5
	90	1,6	5,2	0,6	3
	900	0,2	0,4	0,1	2
2	9	21,9	49,2	10,9	4
	90	4,7	16,5	1,3	3
	900	0,6	2,6	0,1	2
4	9	16,3	57,9	23,5	3
	90	5,9	30,8	5,3	3
	900	1,5	10,0	0,9	2

рых приведенное время t_* совпадает с физическим временем t (функция $\Phi(T, \dots, A_*)$ тождественно равна 1), то из общей задачи идентификации может быть выделена в качестве самостоятельной задача идентификации параметров линейной модели $E_1, \dots, E_N, E_\infty, \tau_1, \dots, \tau_N$.

Следует отметить, что диапазон изменения времен релаксации $[\tau_1, \tau_N]$ должен выбираться не только с учетом диапазона изменения физического времени t в "линейных" процессах, но и с учетом диапазона изменения приведенного времени t_* в "нелинейных" процессах, которые в дальнейшем предстоит описывать с помощью нелинейной эндохронной модели. Последний диапазон заранее неизвестен и может быть определен лишь в процессе идентификации функции $\Phi(T, \dots, A_*)$ и/или в результате решения соответствующих краевых задач. Таким образом, при решении задачи идентификации параметров линейной модели для корректного выбора диапазона времен релаксации $[\tau_1, \tau_N]$ необходимо иметь априорную оценку максимальной величины приведенного времени $(t^*)_{\max}$, которая может на несколько порядков превосходить максимальное значение физического времени. В этом случае при определении параметров линейной модели приходится прибегать к временной экстраполяции экспериментальных данных, полученных в "линейных" процессах. При этом можно воспользоваться как чисто математическими методами экстраполяции, так и физическим подходом, основанном на использовании температурно-временной аналогии.

Вопросам, связанным с идентификацией параметров линейной модели вязкоупругости, посвящено значительное количество работ (например, [5, 6]). Наиболее часто для идентификации используются экспериментальные данные по релаксации напряжений. Ниже излагается подход к решению задачи идентификации параметров линейной модели, позволяющий использовать наборы экспериментальных данных, полученные для любых "линейных" процессов одноосного нагружения.

Пусть результаты эксперимента представлены в виде набора значений времени t_i ($0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$) и соответствующих наборов значений деформации ϵ_i и напряжения σ_i ($i = 1, \dots, n$). Требуется определить наборы параметров $(E_1, \dots, E_N, E_{N+1})$ и (τ_1, \dots, τ_N) , при которых соотношение линейной модели

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^N E_k \int_0^t \exp\{-(t-\tau)/\tau_k\} d\epsilon(\tau) + E_{N+1} \epsilon(t) \quad (5.1)$$

наиболее точно согласуется с результатами эксперимента.

На первом этапе решения задачи идентификации предположим, что набор времен релаксации (τ_1, \dots, τ_N) известен. Для определения набора модулей упругости $(E_1, \dots, E_N, E_{N+1})$ воспользуемся условием минимума среднеквадратичного отклонения расчетных значений напряжения $\tilde{\sigma}(t_i)$ от соответствующих экспериментальных значений σ_i . Расчетное значение напряжения $\tilde{\sigma}(t_i)$ определяется путем подстановки в соотношение (5.1) временной зависимости деформации $\tilde{\epsilon}(t_i)$, которая была реализована в опыте, т.е.

$$\tilde{\sigma}(t_i) = \sum_{k=1}^N E_k \int_0^{t_i} \exp\{-(t_i - \tau) / \tau_k\} d\tilde{\epsilon}(\tau) + E_{N+1} \epsilon_i \quad (5.2)$$

С учетом (5.2) выражение для минимизируемой суммы квадратов отклонений $S_2(E_1, \dots, E_N, E_{N+1})$ может быть представлено в следующем виде:

$$S_2(E_1, \dots, E_{N+1}) = \sum_{i=1}^n \left[\tilde{\sigma}_i - \sum_{k=1}^{N+1} E_k I_k(t_i) \right]^2; \quad I_k(t_i) = \begin{cases} \int_0^{t_i} \exp\{-(t_i - \tau) / \tau_k\} d\tilde{\epsilon}(\tau), & \text{если } k \leq N \\ \epsilon_i, & \text{если } k = N+1 \end{cases} \quad (5.3)$$

