МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1999

УДК 539.214;539.374

© 1999 г. О.А. КАЙБЫШЕВ, А.И. ПШЕНИЧНЮК

СТРУКТУРНАЯ СВЕРХПЛАСТИЧНОСТЬ: ОТ МЕХАНИЗМА ДЕФОРМАЦИИ К ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ СООТНОШЕНИЯМ

Приведена краткая история формирования представлений о физических механизмах сверхпластической деформации. Представления использованы для описания тензорной связи между напряжениями и скоростями деформации в случае монотонного многокомпонентного нагружения. Показано, что предположение о соосности тензоров напряжения и скорости деформации в общем случае не выполняется.

1. Введение. Сверхпластичность определяется как способность материала к большим (тысячи процентов) пластическим деформациям предшествующим разрушению. Знание механизма сверхпластической деформации (СПД) позволяет, во первых, целенаправленно подойти к получению материалов с требуемыми характеристиками, например, перечислить условия на материал обеспечивающие возможность реализации высокоскоростных или низкотемпературных режимов СПД. Во-вторых, это формирует необходимый базис для конструктивного построения определяющих соотношений (ОС) необходимых при машинном моделировании в задачах оптимизаций технологических процессов, основанных на использовании СПД.

Конструктивную схему построения ОС можно развить лишь при условии ясного понимания физического механизма пластической деформации, т.е. всех процессов, сопровождающих деформационные перестройки на структурном уровне заданном размером зерна (или группы зерен при формировании коллективных эффектов).

Ключом к пониманию физических механизмов пластической деформации оказалось открытие линейного дефекта кристаллического строения – дислокации. Дислокация формирует в решетке анизотропное поле упругих напряжений и взаимодействует как с упругими полями других дислокаций так и с упругим полем, инициированным внешним нагружением. Дислокация легко распространяется в кристаллической решетке по так называемым плоскостям скольжения под действием сдвиговых напряжений, действующих в этих плоскостях. При высоких температурах и наличии препятствия она может переползать в соседние плоскости скольжения. Выход сегмента дислокации на границу образца является элементарным актом формоизменения, т.к. приводит к образованию ступеньки с высотой равной модулю вектора Бюргерса. Из множества таких элементарных актов и складывается результирующее изменение формы. Дислокации могут рождаться, вступить в дислокационные реакции с дислокациями других типов (в том числе аннигилировать), способствовать или препятствовать распространению друг друга, взаимодействовать с другими дефектами кристаллического строения, среди которых наиболее важны вакансии, примесные атомы и границы зерен. Так, например, границы зерен могут препятствовать распространению дислокаций, формируя их скопления. При достаточной мощности такого скопления оно может инициировать скольжение в соседнем зерне, плоскость скольжения в котором, вообще говоря, ориентирована иначе. При высоких температурах, облегчающих диффузионные перестройки, граница зерен может ‘растворить’ дислокацию (явление спрединга) и превратить ее в набор зернограничных дислокаций. Такое разнообразие процессов не позволяет сформулировать формального описания пригодного на все случаи жизни. Поэтому, не смотря на то, что элементарные процессы, сопровождающие пластическую деформацию, ясны, приходится при исследовании конкретной задачи обеднять полный сценарий до допускающего формализацию, но сохранять в нем главное, что отвечает за изучаемое явление. На этом этапе особенно велика роль экспериментальных исследований.

Использование дислокационных представлений для анализа механизмов пластической деформации в крупнозернистых материалах с исчерпывающей полнотой изложено в классической монографии Фриделя [1]. И хотя в монографии это явно не подчеркивается, но отмеченный факт крупного зерна имеет принципиальное значение (какое зерно считать крупным выяснится в дальнейшем). Экспериментально установлено, что в этом случае деформации всех зерен и образца в целом подобны. Иными словами одно зерно уже является представительным объемом. При этом достаточно проанализировать происходящие в нем процессы и обеспечить сплошность материала при передаче деформации от зерна к зерну. Заметим, что это и составляет существо модели Тейлора. Отклик зерна на приложенное напряжение определяется типом кристаллической решетки, количеством и типом распределенных в ней дефектов. Для того, чтобы отклик можно было назвать пластической деформацией, приложенное к образцу напряжение должно во всяком случае обеспечивать достаточную дислокационную активность (ниже не будут рассматриваться бездислокационные механизмы, называемые диффузионной ползучестью и значимые лишь при низких напряжениях и высоких температурах). Наиболее распространенными источниками дислокаций являются источники Франка – Рида, представляющие собой ростовые сегменты дислокаций, закрепленные дефектами. Напряжение инициации источника определяется длиной этой сегмента, а поскольку она не может превышать размера зерна, то соответствующее напряжение имеет вид $\sigma_{FR} = c\mu b/d$, где c – безразмерная константа, определяемая типом дислокации и геометрией зерна, μ – модуль сдвига, b – модуль вектора Бюргерса, d – размер зерна. Работающие источники формируют серию дислокационных петель, распространяющихся до ближайшего препятствия – границы зерна (хотя это может быть и препятствие другой природы). При некотором числе испущенных петель их суммарное обратное упругое поле закроет источник и будет сформировано стационарное дислокационное скопление. Если мощность этого скопления достаточно велика, то его упругие поля в сочетании с внешним приложенным напряжением вызовут активизацию источника и скольжение в соседнем зерне. Такая передача деформации от зерна к зерну рассматривается как переход в режим пластического течения. Напряжение, обеспечивающее требуемую мощность дислокационных скоплений, совпадает с экспериментально регистрируемым напряжением течения, называется напряжением Холла – Петча и хорошо описывается зависимостью $\sigma_{HP} = \sigma_0 + Kd^{-1/2}$. Микроскопическое наполнение величин σ_0 и K рассмотрено в работе [2]. Отсюда ясно, что если характерные напряжения в рассматриваемом поликристаллическом материале превышают напряжения Холла – Петча, то пластическая деформация будет осуществляться с высокими скоростями, определяемыми (в первом приближении) скоростью консервативного движения дислокаций, деформация зерен по порядку величины будет совпадать с деформацией образца в целом, несогласованность (в общем случае) систем скольжения в разных зернах достаточно быстро приведет к формированию концентраторов напряжений и т.к. их релаксация при высоких скоростях деформации затруднена (или даже невозможна), быстро наступит разрушение. Заметим, что в этом сценарии отсутствует температура, ее роль вторична и проявляется только в скоростях релаксации формируемых концентраторов. Однако это лишь грубая схема. Реальная картина пластической деформации оказывается несравненно более сложной. Так, если в зерне активна лишь одна система скольжения (как и описано выше), то близко расположенные плоскости скольжения могут формировать устойчивые конфигурации, называемые дислокационными диполями, что регистрируется в макроэксперименте как стадия деформационного упрочнения. Для высокосимметричной кристаллической решетки равно активных систем скольжения будет заведомо больше одной. При этом могут формироваться сложные дислокационные образования типа пространственных сеток с характерным размером ячейки, зависящим от действующего напряжения. Дальнейшая эволюция этого образования сильно зависит от температуры, запускающей неконсервативные механизмы движения дислокаций, и может реализовываться либо как дислокационная ползучесть, либо приводить к разрушению, если времена релаксации концентраторов – узлов сети – не согласованы со скоростью деформации. Дополнительно все это сопровождается полигонизационными процессами, приводящими к формированию субструктуры. Точечные дефекты типа примесных атомов и вакансий еще более усложняют картину, формируя атмосферы и связанные с ними дополнительные эффекты. Известны попытки формализации описанной картины деформации с целью построения ОС для больших пластических деформаций поликристаллических материалов [3]. Однако последовательно реализовать программу не удается; на определенном этапе приходится вводить феноменологические конструкции, описывающие упрочнение и находить их характеристики с использованием экспериментальных результатов. В последние годы весь этот круг вопросов является предметом исследования нового направления в материаловедении, получившего название ‘Физическая мезомеханика’ и развиваемого в трудах научной школы академика В.Е. Панина.

