

УДК 539.375.6

© 1999 г. И.Г. ГОРЯЧЕВА, О.Г. ЧЕКИНА

ИЗНАШИВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ: ОТ МОДЕЛИРОВАНИЯ МИКРОРАЗРУШЕНИЯ К АНАЛИЗУ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ

Изучаются вопросы моделирования изнашивания поверхностей на микроуровне и макроуровне с позиций механики контактного взаимодействия и разрушения. Отмечаются особенности износа как специфического вида разрушения.

Приводятся примеры исследования усталостного износа на базе одномерной модели накопления поврежденности в поверхностном слое (модель отслаивания), а также на базе модели, основанной на термокинетической теории прочности и позволяющей воспроизвести многократное отделение частиц износа и изменение микрогеометрии поверхностей в зависимости от геометрических характеристик контактирующих тел, механических и теплофизических параметров материалов и условий нагружения.

Дается математическая постановка контактных задач с учетом необратимого формоизменения поверхностей на макроуровне, являющегося следствием процесса дискретного отделения частиц износа на микроуровне. Обсуждаются общие методы решения износоконтактных задач, в которых все контактные характеристики (распределение напряжений, упругие и износные перемещения, сближение тел) являются функциями времени. Отмечается специфика постановки и решения износоконтактных задач для тел с переменным по поверхности коэффициентом износостойкости и неоднородных тел. В качестве примеров дается анализ кинетики формоизменения и перераспределения контактных напряжений в ряде сопряжений, а также в случае полирования однородных и неоднородных поверхностей.

1. Износ как специфический вид разрушения. Изнашивание есть удаление материала с поверхности трения вследствие ее разрушения, проявляющееся в постепенном изменении формы и размеров взаимодействующих тел.

Практическими вопросами, которые делают актуальным изучение изнашивания, являются:

– определение времени достижения сопряжением предельного значения износа, при котором сопряжение теряет работоспособность;

– установление механизмов изнашивания и создание способов управления процессом изнашивания конкретного сопряжения, в частности, выяснение влияния износа на вероятность возникновения катастрофического разрушения.

Следует сразу отметить, что изнашивание не всегда является нежелательным. Такие технологические процессы, как полирование, шлифование фактически можно рассматривать как виды изнашивания поверхностей. В этом случае параметрами, которые следует определить или оптимизировать, являются конечная форма обработанной поверхности, время ее получения, форма изнашивающего тела и т.д.

Таким образом, задача прогнозирования изнашивания может возникнуть в различных областях техники. Каковы подходы к решению этой задачи? Поскольку основной характеристикой, определяющей процесс разрушения, является напряженно-деформированное состояние в приповерхностных слоях взаимодействующих тел, расчет формоизменения поверхностей при изнашивании должен быть основан на методах

теории контактных задач. В некоторых случаях целесообразно учитывать температурные факторы. При определении момента возникновения и характера разрушения используются методы механики разрушения. Однако, моделирование изнашивания не сводится только к применению результатов, полученных в механике разрушения и теории контактных задач.

Специфика износа заключается в том, что сам факт протекания этого процесса не является критическим для работы сопряжения. Основной особенностью изнашивания является многократность элементарных актов разрушения. Поэтому при моделировании изнашивания необходимо определять не только момент разрушения, но и форму поверхности после разрушения, то есть, в терминах механики разрушения, определять траекторию развития приводящей к разрушению трещины. Необходимость определения формы поверхности после элементарного акта разрушения связана с тем обстоятельством, что вновь образованная поверхность снова вступает в контакт и ее форма влияет на последующие акты разрушения.

Отметим также, что изменение формы поверхности происходит за счет отделения фрагментов разрушающегося материала, которые, оставаясь в зоне контактного взаимодействия, могут оказывать значительное влияние на дальнейший ход процесса изнашивания и, вообще говоря, должны быть включены в рассмотрение при моделировании.

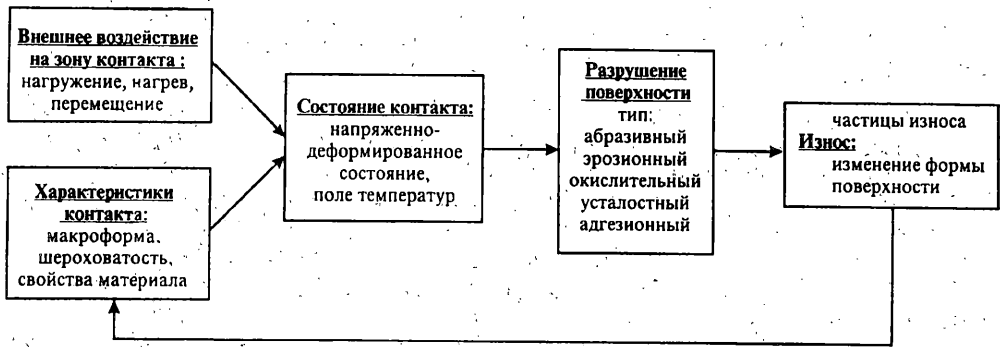
Все сказанное относительно специфики моделирования остается справедливым для различных типов изнашивания, детальная классификация которых приведена в [1]. Основными видами износа являются:

- абразивный, происходящий за счет пластического деформирования и микрорезания поверхности более твердым контртелом (например, при обработке свободными или закрепленными абразивными частицами);
- усталостный износ, протекающий за счет развития усталостных трещин при циклическом воздействии;
- эрозионный износ, возникающий при ударном воздействии твердых частиц или капель;
- коррозионный, обусловленный одновременным воздействием механических и электрохимических факторов.

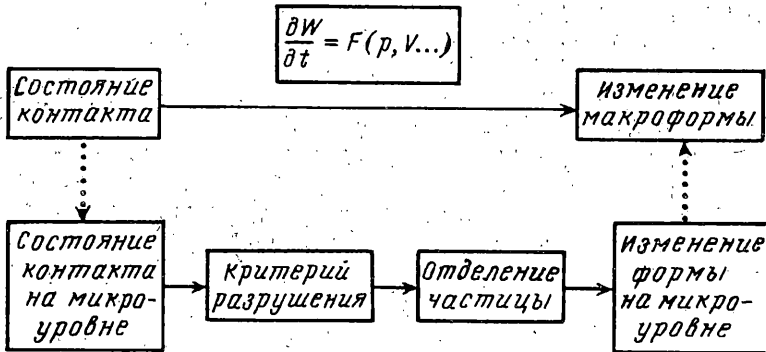
Несмотря на многообразие физических причин и различие масштабов и независимо от типа изнашивания, развитие этого процесса может быть описано единой схемой (фиг. 1). Как видно из схемы, изнашивание – процесс с обратной связью, поскольку форма поверхности является как характеристикой, влияющей на износ, так и характеристикой, изменяющейся в процессе износа. При изнашивании происходит своеобразное приспособление формы поверхности к внешним условиям, которое может, в частности, приводить к возникновению стационарных режимов изнашивания, описанных ниже.