Для вычисления наследственных интегралов $I_k(t_i)$ можно воспользоваться рекуррентным соотношением

$$I_k(t_i) = I_k(t_{i-1}) \exp\{-(t_i - t_{i-1}) / \tau_k\} + (\epsilon_i - \epsilon_{i-1}) F_1 \left(\frac{t_i - t_{i-1}}{\tau_k} \right) \quad (5.4)$$

которое является точным, если на интервале $[t_{i-1}, t_i]$ деформация $\tilde{\epsilon}(t)$ изменяется по линейному закону. Условию минимума квадратичной функции $S_2(E_1, \dots, E_N, E_{N+1})$ в общем случае соответствует система линейных уравнений

$$A_{jk} E_k = B_j \quad (j, k = 1, \dots, N+1), \quad A_{jk} = \sum_{i=1}^n I_j(t_i) I_k(t_i), \quad B_j = \sum_{i=1}^n \sigma_i I_j(t_i) \quad (5.5)$$

с симметричной матрицей A_{jk} . Если же длительный модуль упругости E_{N+1} предполагается заданным, то условию минимума функции $S_2(E_1, \dots, E_N)$ соответствует система уравнений

$$A'_{jk} E_k = B'_j \quad (j, k = 1, \dots, N), \quad B'_j = \sum_{i=1}^n (\sigma_i - E_{N+1} \epsilon_i) I_j(t_i) \quad (5.6)$$

После определения набора модулей упругости E_1, \dots, E_N, E_{N+1} может быть вычислена оценка погрешности теоретического прогноза, зависящая от величин разностей $|\tilde{\sigma}(t_i) - \sigma_i|$ ($i = 1, \dots, n$). В качестве такой оценки может выступать величина максимального относительного отклонения

$$\Delta_1 = \max_{i=1, \dots, n} \left| \frac{\tilde{\sigma}(t_i) - \sigma_i}{\sigma_i} \right| \quad (5.7)$$

вычисляемая по всем экспериментальным точкам, в которых напряжения σ_i отличны от 0.

Отметим, что величина Δ_1 зависит от набора времен релаксации τ_1, \dots, τ_N и, следовательно, оптимальному набору должно соответствовать минимальное значение Δ_1 . В общем случае задача минимизации погрешности Δ_1 по полному набору времен релаксации является достаточно трудоемкой. Более простой способ минимизации погрешности Δ_1 состоит в том, что в рассмотрение вводится однопараметрическое семейство наборов времен релаксации $\tau_k(s)$ ($k = 1, \dots, N$; s -параметр), и минимизация величины Δ_1 производится по единственному параметру s . В качестве такого

семейства наборов времен релаксации может выступать, например, семейство разбиений отрезка $[\lg \tau_1, \lg \tau_N]$ на $N-1$ интервалов, длины которых возрастают или убывают в геометрической прогрессии с показателем s . При этом минимальное (τ_1) и максимальное (τ_N) времена релаксации варьированию не подвергаются. Следует также отметить, что процесс минимизации погрешности Δ_1 имеет практический смысл лишь до тех пор, пока величина этой погрешности превосходит погрешность, с которой были получены используемые при идентификации экспериментальные данные.

Перейдем теперь к вопросу об идентификации функции $\Phi(T, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \varepsilon_m, \sigma, \dot{\sigma}, \sigma_m, A_*)$. Параметри линейной модели будем считать известными. Идентификация функции $\Phi(T, \dots, A_*)$ должна проводиться на основе экспериментальных данных, полученных при нелинейных процессах одноосного нагружения образцов. Очевидно, что невозможно указать сколь-нибудь общий метод идентификации материальной функции такого количества переменных. Процедура идентификации будет существенно зависеть от типа исследуемого материала, от вида процессов нагружения, а также от объема и конкретных особенностей опытов, результаты которых используются при идентификации. В основе процедуры идентификации лежит соотношение эндохронной модели

$$dt_*(t)/dt = \Phi(T(t), \varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t), \varepsilon_m(t), \sigma(t), \dot{\sigma}(t), \sigma_m(t), A_*(t)) \quad (5.8)$$