Казалось бы, что в выше приведенной схеме перечислены все элементарные процессы, сопровождающие пластическую деформацию поликристаллических материалов и можно надеяться, что понять природу СПД можно отфильтровав второстепенные детали. Однако неожиданно оказалось, что акцент при изучении механизма СПД переносится на совершенно иные процессы.

В работах [4–12] на основе экспериментальных исследований, проведенных для случая одноосного нагружения, мы сформулировали сценарий процессов сопровождающих СПД и продемонстрировали возможности его формализации для описания одноосных экспериментов. В настоящей работе мы приводим краткую историю развития представлений о физических механизмах СПД и используем их для описания тензорной связи между напряжениями и скоростями деформации в случае монотонного многокомпонентного нагружения.

2. Механизм СПД. С началом целенаправленного изучения СП экспериментаторы быстро установили, что: 1) СП наблюдается в интервале скоростей деформации $\dot{\varepsilon} = 10^{-4}$–$10^{-2}$ c^{-1} (на первоначально изучавшихся классических эвтектоидах) при температурах $T > 0{,}4\,T_m$, где T_m – температура плавления материала; 2) для реализации режима СП материал должен иметь достаточно малый размер зерен ($< 10\ \mu m$); 3) зерна в процессе деформации не повторяют деформацию образца в целом, их вытянутость вдоль оси растяжения ничтожна по сравнению с удлинением образца. Последний факт однозначно свидетельствовал, что зерно уже не является представительным объемом и, в сравнении с пластичностью крупнозернистых материалов, в условиях сверхпластичности основные процессы перенесены из тела зерна (в зернах как бы мало что происходит) на его периферию – границу. Система внутренних поверхностей раздела (границ зерен или межфазных границ) должна обеспечить условия для их реализации, чего и позволяет добиться малый размер зерен, обеспечивая увеличение удельной площади ГЗ. Начался этап интенсивного исследования процесса зернограничного проскальзывания (ЗГП).

Понять механизм ЗГП невозможно без ясного представления о том, что же такое ГЗ. Поэтому изучение ЗГП сопровождалось постоянными дискуссиями о природе ГЗ в поликристаллах. Обсуждались варианты от аморфной (часто неправомерно отождествлявшейся с жидкой и называвшейся плохо определенным термином ‘жидкоподобная’) до кристаллической структуры. История развития этих представлений, начиная с островковой модели Мотта и кончая современными преставлениями, основанными на развитой Боллманом концепции решетки совпадающих узлов, задающей нулевое приближение для расчета структуры ГЗ методами молекулярной статики, изложена в многочисленных обзорах и монографиях [13, 14]. Краткий итог этого этапа исследований сформулируем следующим образом. Граница зерен является двумерной кристаллической структурой, характеристики которой определяются разориентировкой сопряженных кристаллитов и заданием плоскости залегания границы. На фоне регулярной структуры возможно задание некоторого минимального нарушения регулярности (или дефекта), который в полной аналогии с дефектом объемной кристаллической структуры называется зернограничной дислокацией. Необходимо подчеркнуть, что это справедливо для границ зерен в металлических материалах. В границах зерен керамических материалов при высокой температуре действительно возможно образование жидкой фазы, что определяется изменением химического состава материала в окрестности ГЗ. Кристаллическая структура ГЗ была подтверждена в экспериментах по изучению ЗГП.

Исследование ЗГП проводится на специально приготовленных модельных объектах – бикристаллах. Экспериментально наблюдаемый сдвиг вдоль плоскости границы в общем случае сопровождается объемной деформацией кристаллитов, что затрудняет интерпретацию результатов. В [15] был предложен метод, который позволяет как разделять эффекты ЗГП и ВЗС, так и исследовать их взаимодействие. Это достигается выбором в качестве объекта исследований цинковых бикристаллов с 90° симметричной границей наклона. Гексагональная решетка цинка имеет ярко выраженную систему легкого скольжения, заданную расположением наиболее плотно упакованной (базисной) атомной плоскости. Такой бикристалл всегда можно ориентировать относительно оси растяжения так, что сдвиговые напряжения на базисных плоскостях обоих кристаллитов будут нулевыми и внутризеренная деформация практически полностью подавлена. При этом плоскость границы совпадает с плоскостью максимальных сдвиговых напряжений. В этой ситуации реализуется вид ЗГП, который был назван собственным ЗГП. При любой другой ориентации бикристалла относительно оси растяжения сдвиговые напряжения на базисных плоскостях кристаллитов будут отличны от нуля и нагружение сопровождается внутризеренным скольжением. Оказалось, что это способствует ускорению проскальзывания вдоль плоскости границы и этот вариант ЗГП был назван стимулированным ЗГП. Детальные эксперименты по этой схеме позднее были проведены на бикристаллах кадмия (кристаллическая решетка той же симметрии) [16] и цинка [17]. Измерялась временная зависимость величины сдвига вдоль плоскости границы при различных температурах и растягивающих усилиях. Установлено, что скорость собственного ЗГП в течение длительного промежутка времени остается практически постоянной, а ее зависимость от температуры T и сдвигового напряжения в плоскости границы σ имеет вид $\dot{S} = \sigma \exp(-E_B / kT)$, где E_B – энергия активации зернограничной диффузии. В случае стимулированного ЗГП скорость проскальзывания существенно зависит от времени. В начальный момент времени скорость значительно превышает скорость собственного ЗГП и имеет вид $\dot{S}_0 = \sigma^2 \exp(-E_V / kT)$, где E_V – энергия активации решеточной самодиффузии. С увеличением времени эффект стимуляции монотонно уменьшается и в определенный момент (~600 с в Cd и 1200 с в Zn) скорость падает до скорости собственного ЗГП. Дислокационный механизм ЗГП был подтвержден следующими экспериментальными фактами: пространственная неоднородность сдвига вдоль направления скольжения; линейная связь между скольжением и миграцией; анизотропия скорости скольжения в плоскости границы.

Первая теоретическая модель, рассматривающая ЗГП как процесс движения зернограничных дислокаций (ЗГД) была развита Гейтсом [18]. Он получил выражение для скорости движения структурных ЗГД $V_B = Cb_B\sigma\delta D_B/kT$, где b_B – модуль вектора

Бюргерса ЗГД, δ – эффективная ширина границы, D_B – коэффициент зернограничной самодиффузии, C – безразмерная константа, значение которой определяется природой подвижного семейства ЗГД. Для скорости ЗГП использовано соотношение Орована $\dot{S} = b_B \rho_B V_B$, в котором ρ_B понималось как плотность структурных ЗГД. Недостатки этой модели проанализированы в работе [4]. Здесь лишь отметим, что в соответствии с моделью Гейтса $\dot{S}_{Cd} / \dot{S}_{Zn} \sim 10^3$, тогда как в реальном эксперименте $\dot{S}_{Cd} / \dot{S}_{Zn} \sim 3$. Столь разительное расхождение объясняется тем, что ρ_B не является плотностью структурных ЗГД, а формируется в результате спридинга решеточных дислокаций. Однако оставалось неясным почему при низкой скорости ЗГД (Zn) в границе формируется высокая плотность дислокаций и наоборот. Такое поведение, характерное для систем с отрицательной обратной связью, удалось описать системой двух гиперболических уравнений первого порядка с квадратичной нелинейностью. Анализ решения приводит к следующим представлениям о механизме стимулированного ЗГП в бикристаллах. Решеточные дислокации, образованные в сопряженных кристаллитах, достигают границы бикристалла и в течение времени спридинга диссоциируют, формируя два подвижных семейства зернограничных дислокаций с противоположными векторами Бюргерса, т.е. двигающихся навстречу друг другу и обеспечивающих тем самым локальное проскальзывание. При низких скоростях ЗГД (низкие температуры или высокие значения энергии активации зернограничной диффузии, т.е цинк в данном случае) невысокая скорость аннигиляции позволяет решеточным источникам сформировать высокую плотность ЗГД. При достижении некоторой плотности в окрестности границы формируется дополнительное упругое поле, препятствующее распространению решеточных дислокаций. Формально это сводится к переопределению времени спридинга. Устанавливается динамическое равновесие между аннигиляцией и притоком, что регистрируется как достаточно протяженный во времени участок с постоянной скоростью. Остающиеся в кристаллитах решеточные дислокации приводят к деформационному упрочнению, что непосредственно наблюдается при измерении микротвердости в окрестности границы цинковых бикристаллов.