Поскольку при анализе изнашивания в большинстве случаев нас интересуют лишь глобальные характеристики процесса (изменение формы тела через промежуток времени, гораздо большие, чем интервал времени между отдельными актами разрушения, максимум величины износа по поверхности и т.д.), изменение формы поверхности после элементарного акта разрушения, форма отделяющейся при этом частицы, так же как и все характеристики, связанные с расчетом полей напряжений и температур, при рассмотрении процессов на масштабах, соизмеримых с размером единичного пятна контакта, в большинстве практических приложений являются внутренними параметрами модели. Фактически в большинстве приложений задачей моделирования износа является прогнозирование перехода от одного макросостояния (макроформы) к другому при заданных внешних условиях (нагрузки, скорости).

При построении полной модели изнашивания, схема которой представлена на фиг. 2, от макропараметров (состояние контакта) необходимо перейти на более низкий масштабный уровень, на котором необходимо определить физический механизм элементарного акта разрушения и выбрать критерий разрушения, соответствующий



Фиг. 1



Фиг. 2

этому механизму; рассчитать напряженно-деформированное состояние, температуру поверхностного слоя и другие функции, входящие в критерий разрушения; построить модель отделения частицы; определить новые характеристики поверхностного слоя после отделения частицы (распределение контактных и внутренних напряжений, температуры и т.д.) и следующий момент разрушения, и т.д. Многократное повторение подобных расчетов на микроуровне позволяет оценить изменение характеристик сопряжения на макроуровне (изменение макроформы, сближение тел при изнашивании и т.д.) и рассчитать долговечность сопряжения по критериям износостойкости. Применение этого алгоритма к расчету реальных сопряжений сложной конфигурации является чрезвычайно трудоемким.

Сложностей, связанных с построением полной модели износа, можно избежать, обратившись к феноменологической модели, в которой изнашивание рассматривается как непрерывно протекающий во времени процесс изменения макроформы. При таком рассмотрении считается известным закон изнашивания, т.е. зависимость скорости изнашивания $\frac{\partial w}{\partial t}$ (или интенсивности изнашивания $\frac{\partial w}{\partial L} = V^{-1} \frac{\partial w}{\partial t}$, где V – скорость скольжения, L – путь трения) от давления, микрогеометрических характеристик изнашиваемой поверхности, фрикционных параметров сопряжения, скорости скольжения, температуры и т.п. Закон изнашивания строится на основании экспериментальных и теоретических исследований и определяется прежде всего видом изнашивания (усталостное, абразивное и т.д.). Для многих видов изнашивания используется степенная зависимость скорости изнашивания от давления p и скорости скольжения V [1]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = K_w p^\alpha V^\beta \quad (1.1)$$

где K_w – коэффициент износа. В более общем виде это соотношение представимо как

$$\frac{dw}{dt} = F(p, V) \quad (1.2)$$

Контактные задачи, дополненные уравнением износа (1.2), составляют класс износоконтактных задач, методы решения которых достаточно хорошо разработаны [2–5]. Анализ износоконтактных задач позволил выявить некоторые закономерности процесса формоизменения поверхностей, которые будут рассмотрены ниже.

Достоинством феноменологической модели изнашивания является относительная простота расчетов, возможность получения аналитических соотношений и построения асимптотик, что делает этот подход весьма плодотворным и привлекательным.

К недостаткам данного подхода следует отнести, прежде всего, трудности определения уравнения износа (1.2), связанные с необходимостью проведения экспериментов для различных типов и условий изнашивания. Определенные при таких экспериментах параметры, входящие в уравнение износа, зависят одновременно от многих факторов (условий взаимодействия, материалов контактирующих тел и т.д.), что делает затруднительным, например, выявление влияния одного из них на процесс с целью управления им.

Принимая во внимание достоинства и недостатки полной и феноменологической моделей изнашивания, перспективным, на наш взгляд, является построение и применение полной модели на стадии определения закона изнашивания (1.2), и дальнейшее проведение расчетов кинетики изменения контактных характеристик на микроуровне на основании феноменологической модели, использующей закон изнашивания, рассчитанный для заданных условий взаимодействия.

Ниже в статье рассматриваются некоторые конкретные реализации двух подходов к описанию процесса изнашивания и выводы, которые удалось получить на их основе.

2. Одномерная модель усталостного износа. Продемонстрируем алгоритм построения полной модели изнашивания и определения интегральной интенсивности износа в случае, когда на микроуровне разрушение имеет характер отслаивания, обусловленного накоплением усталостных повреждений.

Изложим здесь кратко постановку задачи и основные результаты, детальное обсуждение которых содержится в [6]. Для облегчения расчетов геометрия контактирующих тел была предельно упрощена. Рассматривалось контактирование жесткого индентора и изнашиваемого упругого полупространства. Предполагалось, что индентор находится под воздействием нагрузки $P(t)$ и хаотически движется по поверхности полупространства так, что все точки полупространства подвергаются циклическому нагружению. Считается, что характерные времена изменения нагрузки таковы, что статистически можно считать все точки полупространства, лежащие на определенной глубине, находящимися в равных условиях, что дает основание для построения одномерной модели изнашивания, все характеристики которой являются функциями расстояния z от исходной (неизношенной) поверхности полупространства и времени t .

Скорость накопления поврежденности $q(z, P)$ на фиксированной глубине z предполагалась зависящей от величины нагрузки P , параметров индентора и механических характеристик материала. Функция $q(z, P)$ в каждый момент времени считалась непрерывной по z и стремящейся к нулю при $z \rightarrow \infty$.

Разрушение имеет место при достижении поврежденностью $Q(z, t)$ критического значения Q^* на некоторой глубине z^* в момент времени t^*

$$Q(z^*, t^*) = Q^* \quad (2.1)$$

В силу того, что в рамках данной модели поврежденность есть только функция глубины, разрушение имеет характер отслаивания, если точка z^* не находится на поверхности.

Заметим, что разрушение наступает через некоторое время после начала процесса, т.е. имеет место инкубационный период. При постоянной нагрузке P продолжительность инкубационного периода Δt определяется из соотношения

$$\max_z (q(z, P)) \Delta t = Q^*$$

После первого разрушения условие (2.1) в течение некоторого времени выполняется на поверхности, следовательно, происходит непрерывное удаление материала с поверхности (поверхностный износ). Если в некоторый момент времени условие (2.1) снова окажется выполненным внутри тела, что возможно для немонотонных по z функций $q(z, P)$, снова произойдет отделение слоя конечной толщины (отслаивание). После чего в контакт вступят слои материала, которые характеризуются известной на основании предыдущих расчетов функцией поврежденности $Q(z, t)$.

Не конкретизируя вида функции $q(z, P)$, можно провести оценку интенсивности изнашивания для данной модели при наступлении стационарного режима, если таковой будет иметь место.