Покажем, каким образом результаты опытов по одноосному нагружению в сочетании с соотношением (5.8) могут быть использованы для решения задачи идентификации функции $\Phi(T, \dots, A_*)$. Рассмотрим отдельный опыт, в ходе которого производилась регистрация временных зависимостей деформации $\varepsilon(t)$, напряжения $\sigma(t)$ и температуры $T(t)$ (если процесс нагружения является неизотермическим). Пользуясь изложенным выше методом решения "усеченной" системы уравнений эндохронной модели, определим функции $dt_*(t)/dt$ и $A_*(t)$, соответствующие функциям $\varepsilon(t)$, $\sigma(t)$, и подставим их в соотношение (5.8). Отметим, что при решении "усеченной" системы используется информация только о параметрах линейной модели. Теперь соотношение (5.8) может рассматриваться в качестве уравнения относительно неизвестной "внешней" функции $\Phi(T, \dots, A_*)$, так как все аргументы этой функции, а также левая часть этого соотношения, являются известными функциями времени. Каждому опыту может быть поставлен в соответствие свой вариант соотношения (5.8). Указанным образом может быть построена система уравнений, где в качестве единственной неизвестной функции выступает "внешняя" функция $\Phi(T, \dots, A_*)$, а время t входит в качестве параметра, от которого зависят аргументы функции Φ .

В общем случае вопрос о математической корректности задачи определения функции Φ из системы соотношений типа (5.8) связан со значительными трудностями. С практической точки зрения представляет интерес слабая формулировка этой задачи, а именно: определить функцию Φ из условия минимума некоторой интегральной (по времени) невязки системы соотношений (5.8). При такой постановке задачи идентификации ее решение можно разбить на три этапа. На первом этапе на основании анализа соотношений (5.8), полученных для конкретных наборов экспериментальных данных, формулируется ряд гипотез о структуре функции $\Phi(T, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \varepsilon_m, \sigma, \dot{\sigma}, \sigma_m, A_*)$ и производится ее аппроксимация выражением, содержащим конечное число неизвестных параметров. На втором этапе решается задача определения этих параметров из условия минимума интегральной невязки системы соотношений (5.8). И, наконец, на третьем этапе величины этих параметров могут уточняться, исходя из требования минимума среднего отклонения результатов теоретических прогнозов напряжения $\sigma(t)$ и/или деформации $\varepsilon(t)$ от соответствующих экспериментальных данных. Необходимость уточнения параметров, от которых зависит функция Φ , связана с тем, что оптимальный с точки зрения минимума невязки системы (5.8) набор параметров может в той или иной степени отличаться от набора, являющегося

оптимальным с точки зрения минимума среднего отклонения результатов теоретических прогнозов от соответствующих экспериментальных данных. Это объясняется тем, что погрешности численного решения "усеченной" системы соотношений эндохронной модели, как правило, превосходят погрешности решения полной системы, поскольку при решении "усеченной" системы используется больший объем экспериментальных данных, которые нуждаются в предварительной математической обработке (интерполяции и/или экстраполяции).

Очевидно, что с точки зрения выяснения структуры функции $\Phi(T, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \varepsilon_m, \sigma, \dot{\sigma}, \sigma_m, A^*)$ и ее последующей аппроксимации наиболее предпочтительными являются экспериментальные данные о процессах, в которых наибольшее количество аргументов функций Φ не зависит от времени. В первую очередь это процессы релаксации и ползучести. Следует отметить особенность удельной рассеянной энергии A^* по сравнению с остальными аргументами функции Φ . Не существует процессов, в которых удельная рассеянная энергия остается постоянной величиной. Однако зависимость функции Φ от удельной рассеянной энергии A^* должна, по-видимому, носить пороговый характер, т.е. проявляться, начиная с некоторого порогового уровня $A^* = A_0$, поскольку удельная рассеянная энергия характеризует уровень накопленных повреждений в материале.