При высокой скорости ЗГД (высокие температуры или низкие значения энергии активации зернограничной диффузии) скорость аннигиляции высока и время жизни дислокаций в границе уменьшается. При этом эффективность решеточных источников недостаточна для формирования высокой плотности ЗГД и временная зависимость скорости ЗГП непосредственно отслеживает темп деформационного упрочнения внутризеренного скольжения. Количественное сравнение расчетов с эспериментальными результатами вполне удовлетворительное [4]. Таким образом дислокационные представления продемонстрировали свою эффективность при анализе механизма ЗГП в бикристаллах.

Однако в условиях поликристалла развитие ЗГП осложнено неотъемлемым элементом структуры – тройными стыками, в которых плоскости соседних ГЗ составляют двугранный угол близкий к $2\pi/3$. Практически все известные модели СП отличаются способами, которыми осуществляется согласованный сдвиг по двум границам, встречающимся в тройном стыке. Достаточно полная коллекция этих способов приведена в обзоре [19]. Удивительно, что независимо от способа, заявленного в качестве контролирующего скорость деформации, все модели приводят к одному и тому же выражению для скорости деформации на стадии стабильного течения (когда исчезает зависимость от деформации):

$$\dot{\varepsilon} = C\left(\frac{b}{d}\right)^{1/n}\left(\frac{\sigma - \sigma_{th}}{\mu}\right)^{1/m}\frac{\mu b D_0}{kT}\exp(-E/kT)$$

Здесь b – модуль вектора Бюргерса, d – средний размер зерен; σ – внешнее напряжение, σ_{th} – пороговое напряжение, μ – модуль сдвига, k – постоянная Больцмана, T – температура испытаний, D_0 – предэкспонента коэффициента диффузии, E – энергия активации СП – в общем случае средне взвешенное энергий активации зернограничной и решеточной диффузии, n и m – параметры наследованные от феноменологической формы и определяющие зависимость от размера зерен и напряжения, C – константа, единственно значением которой и отличаются известные модели СП. Некоторое разнообразие проявляется лишь в оценке численного значения безразмерной константы C. Ее величина в зависимости от модели меняется от 0,6 до 200. Недостатки всех этих моделей перечислены в [11], здесь лишь отметим, что отсутствие успеха было связано с тем, что модели, не подчеркивая это явно, представительным объемом объявили некоторый 'типичный' тройной стык. Ошибочность этих представлений стала осознаваться после проведения экспериментов по изучению структурных изменений в процессе деформации. Было установлено, что: зерна в процессе деформации меняют соседей и, более того; большие группы зерен перемещаются в образце как целое с изменением ориентации. Первый факт послужил основой для формулировки широко известной модели Эшби – Веррала [20], в которой был умозрительно сконструирован механизм перестановки зерен при сохранении сплошности материала. Однако, не смотря на привлекательную оригинальность механизма, последующий анализ показал, что он не может происходить в трехмерном поликристалле [21]. Второй факт выглядел просто обескураживающим: с одной стороны есть требование малого размера зерен, а с другой – большие группы зерен перемещаются как единое образование. И лишь позже стало ясно, что это было первое свидетельство действия кооперативного деформационного механизма.

Параллельно с анализом физических механизмов в исследовании сверхпластичности протекал более успешный процесс расширения спектра материалов и условий, в которых реализуется режим СП. В керамиках и композитах сверхпластичность была обнаружена при скоростях (в обратных секундах) приблизительно на три-четыре порядка выше, чем скорости, характерные для классических эвтектоидов. Для сверхмелкокристаллических материалов удалось заметно уменьшить температуру – низкотемпературная СП. Начато изучение нанокристаллических материалов. Надежды на существование общего для всех материалов и условий микромеханизма, ответственного за реализацию режима СП, не оправдались. Появились работы, в которых было показано, что механизмы, контролирующие скорость могут быть разными при низких и высоких температурах даже для одного и того же материала [22].

Вопрос о природе СП перешел в другую плоскость: что объединяет столь разные материалы, испытываемые при столь разных условиях, таким образом, что они проявляют единое поведение – СП. Ответ, в общем-то, ясен: их объединяет отсутствие условий для разрушения. Казалось бы – бессодержательная тавтология и, тем не менее, она приводит к новым экспериментам и формированию новых взглядов на СП в целом.

Отсутствие условий для разрушения сводится к отсутствию условий для локализации деформации (приводящей к вязкому разрушению) и концентрации напряжений (приводящей, при соответствующих скоростях нагружения, к развитию трещин и хрупкому разрушению) или, иначе, к требованию однородности течения в пределах всего образца (заметим, что речь не идет об однородности деформации на мезоуровне, масштаб которого задается средним размером зерен) и в течение достаточного промежутка времени. Требуемая однородность может быть достигнута только специфической организацией крупномасштабной картины течения: она должна выглядеть не как суперпозиция независимых процессов, происходящих в различных частях деформируемого образца, а представлять собой единый когерентный на макроуровне процесс. Именно изучение организации крупномасштабной картины течения и привело к формированию новых представлений о СП.

Структурные исследования показывают [23–25], что на стадии выхода кривых нагружения на режим стабильного течения в материале формируются отдельные и независимые участки течения, представляющие собой либо неоднородные сдвиги вдоль благоприятно ориентированных границ зерен, либо проявления дислокационной активности в достаточно крупных зернах. При достижении стадии стабильного течения, что уже является признаком выхода на режим СП [19], происходит объединение отдельных участков течения и деформация осуществляется посредством согласованного сдвига вдоль поверхностей, проходящих через все поперечное сечение образца и предельно близких к плоскостям с максимальными сдвиговыми напряжениями [23–29]. Эти поверхности были названы полосами кооперативного зернограничного проскальзывания (КЗГП) [26]. Сформированная действием полос КЗГП картина течения, позволяет обеспечить максимальную однородность деформации в пределах всего образца.

Как происходит объединение независимых участков течения в когерентно действующую сдвиговую полосу? Было проведено экспериментальное изучение распределения величины двугранных углов в тройных стыках, принадлежащих полосе и расположенных вне нее [25]. Оказалось, что вне полосы двугранные углы равны приблизительно $2\pi/3$, т.е близки к равновесной конфигурации. Тройные стыки, принадлежащие полосе, оказались 'выпрямленными', т.е. их двугранные углы обнаружили отчетливую тенденцию стремления к развернутым (равным π). При исследовании ЗГП в три-кристаллах [5] обнаружили, что выпрямление тройного стыка происходит в результате локальной миграции (выпучивания) одной из границ (в плоскости которой действуют максимальные сдвиговые напряжения) до такой перестройки конфигурации тройного стыка, которая обеспечивает совместность сдвига по двум из трех границ, составляющих данный стык. И, наконец, в некоторых, особо неблагоприятных конфигурациях (достаточно редких), полоса была вынуждена пересекать тело зерна.