Действительно, пусть в стационарном режиме изнашивания разрушение имеет место только на поверхности. Такой режим осуществим, например, при постоянной нагрузке $P(t) = P_0$ [6]. При этом, очевидно, весь отделившийся материал имеет поврежденность, равную критической, т.е. Q^* . Поврежденность изнашиваемого полупространства увеличивается за счет ее накопления и уменьшается за счет отделения материала. В стационарном режиме справедливо соотношение [6]:

$$\frac{dw}{dt} = \int_0^{+\infty} q(z, P_0) dz t Q^* \quad (2.2)$$

т.е. стационарная скорость изнашивания dw/dt в случае, когда разрушение имеет место только на поверхности, определяется величиной нагрузки P_0 , критическим значением функции поврежденности Q^* и параметрами, входящими в функцию скорости накопления поврежденности $q(z, P)$.

Если наряду с поверхностным разрушением имеет место отслаивание, средняя поврежденность отделившегося материала будет меньше критической, соответственно, скорость изнашивания будет несколько больше величины, задаваемой соотношением (2.2).

Таким образом, если функция $q(z, P)$ известна, соотношение (2.2) приближенно задает закон износа для стационарного режима изнашивания и включает лишь параметры системы и характеристики усталостного разрушения.

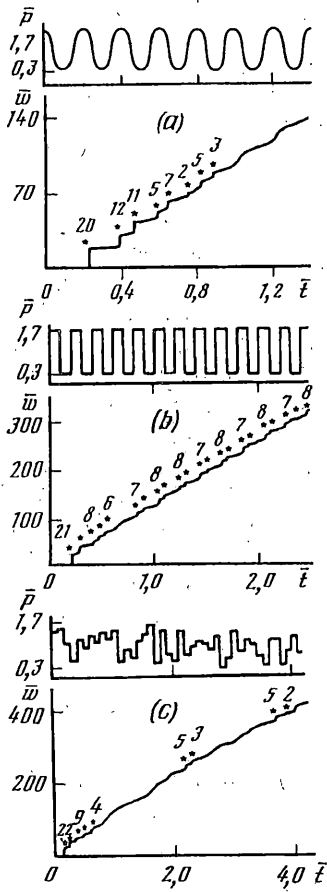
В [6] проведено численное исследование процесса разрушения в случае, когда индентор имеет сферическую форму, а $q(z, P)$ определяется амплитудным значением максимального касательного напряжения, которое совпадает с величиной τ_{\max} на оси сферического индентора при его статическом вдавливании [7]:

$$q(z, P) = \kappa \tau_{\max}^N(z, t) \quad (2.3)$$

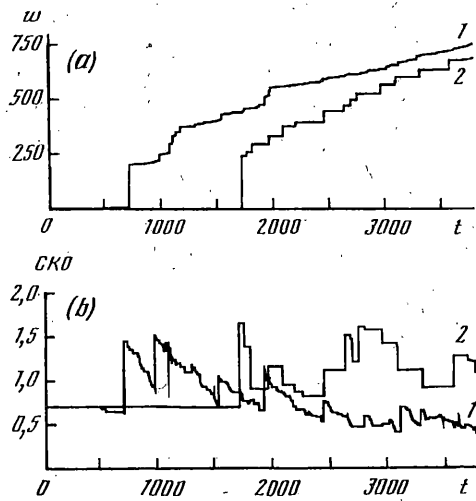
где κ, N – параметры кривой Велера.

В этом случае $q(z, P)$ – немонотонная функция, имеющая подповерхностный максимум, а следовательно, разрушение начинается с отслаивания, затем происходит поверхностное изнашивание, которое сопровождается или не сопровождается отслаиванием в зависимости от изменения внешней нагрузки P , параметра N в соотношении (2.3) и т.д.

Так, при постоянной нагрузке $P(t) = P_0$ толщина отслоившихся фрагментов монотонно уменьшается со временем, а количество актов отслаивания увеличивается с увеличением N (при этом максимум по z функции $q(z, P)$ становится более острым). Весь процесс изнашивания делится на две стадии: начальный нестационарный режим



Фиг. 3



Фиг. 4

(режим приработки) и стационарный, при котором имеет место лишь поверхностное изнашивание. Расчеты показали, что в режиме приработки средняя поврежденность отделяющихся фрагментов при отслаивании близка к критической, поэтому соотношение (2.2) весьма точно описывает среднюю скорость изнашивания сразу после первого акта отслаивания.

Если внешняя нагрузка зависит от времени, характер процесса определяется не самой величиной нагрузки, увеличением которой, естественно, увеличивает среднюю скорость износа, а скоростью приращения нагрузки. Данный вывод иллюстрируется фиг. 3, на которой представлен ход процесса изнашивания в зависимости от характера изменения внешней нагрузки. Цифры рядом со звездочками, которыми обозначены моменты отслаивания, указывают толщину отслоившихся фрагментов в условных единицах. На основании полученных результатов можно оценить частоту актов разрушения и величину отделяющихся фрагментов в зависимости от величины и характера приложения нагрузки. Следует отметить, что отделение фрагментов значительных размеров при работе сопряжения нежелательно, поскольку до момента выхода из контакта эти фрагменты могут вызвать существенные повреждения.

Как следует из проведенного анализа, несмотря на значительные ограничения данная модель позволяет воспроизвести ряд особенностей изнашивания, наблюдаемых на практике: В частности, описана возможность одновременного протекания непрерывного (поверхностного) и дискретного (подповерхностного) разрушения при едином механизме накопления поврежденности.

Основным недостатком данной модели является ее одномерный характер. Более совершенная модель усталостного износа, позволяющая, в частности, исследовать изменение микрорельефа поверхности и размеров отделяющихся частиц и отказаться от использования кривой Велера при построении функции скорости накопления поврежденности, представлена ниже.

3. Термокинетическая модель изнашивания. Рассмотрим процесс изнашивания при контактировании двух шероховатых тел. Будем учитывать действие силы трения и возникающий фрикционный разогрев тел.

Для описания процесса накопления поврежденности используется термокинетическая модель [8], в которой скорость накопления повреждений задается соотношением

$$\frac{dQ(x, y, z, t)}{dt} = \frac{1}{\tau_*} \exp\left(-\frac{U - \gamma\sigma(x, y, z, t)}{kT(x, y, z, t)}\right) \quad (3.1)$$

где U – энергия активации, τ_* и γ – характеристики материала, k – постоянная Больцмана, $\sigma(x, y, z, t)$ – характеристика поля напряжений в точке (x, y, z) внутри деформируемого тела в момент времени t . Используя в качестве σ различные характеристики поля напряжений или их комбинации, в рамках данного подхода можно воспроизвести различные типы разрушения. Расчеты, результаты которых представлены ниже, проведены для $\sigma(x, y, z, t) = \tau_{\max}(x, y, z, t)$.

Для снижения вычислительных трудностей ограничимся рассмотрением плоской задачи, однако аналогичный подход может быть использован и в пространственной постановке. Для расчета поля напряжений в подповерхностном слое необходимо решить контактную задачу. Соотношения для плоской периодической и непериодической задачи представлены в работах [7, 9].