6. Определение набора материальных констант и функций для высоконаполненного полимерного материала НПМ. На фиг. 3 представлены результаты опытов на релаксацию напряжений в материале НПМ для различных уровней деформации ε_0 ($\varepsilon_0 = 3; 5; 8; 11; 18\%$). Этим уровням последовательно соответствуют маркеры в виде темных точек, светлых точек, квадратов, треугольников, косых крестов и прямых крестов. Выход на режим релаксации производится с постоянной скоростью деформации $\dot{\varepsilon}_0 = 0,01 \text{ с}^{-1}$. Частота дискретизации напряжения на участке релаксации составляла 4 точки на один порядок времени. Опыт при уровне деформации $\varepsilon_0 = 18\%$ завершился разрушением образца в интервале от $10^{2,75}$ секунд до 10^3 секунд после выхода на режим релаксации. Продолжительность каждого из опытов при меньших уровнях деформации составляла $10^{3,75} \approx 5623$ секунды.

Результаты опыта на релаксацию при деформации $\varepsilon_0 = 3\%$ использовались для идентификации параметров линейной модели: набора модулей упругости E_1, \dots, E_N и набора времен релаксации τ_1, \dots, τ_N . Величина длительного модуля E_∞ полагалась равной величине релаксационного модуля в момент разрушения образца при $\varepsilon_0 = 18\%$ ($E_\infty = 1,5 \text{ МПа}$). Как указывалось выше, диапазон времен релаксации $[\tau_1, \tau_N]$ должен выбираться с учетом диапазона изменения не только физического, но и приведенного времени. Оценка максимального значения приведенного времени проводилась путем экстраполяции временной зависимости релаксационного модуля $E(t)$ при $\varepsilon_0 = 3\%$ до уровня длительного модуля E_∞ . С этой целью временная зависимость релаксационного модуля $E(t)$ [МПа] аппроксимировалась выражением

$$E(t) = \tilde{E}_1 \exp(-[\lg(t - t_0)]/x_1) + \tilde{E}_2 \exp(-[\lg(t - t_0)]/x_2) \quad (6.1)$$

в котором $t_0 = 3 \text{ с}$ – время выхода на участок релаксации. Параметры $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, x_1, x_2$ выбирались из условия минимума среднеквадратичного отклонения функции $E(t)$ от ее экспериментальных значений в 15 точках ($t > t_0$). Использовалась двухуровневая схема минимизации функции среднеквадратичного отклонения. На первом уровне эта функция минимизировалась по параметрам x_1, x_2 методом координатного спуска. На втором уровне классическим методом наименьших квадратов определялись оптимальные значения параметров \tilde{E}_1, \tilde{E}_2 , соответствующие фиксированным значениям параметров x_1, x_2 . В результате минимизации были найдены следующие оптимальные значения параметров: $\tilde{E}_1 = 1,61 \text{ МПа}$; $\tilde{E}_2 = 4,99 \text{ МПа}$; $x_1 = 2,35$; $x_2 = 6,65$. При этих

s	0,75	0,85	0,95	1,0	1,05	1,15	1,25
$\Delta_1(s)$, % при $N = 5$	13,5	10,7	8,4	7,4	6,4	7,9	9,4
$\Delta_1(s)$, % при $N = 9$	9,0*	5,2	2,5	1,8	1,6	3,0	4,7*
$\Delta_1(s)$, % при $N = 17$	20,5*	3,9*	0,9*	0,3	0,5*	1,6*	3,4*

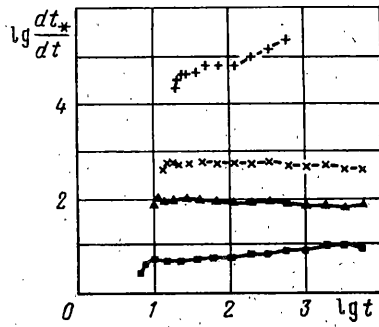
значениях параметров максимальная по всем экспериментальным точкам величина относительной погрешности аппроксимации (6.1) составила 1,0%. На фиг. 3 наряду с экспериментальными значениями релаксационного модуля показаны его значения, экстраполированные с использованием (6.1). На этой фигуре видно, что при временах порядка 10^8 секунд экстраполированный линейный релаксационный модуль достигает минимального из полученных в эксперименте значений. Именно это значение времени (10^8 секунд) может служить верхней оценкой величины приведенного времени и, следовательно, верхней границей релаксационного спектра τ_N .