Изложенных фактов о способе организации крупномасштабной картины течения оказалось достаточно для формулировки новой модели структурной СП. При однородном распределении полос КЗГП по длине образца скорость деформации определяется соотношением (чисто геометрическим по происхождению):

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{l}(t)}{l(t)} = \frac{\langle M \rangle}{M_0} \frac{V}{\sqrt{2}\langle d \rangle}$$

где $l(t)$ – длина образца в момент времени t, $\langle M \rangle$ – число КЗГП, активных при данных условиях нагружения, M_0 – максимально возможное число полос в испытуемом образце, V – скорость сдвига в полосе, $\langle d \rangle$ – средний размер зерен в материале. Напомним, что все известные модели СП используют для скорости деформации выражение $\dot{\varepsilon} = V\langle d \rangle$, где под V понимается скорость преодоления тройного стыка, т.е. вся макроскопическая картина деформации сводится к изучению одного тройного стыка.

Поскольку формирование полосы КЗГП обеспечивается главным образом границами зерен, испытавшими локальную миграцию, необходимо выяснить: какое количество ГЗ в материале при данных условиях нагружения испытывает локальную миграцию; какое количество полос КЗГП можно сфомировать из данного количества промигрировавших границ.

Ответ на первый вопрос основан на условии локальной миграции, полученном в работах [5–7]. Было установлено, что при заданной температуре T и сдвиговом напряжении в плоскости границы τ мигрируют все границы, чьи длины в направлении проскальзывания попадают в интервал $[L_{LM}, L_D]$. Если длина границы L меньше величины L_{LM}, то сформированное скопление ЗГД не обладает достаточной мощностью, чтобы обеспечить локальную миграцию. Если же L превышает L_D, то локальная миграция подавлена более интенсивным процессом – дислокационной ползучестью. Число границ, попадающих в интервал $[L_{LM}, L_D]$ определяется функцией распределения длин ГЗ в данном материале (при отсутствии корреляции между длиной границы и действующим в ее плоскости сдвиговым напряжением, иначе необходимо рассматривать совместное распределение по L и τ – это может иметь место в материалах с сильно выраженной текстурой). С использованием логнормального распределения была вычислена вероятность того, что одна случайно выбранная граница может принимать участие в формировании полосы. Расчеты показали, что в материале с большим средним размером зерен условия для локальной миграции отсутствуют при всех напряжениях. Уменьшение среднего размера зерен приводит к формированию условий миграции в определенном интервале напряжений. При увеличении температуры локальная миграция происходит в более широких интервалах как размеров зерен, так и напряжений. Увеличение дисперсии приводит к уменьшению числа границ зерен, принимающих участие в формировании полос КЗГП, но расширяет соответствующий интервал напряжений.

Определив полное число границ зерен, принимающих участие в формировании полос КЗГП, можно вычислить количество полос, которое может быть построено из данных границ. Определим полосу как некоторую негладкую поверхность, составленную из n границ зерен. Если половина из этих границ испытала локальную миграцию, то каждая из них вовлекла в деформацию по одной соседней границе и вся поверхность начинает работать как когерентная сдвиговая полоса. Однако это справедливо только в том случае, если подстроившиеся границы распределены предельно однородно вдоль полосы, т.е. если две границы зерен, испытавшие миграцию, разделены одной границей, вовлекаемой в кооперацию. В противном случае половины подстроившихся границ может оказаться недостаточно для формирования активной полосы. С другой стороны есть экспериментальные свидетельства о том, что дислокационное скопление, сформированное на некоторой границе, может включить в кооперацию более чем одну соседнюю границу. В этом случае для формирования активной полосы может оказаться достаточным, если миграции будет подвержено менее половины из n границ, составляющих полосу. Исходя из приведенных соображений, будем считать, что если полоса состоит из n границ зерен и часть из них, равная $p_c n$, испытала локальную миграцию, то сформирована активная полоса КЗГП. Перколяционный порог $p_c (0 < p_c < 1)$ будем считать свободным параметром, вычисление которого представляет самостоятельную задачу.

Расчет числа активных полос сводится к классической вероятностной задаче: случайное распределение известного числа шаров m (полное число промигрировавших границ) по M_0 (максимально возможное число полос) урнам и оценкам среднего числа урн $\langle M \rangle$, в которых число шаров превышает величину порога протекания. Полученное таким образом отношение $\langle M \rangle / M_0$ проанализировано в [7] и определяет интервал СПД в пространстве параметров материала и условий нагружения.

Оценка скорости сдвига в полосе в бикристальном приближении и скорость деформации на стадии стабильного течения получены в работе [8]. Последующий анализ показал, что характеристики процесса СПД определяются не только средним размером зерен, но и дисперсией их распределения. Существенно сказывается на результатах вид температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения ГЗ и его величины. Было выяснено, что процесс формирования поверхностей КЗГП имеет порог по напряжениям, исследована его зависимость от параметров материала и температуры испытаний. Сравнение с экспериментальными зависимостями δ–$\dot{\varepsilon}$ показало, что результаты вполне удовлетворительно воспроизводят семейство зависимостей для всех температур в широком интервале скоростей деформации [9]. Таким образом модель в состоянии объяснить и количественно описать результаты эксперимента, выполненного на стадии стационарного течения для случая одноосного нагружения.

Вопрос о продолжительности стадии стабильного течения (или о деформации до разрушения) решается в рамках уже сформулированных представлений. Известно, что разрушение происходит при локализации деформации в некотором сечении образца и необратимом развитии 'шейки'. Из общих соображений ясно, что если скорость изменения длины определяется полным числом полос КЗГП в данный момент времени, то скорость изменения линейных размеров любого сечения определяется числом полос в окрестности данного сечения. При однородном распределении полос по длине образца скорость измерения поперечных размеров не зависит от выбранного сечения и формирования шейки не происходит. С увеличением длины образца возможностей для неоднородного распределения полос становится больше (как в силу увеличения базы, так и в силу возможного уменьшения абсолютного числа полос) и вероятность появления шейки возрастает. Однако, априори не ясно будет ли она развиваться необратимо или в дальнейшем ее 'догонят' другие сечения.

Будем рассматривать образец как двумерную область, заданную в координатах (x, z) условием: $\{|z| \leqslant l(t), |x| \leqslant h(z, t)\}$. Здесь $2l(t)$ – длина образца в момент времени t, $2h(z, t)$ – ширина в сечении z в момент времени t. Тогда нетрудно получить кинематическое уравнение для $h(z, t)$:

$$\frac{\dot{h}(z,t)}{\dot{l}(t)} = -\int\limits_{z-h(z,t)}^{z+h(z,t)} p(z',t)dz', \quad h(z,0) = h_0 \tag{2.1}$$

где $2h_0$ – ширина образца в момент времени $t = 0$, $p(z, t)$ – плотность распределения полос по длине образца нормированная условием

$$\int\limits_{-l(t)}^{l(t)} p(z,t)dz = 1$$

Для однородного распределения полос $p(z, t) = {}^1/_2 l(t)$ уравнение (2.1) сводится к условию несжимаемости $d[l(t)h(z,t)]/dt = 0$ и описывает однородное изменение поперечного сечения. Если масштаб неоднородности распределения полос много меньше текущей ширины, то, поскольку длина интервала интегрирования в (1) равна $2h(z,t)$, такая неоднородность будет сглажена интегрированием и слабо скажется на величине $\dot{h}(z,t)$. И только лишь когда характерный масштаб неоднородности по порядку величины сравним с текущей шириной, формируется значимая локализация течения. Содержательность анализа зависит от физического наполнения распределения $p(z,t)$. Оказалось, что это проще сделать, если сопоставить уравнению (1) соответствующее стохастическое уравнение. При этом удобнее в качестве независимой переменной рассматривать не время t, а текущую длину l. Для случайной функции $\tilde{h}(l) = h(l) - \langle h(l) \rangle$ можно рассчитать коррелятор $\left\langle \tilde{h}(l_1)\tilde{h}(l_2) \right\rangle$. За недостатком места не будем приводить полного анализа. Результат можно сформулировать следующим образом. В зависимости 'одновременного' коррелятора $R = \left\langle \tilde{h}(l)\tilde{h}(l) \right\rangle$ выделяется три стадии. (*1*) $R \sim 0$, $l_0 << l < l_1$; (*2*) $R \sim l$, $l_1 < l < l_2$; (*3*), $R \sim l^n$, $l_2 <1$. Первая стадия соответствует однородной деформации. Вторая стадия с линейной зависимостью является аналогом диффузионного поведения и описывает так называемый режим бегающей шейки. Нелинейный рост дисперсии соответствует локализации и необратимому развитию шейки (аналог критического зародыша). Границы между стадиями (l_1, l_2) определяются законом изменения числа полос КЗГП на единицу длины образца при увеличении l: $M(l)$. Конкретный вид зависимости $M(l)$ определяется степенью удаленности условий деформации от оптимальных.