Рассмотрение термокинетической модели накопления поврежденности делает возможным исследование влияния температурных эффектов на разрушение в явном виде. Поскольку поле температур в подповерхностном слое $T(x, y, z, t)$ является весьма неоднородным, его расчет должен проводиться с достаточно высокой степенью точности. Рассмотрение осредненных температурных характеристик в данном случае недопустимо. Для расчета поля температур использовались уравнения теплопроводности в двумерной постановке при следующих граничных условиях на поверхности ($z = 0$):

внутри области контакта

$$-\lambda \frac{\partial T(x, z, t)}{\partial z} = q^T(x, t)$$

вне области контакта

$$-\lambda \frac{\partial T(x, z, t)}{\partial z} = 0$$

где λ – коэффициент теплопроводности рассматриваемого тела. Предполагалось, что температура на некоторой глубине фиксирована $T(z_1) = T_0$. Тепловой поток на боковых границах $x = 0$, $x = l$ при рассмотрении периодической задачи определялся из условия периодичности. Тепловой поток внутрь рассматриваемого тела $q^T(x, t)$ определялся из соотношения $q^T(x, t) = K\mu p(x, t)V$, где K – коэффициент разделения потоков, μ – коэффициент трения, $p(x, t)$ – контактное давление в момент времени t .

В целом процесс разрушения для данной модели описывается следующей совокупностью параметров (индексы $i = 1, 2$ соответствуют двум контактирующим телам):

– исходная форма $f_i(x)$;

- зависимость внешней нагрузки от времени $P(t)$;
- упругие характеристики E_i, ν_i ;
- параметры изнашиваемого тела: теплоемкость C , теплопроводность λ , плотность ρ ;
- характеристики, определяющие накопление поврежденности: U, γ, τ_* ;
- коэффициент разделения тепловых потоков K ;
- коэффициент трения μ ;
- относительная скорость скольжения V ;
- температура внешней среды T_0 .

Наиболее существенным моментом, позволяющим построить замкнутую модель процесса, является выбор механизма разрушения. В данном случае предполагалось, что разрушение происходит за счет распространения трещины, зарождающейся в точке с координатами (x^*, z^*) , в которой выполнено условие разрушения (2.1).

Считается, что трещина распространяется мгновенно, а направление ее развития в каждой точке определяется направлением минимального убывания накопленной поврежденности. Это предположение можно считать оправданным для таких материалов и условий работы, для которых мгновенное поле напряжений оказывает меньшее влияние на траекторию развития трещины, чем свойства поврежденного материала, а характерное время развития трещины существенно меньше характерного времени накопления поврежденности.

Сделанных предположений достаточно, чтобы моделировать ход процесса изнашивания во времени и исследовать влияние перечисленных выше параметров модели на интенсивность изнашивания, изменение макроформы и шероховатости изнашиваемых поверхностей от времени, анализировать размер отделяющихся фрагментов и т.д.

Некоторые выводы, следующие из анализа данной модели, совпадают с результатами, полученными при анализе одномерной модели, и по-видимому, могут быть отнесены к общим закономерностям усталостного износа. К таким выводам относятся существование инкубационного периода процесса, возможность одновременного протекания непрерывного поверхностного изнашивания и отделения фрагментов конечных размеров при одном заложенном в модель механизме, определяющем разрушение.

Выявлены также следующие закономерности [10]:

1. Изнашивание может привести как к росту, так и к снижению шероховатости (за меру шероховатости было взято среднеквадратичное отклонение профиля).
2. Увеличение коэффициента трения приводит к увеличению интенсивности изнашивания и уменьшению размера отделяющихся фрагментов.
3. Увеличение нагрузки увеличивает интенсивность изнашивания. При этом размер частиц увеличивается, если тепловыделение отсутствует или его роль незначительна. В противном случае размер частиц уменьшается за счет интенсивного нагрева поверхностных слоев.

Пример, иллюстрирующий изменение характеристик микрогеометрии и интенсивности изнашивания, приведен на фиг. 4. В случае, когда тепловые эффекты не учитываются ($K = 0$, кривые 2), продолжительность инкубационного периода больше, износ несколько ниже, однако он происходит за счет отделения более крупных фрагментов, что приводит к возникновению более шероховатой поверхности, чем в случае, когда тепловые эффекты принимаются во внимание ($K = 1$, кривые 1). Следует упомянуть, что для сокращения времени расчетов определение контактного давления производилось с использованием модели основания Винклера.

Существенно нелинейный характер данной модели, значительное влияние исходной микрогеометрии на ход процесса не позволяют в данном случае провести интегральные оценки интенсивности изнашивания и вообще говорить об установившемся режиме изнашивания в строгом смысле слова. Осредненные характеристики

интенсивности изнашивания в зависимости от параметров модели могут быть получены в результате прямого численного эксперимента.

4. Постановка задачи об износе сопряжений на макроуровне. Если отвлечься от дискретного характера изнашивания, имеющего место на микроуровне (масштаб отдельной неровности), и перейти на макроуровень (масштаб области контакта макротел), изнашивание можно рассматривать как непрерывный во времени процесс, приводящий к необратимому изменению макроформы взаимодействующих тел. Изменение формы оценивается величиной линейного износа w . Эта величина описывает изменение размера тела в направлении, перпендикулярном к поверхности трения. В общем случае износ распределяется по поверхности трения неравномерно и является функцией координат точек поверхности (x, y) и времени t , т.е. $w = w(x, y, t)$.

Зависимость скорости износа $dw(x, y, t)/dt$ от давления $p(x, y, t)$ и скорости относительного перемещения взаимодействующих поверхностей $V(x, y, t)$ определяется уравнением износа (1.2).

Часто при постановке контактных задач с учетом формоизменения поверхностей при изнашивании является допустимым предположение о малости необратимых перемещений поверхности за счет износа $w(x, y, t)$ и их соизмеримости с упругими перемещениями $u_z(x, y, t)$. В связи с этим при определении напряженно-деформированного состояния тела в таких случаях граничные условия относят к недеформированной поверхности, пренебрегая как упругими перемещениями $u_z(x, y, t)$, так и формоизменением поверхности за счет износа $w(x, y, t)$.

Тогда давления на площадке контакта $p(x, y, t)$ связаны с упругими перемещениями $u_z(x, y, t)$ в произвольный момент времени с помощью оператора A , который совпадает с оператором, связывающим давление с упругими перемещениями в соответствующей контактной задаче без учета изнашивания поверхностей, т.е.

$$u_z(x, y, t) = A[p(x, y, t)] \quad (4.1)$$

Так, в случае контакта без трения осесимметричного штампа с упругой полуплоскостью соотношение (4.1) имеет вид:

$$u_z(\rho, t) = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \int_0^{a(t)} \frac{p(\rho', t)\rho'}{(\rho + \rho')} K\left(\frac{2\sqrt{\rho\rho'}}{\rho + \rho'}\right) d\rho' + \text{const} \quad (4.2)$$