При определении параметров линейной модели использовался набор из 25 точек, изображенный на фиг. 3 (16 экспериментальных точек + 9 точек, полученных экстраполяцией). Минимальное время релаксации τ_1 полагалось равным 1 секунде, а максимальное время $\tau_N = 10^8$ секунд. Рассматривались три варианта представления ядра релаксации: одна экспонента на два порядка времени, а также одна и две экспоненты на один порядок времени ($N = 5, 9, 17$ соответственно). Релаксационный спектр строился путем разбиения отрезка $[\lg \tau_1, \lg \tau_N]$ на $N-1$ интервалов, длины которых изменяются в геометрической прогрессии с показателем s . Величина показателя s варьировалась в диапазоне от 0,5 до 2. В табл. 2 приведены зависимости максимальной относительной погрешности Δ_1 (см. (5.7)) от величины параметра s . В этой таблице звездочкой отмечены варианты, для которых оптимальный набор значений модулей упругости, полученный в результате решения системы (5.6), содержал хотя бы одно отрицательное значение. Как видно из табл. 2, диапазон физически допустимых значений параметра s резко сужается с увеличением количества экспонент N .

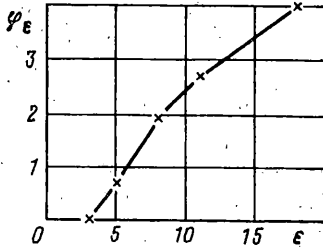
На фиг. 4 изображены результаты идентификации параметров линейной модели в виде наборов точек в плоскости $(\lg \tau_k, E_k)$. Светлые точки соответствуют $N = 5$, кресты — $N = 9$, а темные точки — $N = 17$.

Перейдем теперь к идентификации функции $\Phi = dt^*/dt$ на основе экспериментальных данных по релаксации напряжений. На фиг. 5 показаны временные зависимости $dt^*(t)/dt$, полученные при обработке изображенных на фиг. 3 экспериментальных данных с использованием (3.9), (3.10). При расчете этих зависимостей история напряжения $\sigma(t)$ представлялась в виде кусочно-линейной функции времени, узлы которой совпадали с экспериментальными точками. Система шагов численного интегрирования по времени Δt строилась таким образом, что каждый временной интервал между двумя соседними экспериментальными точками оказывался разбитым равномерно в логарифмическом масштабе на 4 шага численного интегрирования.

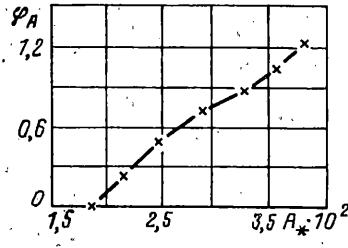
Относительно слабая зависимость производной dt^*/dt от времени на участках релаксации напряжений дает основание в первом приближении рассматривать функцию Φ как функцию только деформации, т.е. $\Phi = \Phi_1(\epsilon)$. Для каждого из четырех значений деформации ($\epsilon = 5; 8; 11; 18\%$) примем в качестве значения функции $\Phi(\epsilon) = \lg \Phi_1(\epsilon)$ среднее по времени значение логарифма соответствующей функции $dt^*(t)/dt$ (фиг. 5). Представим функцию $\Phi(\epsilon)$ в виде кусочно-линейной функции, которая тождественно равна 0 в области линейного поведения ($|\epsilon| \leq 3\%$). Тогда средняя по времени величина отклонения теоретического прогноза от экспериментальных



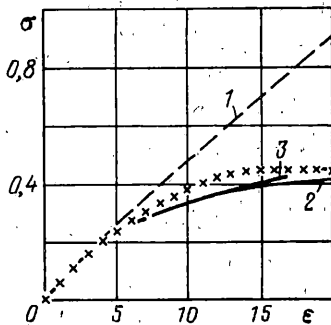
Фиг. 5



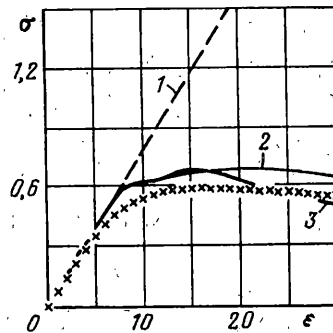
Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