Анализируя всю совокупность экспериментальных результатов, продемонстрированы возможности модели для описания стадии стабильного течения и ее продолжительности. Однако ничего не говорилось о режиме выхода на эту стадию. Речь идет о первых 10–15% деформации. По представлениям авторов, и это подтверждается экспериментальными наблюдениями, именно на этой стадии происходит преобразование конфигурации тройных стыков, заканчивающееся формированием полос КЗГП. Стабильная конфигурация промигрировавшей границы описывается системой двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (неизвестные: форма границы и плотность дислокационного скопления), допускающих лишь качественный анализ, на основе которого и получено условие миграции. Задача описания кинетики формирования этой стабильной конфигурации пока далека от решения и требует развития приближенных методов анализа. Важность этой задачи определяется потребностями построения ОС в условиях сложного нагружения.

В последнее время появляются экспериментальные результаты, утверждающие, что локальная миграция это не единственно возможный способ организации согласованного сдвига в тройном стыке. Насколько устойчива модель по отношению к таким вариациям? Согласованность течения в пределах всего образца, формирующаяся по механизму перколяционного перехода и аналогичная в этом смысле фазовым переходам второго рода должна быть мало чувствительна к деталям 'взаимодействия', приводящим к одной и той же картине – полосам КЗГП в данном случае. Завершая раздел об истории формирования представлений о физических механизмах СП, заметим, что ретроспективно проблема СП оказалась проблемой представительного объема.

3. СПД в условиях многокомпонентного нагружения. Нет оснований считать, что в условиях монотонного многокомпонентного нагружения механизм СПД будет отличаться от механизма, описанного для условий одноосного нагружения. Те же процессы будут приводить к образованию полос КЗГП и формированию подобной крупномасштабной картины течения. Так как ориентация полос совпадает с ориентацией плоскостей максимальных касательных напряжений, то задача сводится к вычислению их ориентаций для произвольно заданного напряженного состояния и построению геометрической картины соответствующего течения. В результате получим связь между компонентами тензора напряжений и тензора скоростей деформации. Априори нельзя сказать будет ли выполняться, всегда используемое в прикладных расчетах, предположение о соосности тензоров. Это обстоятельство и составляет главный вопрос предлагаемой постановки.

Начнем с описания кинематики поликристаллического континуума, ограниченной лишь условием сплошности материала. Напомним, что при действии только диффузионных деформационных механизмов это условие было положено в основу формальной схемы в известной работе [30]. Реализуем изучаемый объем как область $\Omega(t)$ в R^3, являющуюся объединением областей $\Omega^\alpha : \Omega = \bigcup \Omega^\alpha$, где $\Omega^\alpha(t)$ – область, занимаемая зерном с номером $\alpha \subset (1...N)$ в момент времени t. Предполагается, что объединение заполняет область Ω без 'дыр', т.е. если некоторая точка x_i из R^3 принадлежит Ω, то она принадлежит и какому-то зерну Ω^α, либо общей границе соседних зерен. Полное число зерен N в представительном объеме Ω должно быть достаточно большим, чтобы имело смысл говорить о кооперативном механизме формирования полос КЗГП. С другой стороны область Ω должна быть достаточно малой, чтобы выполнялось условие однородности напряженного состояния. Ясно, что в условиях СПД (малый размер зерен) этим требованиям удовлетворить нетрудно. Кинематика в Ω задается временной зависимостью носителей, т.е. функций определяемых условием:

$$\chi^\alpha(\mathbf{x},t) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \subset \Omega^\alpha(t) \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega^\alpha(t) \end{cases}$$

Из условий сплошности материала при деформации следуют, что функции χ^α не могут быть заданы произвольно и независимо друг от друга. Обозначим мгновенное поле скоростей в α-м зерне как $v_i^\alpha(\mathbf{x},t)$. Тогда поле скоростей в области $\Omega(t)$ можно записать в виде

$$v_i(\mathbf{x},t)=\sum_\alpha v_i^\alpha(\mathbf{x},t)\chi^\alpha(\mathbf{x},t)$$

Вычислим производные от компонент поля скорости v_i по пространственной координате x_j и с учетом равенства

$$\frac{\partial\chi^\alpha}{\partial x_j}=-\sum_{\nu_\alpha} n_j^{\alpha_\nu}\delta(\mathbf{x}\mid\nu_\alpha)$$

где $\mathbf{n}^{\alpha_\nu}$ – внешняя нормаль к ν–ой грани α-го зерна, $\delta(\mathbf{x}|\nu_\alpha)$ – дельта-функция с носителем на ν-ой грани α-го зерна, получим

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\sum_\alpha\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x_j}\chi^\alpha-\sum_\alpha v_i^\alpha\sum_{\nu_\alpha} n_j^{\nu_\alpha}\delta(\mathbf{x}\mid\nu^\alpha)$$

Во втором слагаемом последнего выражения при суммировании по всем зернам одна и та же грань войдет дважды: как грань некоторого зерна и как грань соседнего зерна. Так как внешние нормали в общей точке двух соседних зерен противоположны по знаку (линией тройных стыков пренебрегаем), то

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\sum_\alpha\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x_j}\chi^\alpha+\sum_{(\alpha\beta)}(v_i^\alpha-v_i^\beta)n_j^\beta(\mathbf{x}\mid\Gamma^{(\alpha\beta)})$$

где $\Gamma^{(\alpha\beta)}$ – общая грань двух зерен с номерами α и β, а второе суммирование распространяется по всем границам зерен. Скорость в некоторой точке произвольной границы разложим по ортонормированному базису, в качестве которого выберем вектора: $\mathbf{n}$ – вектор нормали к границе, $\boldsymbol{\tau}^{(1)}$ и $\boldsymbol{\tau}^{(2)}$ – касательные к границе вектора, составляющие с $\mathbf{n}$ правую тройку: $\boldsymbol{\nu}=(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}+(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(1)})\boldsymbol{\tau}^{(1)}+(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)})\boldsymbol{\tau}^{(2)}$. Из условия сплошности нормальная компонента скорости непрерывна при переходе через границу, т.е. $(\boldsymbol{\nu}^\alpha-\boldsymbol{\nu}^\beta)\cdot\mathbf{n}\equiv 0$. Пару касательных векторов $\boldsymbol{\tau}^{(1)}$ и $\boldsymbol{\tau}^{(2)}$ для заданного напряженного состояния всегда можно выбрать так, что вдоль одного из них сдвиговое напряжение будет максимальным, а вдоль другого нулем. Тангенциальную компоненту скорости вдоль второго направления также будет считать непрерывной при переходе через границу. Тогда симметризуя по индексам i и j выражение для пространственной производной скорости, получим выражение для поля тензора скоростей деформации

$$V_{ij}(\mathbf{x},t)=\sum_\alpha V_{ij}^\alpha(\mathbf{x},t)\chi^\alpha(\mathbf{x},t)+\sum_{(\alpha\beta)}(\boldsymbol{\nu}^\alpha-\boldsymbol{\nu}^\beta)\cdot\boldsymbol{\nu}\,\frac{\tau_i n_j^\beta+\tau_j n_i^\beta}{2}\,\delta(\mathbf{x}\mid\Gamma^{(\alpha\beta)})$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор, перпендикулярный вектору нормали на рассматриваемой границе и такой, что вдоль него действует максимальное сдвиговое напряжение. Так как для заданного девиатора тензора напряжений σ_{lm}, нормали $\mathbf{n}$, определяющей площадку, и направления $\boldsymbol{\tau}$ сдвиговое напряжение имеет вид

$$T=\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\tau_l\sigma_{lm}n_m \tag{3.1}$$

от $\boldsymbol{\tau}$ надо искать из условия максимума этой линейной формы. Проекция разности скоростей $\boldsymbol{\nu}^\alpha-\boldsymbol{\nu}^\beta$ на направление единичного вектора $\boldsymbol{\tau}$ есть не что иное как скорость ЗПГ на границе $(\alpha\beta)$, которую обозначим $\Delta V^{(\alpha\beta)}$.