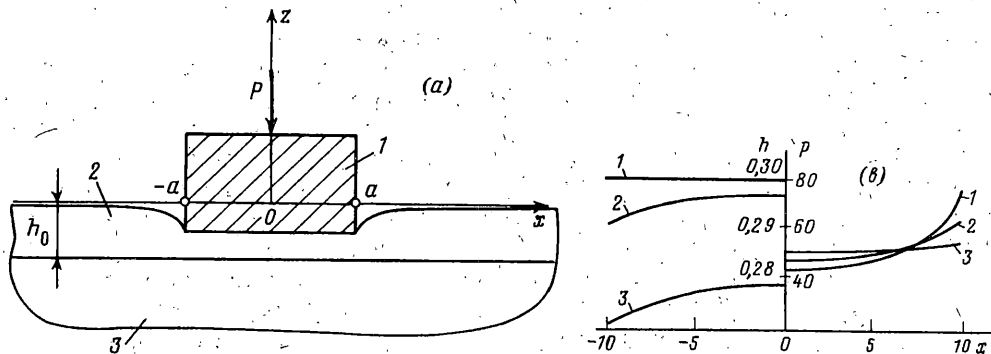
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq \rho \leq a(t)$$

где $K(r)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Как следует из соотношения (4.2), оператор A зависит от размера площадки контакта $a(t)$. Если в процессе изнашивания размер площадки контакта фиксирован, т.е. $a(t) = a(0)$, оператор A в точности совпадает с оператором в начальный момент времени $t = 0$. Такой случай имеет место, например, при изнашивании упругого тела штампом с плоским основанием. При изнашивании упругого полупространства гладким штампом неизвестная граница Γ области контакта $\Omega(t)$ определяется условием

$$p(x, y, t)|_{(x, y) \in \Gamma} = 0$$

Заметим, что требование малости линейного износа $w(x, y, t)$ в ряде случаев диктуется самими функциональными свойствами сопряжения, например, в прецизионных узлах трения. Однако в некоторых случаях изменение геометрии контактирующих поверхностей за счет изнашивания соизмеримо с характерным размером тел. Тогда при определении упругих перемещений уже нельзя пользоваться оператором соответствующей контактной задачи без учета изнашивания. Так обстоит дело, например, при исследовании изнашивания тонкого упругого покрытия, когда перемещения за



Фиг. 5

счёт износа могут оказаться соизмеримыми с толщиной покрытия. В этом случае соотношение между упругими перемещениями и давлением принимает более сложный вид и зависит от геометрии изношенного контакта. Задачи об изнашивании покрытий, моделируемых упругим и вязкоупругим слоями, в различных сопряжениях с учетом изменения толщины покрытий во времени рассмотрены в работах [11, 12].

Для замыкания системы уравнений (1.2) и (4.1) используется условие контакта, имеющее в общем случае вид: $u_z(x, y, t) + w(x, y, t) = F(x, y, t)$, где как правило, функция $F(x, y, t)$ задана. Вид этой функции зависит, в частности, от формы контактирующих тел и характера их относительных перемещений [5, 13]. Рассмотрим, например, плоскую контактную задачу о скольжении цилиндрического штампа по двухслойному упругому основанию (фиг. 5, а). Пусть при этом верхний слой изнашивается. Если движение происходит вдоль направляющей Oy цилиндра, то условие контакта в произвольный момент времени имеет вид:

$$u_z(x, t) + w(x, t) = D(t) - f_1(x) \quad (4.3)$$

где $D(t)$ – смещение цилиндра вдоль оси Oz вследствие упругих деформаций и износа поверхности основания, $f_1(x)$ – уравнение контактирующей поверхности цилиндра в системе координат $Oxyz$, связанной с границей упругого полупространства. Ось Oz совпадает с нормалью к границе полупространства, проходящей через точку O начального касания тел. Заметим, что в правую часть уравнения (4.3) функции времени и координат входят аддитивно. Условия такого вида составляют определенный класс контактных задач, для которого наиболее развиты методы исследования. В дальнейшем будем его называть классом \mathcal{A} .

Рассмотрим теперь движение со скоростью V цилиндра перпендикулярно его образующей, т.е. вдоль оси Ox . В то время, когда фиксированная точка $(x, y, 0)$ границы упругого полупространства находится в контакте, условия контакта зависят от положения штампа и имеют вид

$$u_z(x, t) + w(x, t) = D(t) - f_1(x - Vt), \quad a(t) < x < b(t) \quad (4.4)$$

Здесь $a(t)$ и $b(t)$ – точки, ограничивающие область контакта. Подобные контактные задачи также составляют особый класс. В [13] приведены примеры решения задач этого класса.

Следует отметить, что задача для одного и того же сопряжения в зависимости от того, износ какого элемента изучается, может относиться к различным классам. Так, задача об изнашивании цилиндра в предположении, что граница полупространства не изнашивается, при любом характере его движения относится к классу \mathcal{A} .

При заданной нормальной нагрузке $P(t)$, действующей на штамп, и неизвестной величине смещения штампа $D(t)$ к уравнениям (1.2), (4.1) и условию контакта, которое в общем случае для задач типа \mathcal{A} имеет вид

$$u_{z1}(x, y, t) + w_1(x, y, t) + u_{z2}(x, y, t) + w_2(x, y, t) = D(t) - [f_1(x, t) + f_2(x, y)] \quad (4.5)$$

(u_{zi} , w_i — упругие и износные перемещения взаимодействующих тел ($i = 1, 2$), имеющих начальную форму $f_i(x, y)$), следует добавить условие равновесия

$$\iint_{\Omega} p(x, y, t) dx dy = P(t) \quad (4.6)$$

Решение полученной системы уравнений позволяет определить неизвестные контактные давления $p(x, y, t)$, упругие перемещения $u_z(x, y, t)$, форму изношенной поверхности, определяемую функцией $w(x, y, t)$, и сближение $D(t)$ тел за счет их деформирования и изнашивания.

В качестве иллюстрации приведем результаты решения плоской контактной задачи для упругой полосы (начальная толщина h_0), лежащей на упругом основании (фиг. 5, а). Будем считать, что штамп перемещается в направлении оси Oy , при этом полоса изнашивается. Скорость изменения толщины полосы предполагается пропорциональной давлению $p(x, t)$ в степени α (см. соотношение (1.1)). Толщина полосы в произвольный момент времени определяется соотношением

$$h(x, t) = h_0 - K_w \int_0^t \left[\frac{p(x, t')}{p^*} \right]^\alpha dt' \quad (4.7)$$

где коэффициент износа K_w есть скорость износа полосы при $p = p^*$ (p^* — некоторое характерное давление).

В предположении, что полоса тонкая $h(0)/a(0) \ll 1$, а её толщина при изнашивании может оказаться соизмеримой с величиной линейного износа, в [11, 12] получено следующее уравнение для определения контактных давлений $p(x, t)$ в произвольный момент времени:

$$h(x, t) - h(0, t) - \frac{B}{E_1} [h(x, t)p(x, t) - h(0, t)p(0, t)] + \frac{1}{\pi E_3^*} \int_{-a}^a p(x', t) \ln \left| \frac{x' - x}{x'} \right| dx' = f_1(x), \quad E_i^* = \frac{E_i}{2(1 - \nu_i^2)} \quad (4.8)$$

где E_i , ν_i — модуль упругости и коэффициент Пуассона материалов слоя ($i = 2$) и основания ($i = 3$), B — коэффициент, определяемый характером сцепления слоя с основанием, a — полуширина площадки контакта, которая, вообще говоря, может меняться с течением времени.