данных в режимах релаксации напряжений будет находиться в диапазоне от 1,2% (при $\epsilon = 8\%$) до 4,7% (при $\epsilon = 18\%$). Если же значения функции $\varphi(\epsilon)$ при $\epsilon = 5; 8; 11; 18\%$ определять из условия минимума среднего отклонения результатов теоретического прогноза от соответствующих экспериментальных данных, то в этом случае величины отклонений прогноза от эксперимента будут находиться в диапазоне от 1,0% (при $\epsilon = 8\%$) до 4,0% (при $\epsilon = 18\%$).

Как видно из фиг. 5, экспериментальные данные по релаксации напряжений при $\epsilon = 18\%$ наименее хорошо согласуются с гипотезой о том, что функция Φ зависит только от деформации. С целью уточнения теоретического прогноза релаксации напряжений при $\epsilon = 18\%$ рассмотрим гипотезу о том, что аргументами функции Φ являются деформация ϵ и удельная рассеянная энергия A_* , т.е. $\Phi = \Phi_2(\epsilon, A_*)$. В пользу этой гипотезы свидетельствует факт разрушения образца в процессе релаксации напряжений. Представим функцию $\lg \Phi_2(\epsilon, A_*)$ в следующем виде:

$$\lg \Phi_2(\epsilon, A_*) = \varphi_\epsilon(\epsilon) + \varphi_A(A_*) \quad (6.2)$$

Для того, чтобы сохранить преемственность в описании процессов релаксации напряжений при $\varepsilon \leq 11\%$, будем считать, что в этом диапазоне деформаций функция $\varphi_\varepsilon(\varepsilon)$ совпадает с ранее определенной функцией $\varphi(\varepsilon)$. Будем также считать, что в процессе релаксации при $\varepsilon = 11\%$ величина удельной рассеянной энергии не превосходит своего порогового значения $A_0(\varphi_A(A_*)) \equiv 0$ при $A_* \leq A_0$ вплоть до последней экспериментальной точки, в которой $A_* = 0,0187$ МПа. На фиг. 5 видно, что эффект влияния удельной рассеянной энергии проявляется уже в самом начале участка релаксации при $\varepsilon = 18\%$ и, следовательно, в этот момент величина A_* не должна быть меньше своего порогового значения A_0 . Это обстоятельство позволяет получить верхнюю оценку величины A_0 . В качестве такой оценки может выступать значение $A_* = 0,0212$ МПа, полученное для начального момента участка релаксации напряжений при $\varepsilon = 18\%$ в рамках ранее рассмотренной зависимости $\Phi = \Phi_1(\varepsilon)$. Таким образом, имеющиеся экспериментальные данные позволяют получить достаточно узкую двухстороннюю оценку порогового значения удельной рассеянной энергии ($0,0187$ МПа $\leq A_0 \leq 0,0212$ МПа). Строго говоря, две неизвестные величины ($\varphi_\varepsilon(18\%)$ и A_0) не могут быть однозначно определены из одного уравнения (6.2). Однако, учитывая узкий диапазон возможных значений A_0 , можно в первом приближении положить $A_0 = 0,0187$ МПа, а величину $\varphi_\varepsilon(18\%)$ определить из условия $A_*(t_0) = A_0$, в котором $t_0 = 18$ с – время выхода на режим релаксации. Определенная из этого условия величина $\varphi_\varepsilon(18\%)$ оказалась равной 4,0. Из представления (6.2) следует, что на участке релаксации при $\varepsilon = 18\%$:

$$\varphi_A(A_*(t)) = \lg(dt_*(t)/dt) - \varphi_\varepsilon(18\%) \quad (6.3)$$

В правой части уравнения (6.3) стоит известная функция времени, а в левой части – подлежащая идентификации функция φ_A , аргументом которой выступает монотонно возрастающая функция $A_*(t)$. Наиболее простой способ идентификации функции φ_A состоит в использовании известной зависимости $A_*(t)$, полученной при решении "усеченной" системы (3.1). Однако для более точной идентификации необходимо использовать зависимость $A_*(t)$, полученную при решении полной системы (3.1). Следует отметить, что третье уравнение этой системы, в свою очередь, зависит от идентифицируемой функции φ_A . С учетом этого обстоятельства может быть предложена следующая итерационная схема идентификации функции φ_A :

$$\varphi_A^{(n+1)}(A_*^{(n)}(t)) = \lg(dt_*^{(n)}(t)/dt) - \varphi_\varepsilon(18\%) \quad (6.4)$$

В этом соотношении функция $A_*^{(n)}(t)$ является решением системы (3.1) для n -го приближения функции φ_A , а $\varphi_A^{(n+1)}(A_*)$ – следующее приближение этой функции. Итерационный процесс (6.4) применялся при шести значениях времени t , лежащих в интервале от 19,8 секунд до 580 секунд. Функция $\varphi_A(A_*)$ на каждой итерации представлялась в виде кусочно-линейной функции, тождественно равной 0 при $A_* \leq A_0$. В качестве начального приближения использовалась нулевая функция. Итерационный процесс оказался достаточно быстро сходящимся (после 6 итераций погрешность не превышала 0,05%), причем для каждого из 6 рассматриваемых моментов времени имела место двухсторонняя сходимость величины $A_*(t)$. Полученные в результате идентификации функции $\varphi_\varepsilon(\varepsilon)$ и $\varphi_A(A_*)$ представлены на фиг. 6, 7. При использовании этих функций среднее отклонение результатов теоретического прогноза от экспериментальных данных по релаксации напряжений при $\varepsilon = 18\%$ составляет 1,0%.

Материальные константы и функции нелинейной эндохронной модели, которые были определены на основе экспериментальных данных по релаксации напряжений, использовались при теоретическом прогнозе результатов других опытов, а именно: опытов на растяжение с постоянными скоростями деформации $\dot{\varepsilon}_0 = 0,001$ с⁻¹ (фиг. 8) и

$\dot{\epsilon}_0 = 1 \text{ с}^{-1}$ (фиг. 9). На фиг. 8, 9 представлены результаты линейного ($\Phi \equiv 1$, кривые 1) и двух нелинейных (для $\Phi = \Phi_1(\epsilon)$ – кривые 2 и $\Phi = \Phi_2(\epsilon, A_*)$ – кривые 3) прогнозов диаграмм растяжения $\sigma(\epsilon)$, а также результаты соответствующих опытов, которые проводились вплоть до разрушения образцов (отмечены крестами). Если для нелинейных прогнозов используется функция $\Phi = \Phi_1(\epsilon)$, то среднее отклонение результатов этих прогнозов от экспериментальных данных в диапазоне скоростей деформирования от $0,001 \text{ с}^{-1}$ до 1 с^{-1} не превышает 13,8%. Если же используется функция $\Phi = \Phi_2(\epsilon, A_*)$, то верхняя граница отклонений теоретического прогноза от эксперимента снижается до величины 9,6%. При этом наибольшее увеличение точности теоретического прогноза наблюдается в области деформаций, близких к разрушающей деформации. Линейная же теория дает результаты, которые в 2,5–4 раза превосходят результаты эксперимента.

Авторы благодарят В.И. Герасева и Л.А. Давыдову за предоставленные экспериментальные данные.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-00316).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быков Д.Л. Об учете повреждений в наполненных полимерных материалах // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 1. С. 19–28.
2. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
3. Гольдман А.Я. Объемное деформирование пластмасс. Л.: Машиностроение, 1984. 232 с.
4. Knauss W.G., Emri I.J. Non-linear viscoelasticity based on free volume consideration // J. Comput. and Structures. 1981. V. 15. № 1–3. P. 123–128.
5. Ильюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
6. Уржумцев Ю.С. Прогнозирование длительного сопротивления полимерных материалов. М.: Наука, 1982. 222 с.

Королев

Поступила в редакцию
12.02.1999