Поскольку мы рассматриваем однородное напряженное состояние, то его следует характеризовать не полем тензора скоростей деформации, отражающим сложную картину перестроек зерен на микроуровне, а соответствующим однородным макроскопическим тензором скоростей деформации. Средние определим как обычные пространственные средние

$$\left\langle V_{ij}(t)\right\rangle = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega(t)} V_{ij}(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}$$

где $|\Omega|$ – объем области усреднения, который в условиях несжимаемости можно считать независящим от времени. Строго говоря, объем α-го зерна нельзя считать независящим от времени, если в процессе деформации происходит рост среднего размера зерен. Этим эффектом мы пренебрегаем. Тогда

$$\left\langle V_{ij}\right\rangle = \sum_{\alpha}\frac{|\Omega^{\alpha}|}{|\Omega|}\left\langle V_{ij}^{\alpha}\right\rangle + \sum_{(\alpha\beta)}\frac{S_{\alpha\beta}}{|\Omega|}\Delta V^{(\alpha\beta)}\,\frac{\tau_i n_j^{\beta}+\tau_j n_i^{\beta}}{2} \tag{3.2}$$

где $S_{\alpha\beta}$ – площадь грани $(\alpha\beta)$. Таким образом, снимается часть степеней свободы кинематики общего вида, однако ни набор $\left\langle V_{ij}^{\alpha}\right\rangle$, ни даже первое и второе слагаемые последнего выражения нельзя задать независимо друг от друга. Но, хотя бы формально, уже разделились, вклады от внутризеренной деформации (первое слагаемое) и от зернограничного проскальзывания (второе слагаемое). Причем в приближении, составляющем основу модели Тейлора (деформации всех зерен одинаковы и совпадают с деформацией представительного объема), из полученного выражения следует, что второе слагаемое тождественно равно нулю. Т.е. модель Тейлора полностью пренебрегает вкладом ЗГП в деформационные процессы и в этом смысле является антиподом моделей, претендующих на описание СПД. При анализе одноосных экспериментов сформулирован результат в приближении, которое названо бикристальным, т.е. напротив, полностью пренебрегаем вкладом в результат первого слагаемого. Это оправдано для описания стадии стационарного течения. В этом случае полосы КЗГП уже сформированы, их вклад в общую деформацию велик, а деформации зерен лишь подстраиваются под этот сдвиг. Причем временная зависимость $\left\langle V_{ij}^{\alpha}\right\rangle \approx e^{i\nu t}$ с характерной частотой $\nu \approx V/d$, где V – скорость сдвига вдоль полосы КЗГП, d – средний размер зерен. Однако стадия выхода на режим стационарного течения (когда полосы еще не сформированы и вклад второго слагаемого незначителен) требует аккуратного рассмотрения внутризеренной деформации; это приобретает особую важность при анализе сложного нагружения.

Введем стандартные обозначения для макроскопических тензоров $\left\langle V_{ij}^{\alpha}\right\rangle = \dot{\varepsilon}_{ij}^{\alpha}$, второе слагаемое обозначим $\dot{\varepsilon}_{ij}^{GBS}$ и введем тензор

$$m_{ij} = (\tau_i n_j + \tau_j n_i)/2 \tag{3.3}$$

Рассмотрим второе слагаемое выражения (3.2). Суммирование по произвольно перенумерованным граням $(\alpha\beta)$ преобразуем в суммы по граням $(\alpha\beta)_k$, принадлежащим k-ой полосе КЗГП и по всем полосам. Тогда

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{GBS} = \sum_{k=0}^{M}\sum_{(\alpha\beta)_k}\frac{S_{(\alpha\beta)_k}}{|\Omega|}\Delta V_{(\alpha\beta)_k} m_{ij}^{(\alpha\beta)_k}$$

Здесь M – число полос КЗГП, сформированное при заданных условиях нагружения. Далее не будем выходить за пределы бикристального приближения, оправдавшего себя при описании экспериментов по одноосному растяжению, и будем считать, что скорость сдвига $\Delta V_{(\alpha\beta)_k}$ постоянна вдоль полосы и одинакова для всех полос. Кроме того пренебрежем отличием ориентаций граней, принадлежащих полосе, т.е. отклонением некоторого числа граней от наиболее благоприятных, ориентированных в плоскости действия максимальных сдвиговых напряжений. Это приводит к тому, что тензор m_{ij} перестает зависеть от индекса грани и является глобальной характеристикой геометрической картины течения, что представляется естественным для однородного напряженного состояния. Для вычисления оставшейся суммы заметим, что

$$\sum_{(\alpha\beta)_k} S_{(\alpha\beta)_k} = S_k$$

где S_k – площадь поверхности k-ой полосы. Если H – среднее расстояние между полосами, то

$$H \sum_{k=0}^{M} S_k \cong \Omega$$

Равенство приближенное, поскольку поверхность КЗГП все-таки не является плоскостью. И, наконец, поскольку $HM_0 = dM$, где M_0 – максимально возможное число полос в образце, получаем

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{GBS} = \frac{M}{M_0} \frac{\Delta V}{d} m_{ij}$$

Таким образом, все отличие от случая одноосного растяжения сводится к замене константы геометрического происхождения тензором m_{ij}, также характеризующим геометрию течения. Для его оценки необходимо определить площадку с максимальным сдвиговым напряжением и вычислить соответствующее направление, принадлежащее этой площадке.

На площадке, заданной вектором нормали $\mathbf{n}$, сдвиговое напряжение в направлении $\boldsymbol{\tau}$ задается выражением (2). Максимум реализуется для вектора $\boldsymbol{\tau}$, определенного условием $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}/|\boldsymbol{\omega}|$, а

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n} \times \hat{\sigma}\mathbf{n} \tag{3.4}$$

причем $|\boldsymbol{\omega}|$ задает величину сдвигового напряжения. Нетрудно убедиться, что в направлении перпендикулярном вектору $\boldsymbol{\tau}$ и вектору $\mathbf{n}$ сдвиговое напряжение равно нулю. Среди произвольно ориентированных площадок перечислим площадки с максимальным сдвиговым напряжением, т.е. построим вектор $\mathbf{n}$, который обеспечивает максимум величине $|\boldsymbol{\omega}|$. Будем искать $\mathbf{n}$ в виде разложения по собственным векторам матрицы $\hat{\sigma}$:

$$(\hat{\sigma} - \lambda\hat{E}) \quad n^* = 0$$

$$\lambda^3 - (Sp\hat{\sigma})\lambda^2 - \frac{1}{2} I_0^2 \quad \lambda - \det(\hat{\sigma}) = 0 \tag{3.5}$$

$$Sp\hat{\sigma} = 0, \quad I_0^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2 \ (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)$$

Рассмотрим невырожденный случай и упорядочим решения кубического уравнения следующим образом $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Пусть соответствующие собственные вектора $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$ составляют правую тройку. Тогда $\mathbf{n} = \alpha_1\mathbf{n}^{(1)} + \alpha_2\mathbf{n}^{(2)} + \alpha_3\mathbf{n}^{(3)}$, где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$. Выражение (3.4) приводится к виду

$$\boldsymbol{\omega} = \alpha_2\alpha_3(\lambda_3 - \lambda_2)\mathbf{n}^{(1)} + \alpha_1\alpha_3(\lambda_1 - \lambda_3)\mathbf{n}^{(2)} + \alpha_1\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{n}^{(3)} \tag{3.6}$$