Для решения задачи в [11] использован пошаговый метод. На каждом шаге по времени решение задачи сводилось к исследованию системы линейных алгебраических уравнений. На фиг. 5, б приведены графики распределения давления p [МПа] и формоизменения поверхности полосы h [мм], сцепленной с упругим основанием, в различные моменты времени ($t = 0$ (кривая 1), $t = 200$ с (кривая 2), $t = 830$ с, (кривая 3)) в случае ее изнашивания штампом с плоским основанием ширины $2a$ ($a = 10^{-2}$ м). В данном примере процесс изнашивания условно можно разделить на две стадии. Начальная стадия (стадия приработки) характеризуется значительной скоростью изменения формы и давлений. Давления на этой стадии перераспределяются. По краям области контакта они снижаются значительно, в то время как в центре контактной зоны несколько возрастают и стремятся к равномерному по всей области контакта распределению. На стадии приработки наблюдается также интенсивный

износ полосы в угловых зонах, где наиболее высоки давления и, следовательно, скорость износа. Вторая стадия характеризуется распределением давления, близким к равномерному, и неизменной формой изношенной поверхности. Эта стадия называется установившимся износом, и наличие ее характерно для многих узлов трения. Заметим, что в разобранный пример установившийся режим изнашивания может наступить, если полоса (покрытие) полностью износится за время приработки.

Уже на рассмотренном примере можно продемонстрировать основные закономерности процесса износа на макроуровне, главной из которых является интенсивное изнашивание зон с повышенным контактным давлением и, таким образом, снижение давления в местах его концентрации. В результате в процессе износа возникают более мягкие условия работы. В ряде случаев это может привести и к смене механизма износа, предотвратив катастрофический износ или макроразрушение.

В случае изнашивания основания гладким цилиндром площадка контакта растет в процессе износа, а средние давления падают, что также приводит к снижению скорости износа и возможной смене его механизма. Эта задача исследована в [12], где, в частности, показано, что в процессе изнашивания и в этом случае имеет место выравнивание давлений на большей части площадки контакта (за исключением ее краевых зон).

Ниже приводятся достаточные условия существования установившегося режима изнашивания:

5. Условия существования установившегося режима изнашивания. Рассмотрим полученную систему уравнений для задач типа \mathcal{A} и предположим, что

$$V(x, y, t) = V_{\infty}(x, y), \quad \Omega(t) = \Omega_{\infty}, \quad dD(t)/dt = D_{\infty} \quad (5.1)$$

т.е. эти функции не зависят от времени. Будем считать, что коэффициент износа $K_w = K_w(x, y)$ в общем случае является функцией координат. Это имеет место при изнашивании неоднородных, а также локально упрочненных поверхностей. Тогда исследуемая система уравнений при степенном законе изнашивания (1.1) может быть записана в виде:

$$u_z(x, y, t) = A[p(x, y, t)] \quad (5.2)$$

$$\partial w / \partial t = K_w(x, y) p^{\alpha}(x, y, t) V_{\infty}^{\beta}(x, y) \quad (5.3)$$

$$u_z(x, y, t) + w(x, y, t) = D(t) - f(x, y) \quad (5.4)$$

$$u_z(x, y, t) = u_{z1}(x, y, t) + u_{z2}(x, y, t)$$

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$$

$$w(x, y, t) = w_1(x, y, t) + w_2(x, y, t)$$

Если оператор A не зависит от времени, система уравнений (5.2)–(5.4) имеет установившееся решение, которое определяет контактное давление $p_{\infty}(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} p(x, y, t)$ в установившемся режиме изнашивания

$$p_{\infty}(x, y) = \left[\frac{D_{\infty}}{K_w(x, y) V_{\infty}^{\beta}(x, y)} \right]^{1/\alpha} \quad (5.5)$$

Из уравнения (5.4) с учетом последнего равенства следует соотношение, справедливое для установившегося режима изнашивания

$$\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} = \frac{dD(t)}{dt} = D_{\infty}$$

т.е. в установившемся режиме скорость износа в каждой точке области контакта постоянна. Это, в свою очередь, дает основание заключить, что форма изношенной

поверхности и установившемся режиме не меняется и описывается функцией $f_{i\infty}(x, y)$. Так, в рассмотренном выше примере об изнашивании полуплоскости цилиндрическим штампом, движущимся вдоль своей образующей, установившаяся форма $f_{2\infty}(x)$ изношенной поверхности определяется функцией:

$$f_{2\infty}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [w(x, t) - w(x_0, t)] = -f_1(x) + f_1(x_0) - A[p_{\infty}](x) + A[p_{\infty}](x_0), \quad x_0 \in \Omega_{\infty} \quad (5.6)$$

где $A[p_{\infty}](x)$ – значение оператора A в точке x для функции p_{∞} , определяемой соотношением (5.5). Соотношение (5.6) следует непосредственно из уравнений (5.2), (5.4) и (5.5).

Подстановка (5.5) в уравнение равновесия (4.6) дает выражение для определения нормальной нагрузки P_{∞} в установившемся режиме изнашивания

$$P_{\infty} = (D_{\infty})^{1/\alpha} \iint_{\Omega_{\infty}} \frac{dxdy}{K_w^{1/\alpha}(x, y) V^{\beta/\alpha}(x, y)} \quad (5.7)$$

Рассмотренное выше установившееся решение $p_{\infty}(x, y)$ системы уравнений (5.2)–(5.4) является асимптотически устойчивым, если общее решение представимо в виде

$$p(x, y, t) = p_{\infty}(x, y) + \varphi(x, y, t) \quad (5.8)$$

и выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(x, y, t) = 0 \quad (5.9)$$

Достаточные условия существования асимптотически устойчивого решения системы уравнений в случае, когда оператор A не зависит от времени, получены в [13–15] как для линейного, так и для нелинейного уравнения износа (5.3).

Заметим, что если функции $V(x, y, t)$, $\Omega(t)$, $D(t)$ зависят от времени, удовлетворяя условиям

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x, y, t) = V_{\infty}(x, y), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega(t) = \Omega_{\infty}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dD(t)}{dt} = D_{\infty} \quad (\text{или} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = P_{\infty})$$

то решение системы уравнений (1.1), (4.1) и (4.5) стремится к решению, определенному функциями (5.5) и (5.7) при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, необходимым условием существования установившегося режима изнашивания для контактных задач класса \mathcal{A} является стабилизация во времени внешних параметров задачи (скорости сближения $D(t)$ взаимодействующих тел, нормальной нагрузки $P(t)$ и т.д.). Если $P_{\infty} = 0$ или $D_{\infty} = 0$, контактное давление стремится к нулю, т.е. $p_{\infty}(x, y) = 0$.

Работа сопряжения в установившемся режиме изнашивания является наиболее благоприятной, поскольку она характеризуется стабилизацией давления и, следовательно, всех характеристик сопряжения (давление в данном случае является управляющим параметром). Поэтому часто ставится задача оптимизации процесса износа за счет приближения его начальных характеристик к стационарным. Некоторые задачи оптимизации изнашивания поверхностей рассмотрены в [13, 15].