откуда

$$|\omega|^2 = \alpha_2^2\alpha_3^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \alpha_1^2\alpha_2^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2$$

Максимальное значение $|\omega|^2$ определяется слагаемым с максимальным значением $(\lambda_k - \lambda_m)^2$, так как $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, то $\alpha_1^2 = \alpha_3^2 = 1/2$, $\alpha_2 = 0$. Тогда для заданного напряженного состояния σ_{ij} максимальное сдвиговое напряжение равно $T = (\lambda_1 - \lambda_3)/2$, действует оно на площадке, заданной нормалью $\mathbf{n} = \alpha_1 \mathbf{n}^{(1)} + \alpha_3 \mathbf{n}^{(3)}$ в направлении $\boldsymbol{\tau} = \alpha_1 \mathbf{n}^{(1)} - \alpha_3 \mathbf{n}^{(3)}$. Подставляя полученные $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ в выражение (3.3) получим

$$m_{ij} = (n_i^{(1)} n_j^{(1)} - n_i^{(3)} n_j^{(3)})/2 \tag{3.7}$$

Заметим, что для $\mathbf{n}$ (и $\boldsymbol{\tau}$) получены два взаимно перпендикулярных вектора, отличающихся выбором знаков α_1, α_3. Этим задаются две системы скольжения. Однако тензор m_{ij} одинаков для обеих систем скольжения, так как определяется квадратами величин α_1, α_3. В качестве собственных векторов возьмем нормированные столбцы присоединенной матрицы девиатора, которая имеет вид $t_{ij} = \lambda^2\delta_{ij} + \lambda\sigma_{ij} + S_{ij}$, где S_{ij} – алгебраическое дополнение элемента σ_{ij} в матрице девиатора. J-ый собственный вектор будет j-м столбцом (с подстановкой $\lambda = \lambda_j$). При этом квадраты нормировок имеют вид:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1^2 + \sigma_{11}\lambda_1 + S_{11})$$

$$-(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2^2 + \sigma_{22}\lambda_2 + S_{22})$$

$$(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3^2 + \sigma_{33}\lambda_{13} + S_{33})$$

Подставляя $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$ в выражение (8) после громоздких выкладок получим

$$m_{ij} = \frac{\lambda_2 I_0^2 \delta_{ij}/2 - (\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_3)\sigma_{ij} + 3\lambda_2 S_{ij}}{2(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)}$$

Отсюда следует, что предположение о соосности тензоров напряжения и скорости деформации при СПД выполняется лишь в ряде частных случаев. Так для $\lambda_2 = 0$, и, соответственно, $\lambda_3 = -\lambda_1$, $D = 0$, $I_0^2 = 2\lambda_1^2$ получим $m_{ij} = \sigma_{ij}/\sqrt{2}I_0$.

Известно, что в случае вырождения (совпадение двух главных напряжений) формируется не две трансверсальных системы скольжения, а непрерывное семейство плоскостей, проходящих через образующие конуса с углом раствора $\pi/2$. При этом картина течения имеет особенности в сравнении с невырожденным случаем. Для вырожденного корня кроме уравнения (3.5) выполнятся также $3\lambda^2 - I_0^2/2 = 0$. Т.е. вырожденный корень равен либо $I_0/\sqrt{6}$, либо $-I_0/\sqrt{6}$. В первом случае упорядоченная система корней имеет вид: $\lambda_1 = \lambda_2 = I_0/\sqrt{6}$, $\lambda_3 = -2I_0/\sqrt{6}$, и во втором: $\lambda_1 = 2I_0/\sqrt{6}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -I_0/\sqrt{6}$. Так как вырожденный корень удовлетворяет и уравнению (3.5), то получаем условие на матрицу девиатора, приводящее к совпадению двух главных напряжений. Для первой системы корней: $3\sqrt{6}\det(\hat{\sigma}) = -I_0^3 < 0$, для второй $3\sqrt{6}\det(\hat{\sigma}) = I_0^3 > 0$. Для построения собственных векторов недостаточно условий на определитель и модуль девиатора, необходимы условия на его компоненты. Так как нормировки соответствующих столбцов присоединенной матрицы тождественные нули, то в случае вещественно определенной матрицы нулями являются и все компоненты этих столбцов. Эти условия задают связи между компонентами девиатора и определяют следующие варианты. (*1*) Все сдвиговые компоненты нули; два главных напряжения совпадают. (2) Любая пара из двух сдвиговых компонент нули (можно показать, что равенство нулю одной из сдвиговых компонент автоматически приводит к обнулению одной из оставшихся). Так, если

$\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$, то допустимы варианты:

$$\sigma_0 \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{2} \\ 0 & \pm\sqrt{2} & -1 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_0 \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \pm\sqrt{2} \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \end{Vmatrix}$$

Равенство нулю другой пары приводит к аналогичным матрицам, отличающимся от приведенных перестановкой компонент. (*3*) Все сдвиговые компоненты не равны нулю. В этом случае однозначно определяются диагональные компоненты:

$$\sigma_{11} = \frac{2\sigma_{12}^2\sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)}{3\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23}}, \quad \sigma_{22} = \frac{2\sigma_{12}^2\sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2)}{3\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23}}$$

$$\sigma_{33} = \frac{2\sigma_{13}^2\sigma_{23}^2 - \sigma_{12}^2(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}{3\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23}}$$

Построим геометрический тензор для третьего варианта, предыдущие достаточно элементарны. Полученная матрица имеет собственные значения

$$\lambda_1 = 2\frac{\sigma_{12}^2\sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2\sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2\sigma_{23}^2}{3\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23}}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{\sigma_{12}^2\sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2\sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2\sigma_{23}^2}{3\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23}}$$

и собственные вектора

$$\mathbf{t}^{(1)} = \begin{Vmatrix} \sigma_{12}\sigma_{13} \\ \sigma_{12}\sigma_{23} \\ \sigma_{13}\sigma_{23} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{t}^{(2)} = \begin{Vmatrix} -\sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{t}^{(3)} = \begin{Vmatrix} -\sigma_{13}^2\sigma_{23} \\ -\sigma_{23}^2\sigma_{13} \\ \sigma_{12}(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \end{Vmatrix}$$

Выражение (8) максимально при $\alpha_1^2 = 1/2$, $\alpha_2 = \cos(\varphi)/\sqrt{2}$, $\alpha_3 = \sin(\varphi)/\sqrt{2}$. Произвольный угол φ параметризует системы скольжения рассматриваемого семейства. Нормаль к плоскости скольжения и направление скольжения определяются векторами $\mathbf{n} = \alpha_1\boldsymbol{\tau}^{(1)} + \alpha_2\boldsymbol{\tau}^{(2)} + \alpha_3\boldsymbol{\tau}^{(3)}$, $\boldsymbol{\tau} = \alpha_1\boldsymbol{\tau}^{(1)} - \alpha_2\boldsymbol{\tau}^{(2)} - \alpha_3\boldsymbol{\tau}^{(3)}$, где $\boldsymbol{\tau}^{(i)}$ – вектор $\mathbf{t}^{(i)}$, нормированный на единицу. В результате получаем следующее выражение для геометрического тензора

$$m_{ik} = \frac{1}{2}\left(\tau_i^{(1)}\tau_k^{(1)} - \frac{\tau_i^{(2)}\tau_k^{(2)} + \tau_i^{(3)}\tau_k^{(3)}}{2} - \frac{\tau_i^{(2)}\tau_k^{(2)} - \tau_i^{(3)}\tau_k^{(3)}}{2}\cos(2\varphi) - \frac{\tau_i^{(2)}\tau_k^{(3)} + \tau_i^{(3)}\tau_k^{(2)}}{2}\sin(2\varphi)\right)$$

Предполагая, что системы скольжения, параметризованные углом, действуют независимо, после усреднения по углу получаем $m_{ik} = 3\sigma_{ik}/8T$, где T – максимальное сдвиговое напряжение, равное $(\lambda_1 - \lambda_3)/2$. Т.е. в вырожденном случае выполняется предположение о соосности тензоров напряжения и скорости деформации.

4. Заключение. Сформулирована схема построения ОС, основанная на ограничении кинематики условием сплошности. При достаточно общих предположениях показано, что определяющие соотношения, основанные на модели Тейлора, полностью пренебрегают вкладом ЗГП в деформационные процессы и неприменимы для описания СПД. В случае общего однородного напряженного состояния проведено разделение геометрических свойств крупномасштабной картины течения и ее силовых характеристик. Для изучения последних достаточно ограничиться одноосными экспериментами. Показано, что предположение о соосности тензоров напряжения и скорости деформации в общем случае не выполняется. Получен общий вид их связи. Разобраны некоторые частные случаи, в которых тензора соосны.

В условиях сложного нагружения смена напряженного состояния будет приводить к изменению сдвигового напряжения на системе действующих полос КЗГП, что может вызывать их запирание и активизацию иначе ориентированной системы полос. Этот переходный режим уже не соответствует стадии стационарного течения и для его описания необходим детальный анализ этапа подготовки новых полос.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фридель Ж.* Дислокации. М.: Мир. 1967. 643 с.
2. *Nazarov A.A.* On the role of non-equilibrium grain-boundary structure in the yield and flow stress of polycrystals // Phil. Mag. A. 1994. V. 69. № 2. P. 327–340.
3. *Molinary A., Canova G.R., Ahzi S.* A self consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity // Acta met. 1987. V. 35. № 12. P. 2983–2994.
4. *Pshenichnyuk A.I., Astanin V.V., Kaibyshev O.A.* The model of grainboundary sliding stimulated by intragranular slip // Phil. Mag. A. 1998. V. 77. № 4. P. 1093–1106.
5. *Astanin V.V., Sisanbaev A.V., Pshenichnyuk A.I., Kaibyshev O.A.* Self-organization of cooperative grain boundary sliding in aluminium tricrystals // Scripta Met. et Mater. 1997. V. 36. № 1. P. 117–122.
6. *Astanin V.V., Kaibyshev O.A., Pshenichnyuk A.I.* Cooperative processes during superplastic deformation // Mater. Sci. Forum / Ed. A.H. Chokshi. Zurich, Switzerland: Trans. Techn. Publ., 1997. V. 243. P. 41–46.
7. *Пшеничнюк А.И., Кайбышев О.А., Астанин В.В.* Природа крупномасштабного течения как отличительный признак сверхпластичности // Физика твердого тела. 1997. Т. 39. № 12. С. 2179–2185.
8. *Астанин В.В., Кайбышев О.А., Пшеничнюк А.И.* К теории сверхпластической деформации // Физика металлов и металловедение. 1997. Т. 84. Вып. 6. С. 5–15.
9. *Kaibyshev O.A., Pshenichnyuk A.I., Astanin V.V.* Superplasticity resulting from cooperative grain boundary sliding // Acta materiala. 1998. V. 46. № 14. P. 4911–4916.
10. *Pshenichnyuk A.I., Kaibyshev O.A., Astanin V.V.* Conditions for superplastic deformation // Phil. Mag. A. 1999. V. 79. № 2. P. 329–338.
11. *Пшеничнюк А.И., Кайбышев О.А., Астанин В.В.* О возможности использования физических моделей при построении определяющих соотношений сверхпластичности // Математическое моделирование систем и процессов. Пермь: Изд-во Перм. техн. ун-та, 1998. № 6. С. 92–98.
12. *Пшеничнюк А.И., Кайбышев О.А., Астанин В.В.* Модель сверхпластичности, основанная на представлениях о кооперативном зернограничном проскальзывании // Математическое моделирование систем и процессов. Пермь: Изд-во Перм. техн. ун-та, 1998. № 6. С. 99–109.
13. Атомная структура межзеренных границ / Под ред. А.Н. Орлова. М.: Мир. 1978. 291 с.
14. *Кайбышев О.А., Валиев Р.З.* Границы зерен и свойства металлов. М.: Металлургия. 1987. 213 с.
15. *Кайбышев О.А., Астанин В.В., Валиев Р.З.* Зернограничное проскальзывание при деформации цинковых бикристаллов // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 6. С. 1356–1358.
16. *Fukutomi H., Takatori H., Horiuchi R.* Grain boundary sliding with and without matrix slip deformation in cadmium bicrystals // Trans. Japan Inst. Metals. 1982. V. 23. № 10. P. 579–584.
17. *Валиев Р.З., Хайруллин В.Г., Шейх-Али А.Д.* Феноменология и механизмы зернограничного проскальзывания // Изв. вузов. Физика. 1991. № 3. С. 93–103.
18. *Гейтс Р.* Роль зернограничных дислокаций в зернограничном проскальзывании // Атомная структура межзеренных границ / Под ред. А.Н. Орлова. М.: Мир. 1978. С. 220–242.
19. *Edington J.W., Melton K.N., Cutler C.P.* Superplasticity // Progr. in Mater. Sci. 1976. V. 21. № 2. P. 61–170.
20. *Ashby M.F., Verrall R.A.* Diffusion-accommodated flow and superplasticity // Acta met. 1973. V. 21. № 2. P. 149–163.
21. *Пуарье Ж.-П.* Ползучесть кристаллов. Механизмы деформации металлов, керамики и минералов при высоких температурах. М.: Мир. 1988. 287с.
22. *Hayden H.W., Florren S., Goodell P.D.* The deformation mechanisms of superplasticity // Met. Trans. 1972. V. 3. № 4. P. 833–842.

23. *Kaibyshev O.A., Astanin V.V., Faizova S.N.* Observation of the cooperative grain boundary sliding during superplastic deformation in Zn – 22% Al alloy // Advanced Materials'93. III/B: Composites, Grain Boundaries and Nanophase Materials / Ed. T. Masumoto. Trans. Mat. Res. Soc. Japan. 1994. V. 16B. P. 1473–1476.
24. *Astanin V.V., Faizova S.N., Padmanabhan K.A.* Model for grain boundary sliding and its relevance to optimal structural superplasticity-II // Mat. Sci. Technol. 1996. № 6. P. 489–494.
25. *Astanin V.V., Kaibyshev O.A.* Cooperative grain boundary sliding and superplastic flow nature // Materials Science Forum / Ed. T. Langdon. Zurich, Switzerland: Trans. Tech. Publication. 1994. V. 170 –172. P. 23 – 28.
26. *Astanin V.V., Kaibyshev O.A., Faizova S.N.* Cooperative grain boundary sliding under superplastic flow // Scripta Met. et Mater. 1991. V. 25. № 12. P. 2663–2668.
27. *Astanin V.V., Kaibyshev O.A., Faizova S.N.* The role of deformation localization in superplastic flow // Acta Met. et Mater. 1994. V. 42. № 8. P. 2617–2622.
28. *Zelin M.G., Krasilnikov N.A., Valiev R.Z., Cyrabski M.W., Yang H.S., Mukherjee A.K.* On the microstructural aspects of the nonhomogeneity of superplastic deformation at the level of grain groups // Acta Met. 1994. V. 42. № 1. P. 119–126.
29. *Zelin M.G., Mukherjee A.K.* Cooperative phenomena at grain boundaries during superplastic flow // Acta Met. et Mater. 1995. № 6. P. 2359–2372.
30. *Лифшиц И.М.* К теории диффузионно-вязкого течения поликристаллических тел // ЖЭТФ. 1963. Т. 44. Вып. 4. С. 1349–1367.

Томск

Поступила в редакцию
12.02.1999