6. Методы решения износоконтактных задач. Контактные задачи с учетом формоизменения поверхностей сводятся к системе уравнений, которая может быть как линейной, так и нелинейной.

Линейная система получается в случае, когда имеет место линейный закон изнашивания ($\alpha = 1$ и $\beta = 1$ в соотношении (1.1) и оператор A является линейным и не зависящим от времени). Заметим, что при условии $V(x, y) = \text{const}$ не требуется накладывать ограничения на значение показателя β .

Методы решения линейных износоконтактных задач с соответствующими примерами изложены в монографиях [2, 5, 13].

Нелинейная система уравнений износоконтактной задачи возникает, когда оператор A зависит от времени (например, в случае изменяющейся при изнашивании области контакта), при нелинейном законе изнашивания, при учете разогрева при трении и т.д.

При решении нелинейных износоконтактных задач широко используются численные подходы. Одним из наиболее широко используемых является пошаговый метод, в основе которого лежит дискретизация времени и использование конечно-разностного представления дифференциального или интегрального оператора.

В задачах с изменяющейся областью контакта используется метод отображения последней на область фиксированного размера [16–18]. При растущей области контакта эффективным является использование в качестве временного параметра размера a области контакта [12, 19, 20]. Закон изнашивания (1.2) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial a} = \left(\frac{da}{dt} \right)^{-1} F(p, V)$$

Для расчета изнашивания цилиндрических сопряжений используется также приближенное представление контактного давления в виде тригонометрического полинома [18, 21]. Такой подход позволяет достаточно просто учесть нелинейность закона изнашивания, наличие трения, одновременное изнашивание взаимодействующих поверхностей и т.д.

7. Формоизменение неоднородных поверхностей. В трибологии давно известно явление неравномерного изнашивания материалов, которым в той или иной мере присуща структурная неоднородность. Такими свойствами обладают композиционные и неоднородные материалы, а также материалы, поверхности которых подвергнуты локальному упрочнению (лазерная обработка, ионная имплантация и т.д.). Коэффициент износостойкости таких поверхностей является функцией координат точки поверхности. При изнашивании этих материалов наиболее интенсивному разрушению подвергается менее прочная (чаще всего более мягкая) структура, в результате чего первоначально ровная рабочая поверхность становится волнистой. Образование такой эксплуатационной волнистости при некоторых условиях трения способствует повышению триботехнических свойств сопряжений.

Для исследования изнашивания неоднородных поверхностей применимы те же математические постановки и методы решения контактных задач, что и для однородных поверхностей.

Рассмотрим задачу изнашивания упругого полупространства бесконечным штампом с плоским основанием. Уравнение износа имеет вид (1.1), в котором коэффициент износа является функцией координат точки поверхности, т.е. $K_w = K_w(x, y)$. Система уравнений для анализа изменения контактных давлений во времени формоизменения поверхности полупространства имеет вид (5.2)–(5.4).

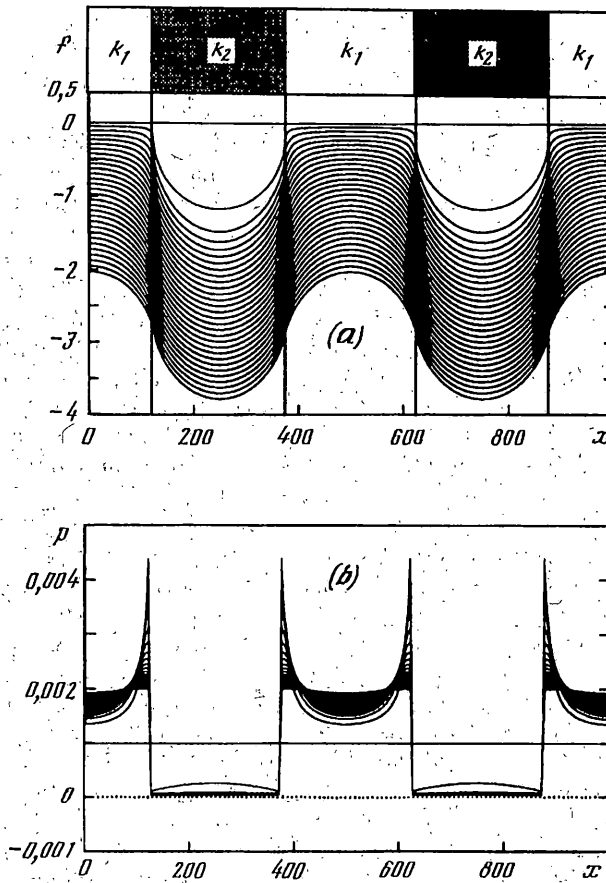
При выполнении условий существования установившегося режима изнашивания, сформулированных в п. 5 для задач класса \mathcal{A} , установившаяся форма $f(x, y)$ изношенной поверхности упругого полупространства определяется выражением [13]:

$$f(x, y) = A[p_\infty(x, y)] = A \left[\frac{(p^*)^\alpha (V^*)^\beta D_\infty}{K_w(x, y) V^\beta(x, y)} \right]^{1/\alpha} \quad (7.1)$$

где p^* , V^* – характерные значения давления и скорости, а оператор A имеет вид

$$A[p(x, y, t)] = \frac{(1 - \nu^2)}{\pi E} \iint_{\Omega} p(x', y', t) \phi(x', y', x, y) dx' dy' \quad (7.2)$$

$$\phi(x', y', x, y) = \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}} \quad (7.3)$$



Фиг. 6

Таким образом, установившаяся форма зависит от коэффициента износа $K_w(x, y)$ и характера движения штампа, т.е. функции $V(x, y)$.

В [5, 13, 22] изучен характер изнашивания полупространства при различных видах функции $K_w(x, y)$. Отметим, что для неоднородных и неоднородно упрочненных поверхностей, как правило, функция $K_w(x, y)$ принадлежит к классу кусочно-постоянных функций и имеет вид:

$$K_w(x, y) = \begin{cases} K_{w1}, & (x, y) \in \Omega \setminus \omega \\ K_{w2}, & (x, y) \in \omega \end{cases} \quad (7.4)$$

где ω – совокупность упрочненных зон (поверхность полупространства, характеризуемая коэффициентом износа K_{w2}), $\Omega \setminus \omega$ – неупрочненная поверхность полупространства (характеризуемая коэффициентом износа K_{w1} , $K_{w1} > K_{w2}$).

Анализ решения периодических задач для упругого полупространства, поверхность которого упрочнена внутри полос или круговых зон, задающих область ω , показал [5, 22] что при изнашивании поверхность становится волнистой. Геометрические характеристики изношенной поверхности зависят от соотношения коэффициентов износа отдельных ее участков и их характерных размеров. Скорость изнашивания такой поверхности также зависит от параметров упрочнения.

Изложенный выше подход применим к анализу формоизменения при изнашивании ограниченного упругого тела, поверхность которого подвергнута локальному упроч-

нению [13; 22], а также при изучении процесса полирования однородных и неоднородных поверхностей [23]. На фиг. 6 приведены зависимости контактного давления и формы поверхности от координат в различные моменты времени при полировании недеформируемой поверхности, участки которой состоят из различных материалов с коэффициентом износа k_1 и k_2 , упругим полировальным кругом. Исходная форма поверхности изнашиваемого тела плоская. При изнашивании давление стремится к кусочнопостоянной функции, а форма поверхности становится волнистой. Стационарная форма изношенной поверхности определяется величиной нагрузки, упругими характеристиками полировального круга, размерами участков из различных материалов и соотношением коэффициентов износа [23]. Данные расчеты были проведены с целью моделирования процесса химико-механического полирования, используемого в микроэлектронике (характерные размеры включений составляли 1 мкм).

В связи с этим уместно упомянуть об относительном характере понятий микро и макро, используемых в данной статье, поскольку при изнашивании, скажем, сопряжений, применяемых в железнодорожном транспорте, возможно отделение частиц износа размером порядка миллиметра по механизму, который по нашей классификации происходит на микроуровне.

8. Заключение. В работе рассмотрены два подхода к моделированию процесса изнашивания поверхностей и показана взаимосвязь между ними. Выбор того или иного метода анализа и его масштабного уровня зависит от поставленных целей и задач исследования.

Модели, используемые для анализа процесса разрушения на микроуровне, существенно зависят от механизма разрушения. Изложенные выше модели отделения частиц материала и отслаивания основаны на законах накопления поврежденности и поверхностных слоях материалов при их циклическом нагружении в предположении упругого деформирования материалов. Модель отделения частиц износа при циклическом пластическом деформировании неровностей шероховатой поверхности предложена в [24]. Эта модель основана на явлении накопления пластических деформаций при циклическом скольжении и критерии вязкого разрушения. При абразивном механизме износа модель отделения частиц материала должна строиться на теории резания. Характерной чертой процесса разрушения на микроуровне, наблюдаемой в экспериментах и обнаруженной во всех исследованных моделях, является дискретный характер протекания его во времени. Получаемый из анализа процесса изнашивания на микроуровне закон износа, представляющий собой непрерывную функцию времени и координат, является результатом сглаживания и осреднения всех характеристик, присущих микроуровню.

Тесная взаимосвязь между процессами разрушения поверхностей на микроуровне и характером изменения напряжений и формы тел на макроуровне делает возможным создание различных методов технологической обработки поверхностей с целью повышения долговечности по износу пар трения. К таким методам относятся нанесение износостойких покрытий, упрочнение поверхностей, использование композиционных материалов и т.д. Применение этих методов приводит к изменению механических, триботехнических и прочностных характеристик поверхностных слоев материалов, что влияет на характер их разрушения на микроуровне. Следует отметить, что микроуровень, связанный в нашем рассмотрении с масштабом отдельного пятна контакта неровностей сопрягаемых поверхностей, не является предельным. В настоящее время известны модели переноса материала на контртело, основанные на методах молекулярной динамики [25]. Изучение влияния процессов, протекающих на более низких масштабных уровнях, на характеристики процесса изнашивания могло бы составить предмет дальнейших исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 98-01-0091); фонда "Фундаментальные исследования в области естествознания" Минобразования РФ (грант 97-03-4.3-47); РФФИ-ИНТАС (грант 95-492).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
- [2]. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
- [3]. Галин Л.А., Горячева И.Г. Осесимметричная контактная задача теории упругости при наличии износа // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 807–812.
- [4]. Александров В.М., Коваленко Е.В. Математические методы в контактных задачах с износом // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984. С. 77–89.
- [5]. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1977. 254 с.
- [6]. Горячева И.Г., Чекина О.Г. Модель усталостного разрушения поверхностей // Трение и износ. 1990. Т. 11. Вып. 3. С. 389–400.
- [7]. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
- [8]. Регель Р.В., Слуцкер А.И., Томашевский Э.Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. М.: Наука, 1974. 560 с.
- [9]. Кузнецов Е.А., Гороховский Г.А. Фрикционное взаимодействие шероховатых тел с позиций механики твердого тела // Трение и износ. 1980. Т. 1. Вып. 4. С. 638–649.
- [10]. Чекина О.Г. Моделирование разрушения приповерхностных слоев при контактировании шероховатых тел // Тр. 9-й Конф. по прочности и пластичности. М.: Профсервис, 1996. Т. 1. С. 186–191.
- [11]. Горячева И.Г., Солдатенков И.А. Теоретическое исследование приработки и установившегося режима изнашивания твердых смазочных покрытий // Трение и износ. 1983. Т. 4. Вып. 3. С. 420–431.
- [12]. Солдатенков И.А. Изнашивание тонкого упругого покрытия при изменяющейся площадке контакта // Трение и износ. 1985. Т. 6. Вып. 2. С. 247–254.
- [13]. Goryacheva I.G. Contact Mechanics in Tribology. Dordrecht et al.: Kluwer, 1998. 360 p.
- [14]. Горячева И.Г. Контактные задачи теории упругости для системы изнашиваемых штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 62–68.
- [15]. Горячева И.Г., Чекина О.Г. Управление формоизменением поверхностей при изнашивании // Трение и износ. 1989. Т. 10. Вып. 1. С. 5–12.
- [16]. Качалкин А.Ю., Мазинг Р.И. Контактная задача для цилиндрического тела с учетом износа // Машиноведение. 1988. Вып. 3. С. 49–51.
- [17]. Солдатенков И.А. Изнашивание покрытий в упругих сопряжениях при изменяющейся площадке контакта // Трение и износ. 1987. Т. 8. Вып. 2. С. 206–213.
- [18]. Усов П.П., Дроздов Ю.Н., Николашев Ю.Н. Теоретическое исследование напряженного состояния пары вал–втулка с учетом износа // Машиноведение. 1979. Вып. 2. С. 80–87.
- [19]. Александров В.М., Коваленко Е.В. Аналитическое решение контактной задачи об изнашивании сопряжения вал–втулка // Трение и износ. 1987. Т. 8. Вып. 6. С. 985–995.
- [20]. Усов П.П. Внутренний контакт цилиндрических тел близких радиусов при изнашивании их поверхностей // Трение и износ. 1985. Т. 6. Вып. 3. С. 404–414.
- [21]. Теплый М.И. Определение износа в паре трения вал–втулка. Трение и износ // 1983. Т. 4. Вып. 2. С. 249–257.
- [22]. Горячева И.Г., Торская Е.В. Контактные задачи при наличии износа для тел с переменным по поверхности коэффициентом износостойкости / Трение и износ. 1992. Т. 13. Вып. 1. С. 185–194.
- [23]. Chekina O.G., Keer L.M. Wear-contact problems and modeling of chemical mechanical polishing // J. Electrochem. Soc. V: 145. № 6. 1998. P. 2100–2106.
- [24]. Johnson K.L. Contact mechanics and the wear of metals // Wear. 1995. V. 190. № 2. P. 162–170.
- [25]. Fundamentals of Friction: Macroscopic and Microscopic Processes. Eds. Singer I.L. et al. Dordrecht: Kluwer, 1992. 621 p.