

полного напряжения $S = (\sigma_k \sigma_k)^{1/2}$ и его направляющими косинусами $\alpha_k = \sigma_k / S$ (σ_k — главные напряжения). В пространстве, связанном с октаэдрической площадкой, напряженное состояние определим модулем вектора полного напряжения на этой площадке $S_0 = (\sigma^2 + \tau^2)^{1/2}$, углом ψ , который образует вектор S_0 с нормалью к этой площадке, и углом φ — фазой напряжений. Здесь $\sigma = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3$, $\tau = (S_{ij} S_{ij} / 3)^{1/2}$, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma$ ($i, j = 1, 2, 3$). При описании состояний деформируемых сред удобно перейти от углов ψ и φ к их тригонометрическим представлениям $\xi = \cos \psi = \sigma / S_0$, $\eta = \sin \psi = \tau / S_0$, $\cos 3\varphi = 2^{1/2} S_{III} / \tau^3$, $S_{III} = S_{ik} S_{kj} S_{ij}$.

Очевидно, что между характеристиками двух пространств имеются однозначные зависимости [24]:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{3} S_0, \quad I_\alpha = \sqrt{3} \xi, \quad III_\alpha = \alpha_k \alpha_k = 1 \\ III_\alpha &= (3\xi^3 + 9\xi\eta^2 + 1, 5\sqrt{2}\eta^3 \cos 3\varphi) / \sqrt{3} \\ III_\alpha &= \alpha_k \alpha_k \alpha_k, \quad \xi^2 + \eta^2 = 1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Для разносопротивляющихся материалов, допускающих линейную аппроксимацию экспериментальных диаграмм деформирования, потенциал деформаций W можно представить в виде двух эквивалентных форм [23–25]:

$$W = \Phi_1(I_\alpha, III_\alpha) S^2, \quad W = \Phi_2(\psi, \varphi) S_0^2 \quad (1.2)$$

Функции Φ_1, Φ_2 задаются степенными полиномами от качественных параметров напряженного состояния ($\psi, \varphi, I_\alpha, III_\alpha$). Для практического применения рекомендуется ограничить полиномы (1.2) третьей степенью, тогда потенциал для изотропного упругого тела принимает простой вид:

$$\begin{aligned} W &= 0, 5[(A + B\alpha_1)\sigma_1^2 + (A + B\alpha_2)\sigma_2^2 + (A + B\alpha_3)\sigma_3^2] + \\ &+ [C + E\alpha_3 + D(\alpha_1 + \alpha_2)]\sigma_1\sigma_2 + [C + E\alpha_1 + D(\alpha_2 + \alpha_3)]\sigma_2\sigma_3 + \\ &+ [C + E\alpha_2 + D(\alpha_1 + \alpha_2)]\sigma_1\sigma_3 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$W = (b_1 + b_2\xi)\sigma^2 + (b_3 + b_4\xi + b_5\eta \cos 3\varphi)\tau^2$$

$$b_1 = 1, 5(A + 2C), \quad b_3 = 1, 5(A - C), \quad b_2 = 1, 5\sqrt{3}(B + 4D + 2E)$$

$$b_4 = 4, 5\sqrt{3}(B - E), \quad b_5 = 0, 75\sqrt{2/3}(B - 2D + 2E)$$

где $A, \dots, E, b_1, \dots, b_5$ — константы, четыре из которых определяются из простейших стандартных экспериментов через модули упругости и коэффициенты поперечной деформации при осевом растяжении (E^+, ν^+) и осевом сжатии (E^-, ν^-) [23, 25]. Для определения пятой константы в зависимости от свойств материала можно воспользоваться одним из двух априорных способов, предложенных в [23] или [25].

При этом зависимости между деформациями и напряжениями имеют тензорно-нелинейный вид [23]:

$$\begin{aligned} e_{ij} &= 1/3\{2[b_1 + b_2\xi(1 + 0, 5\eta^2)] + (b_4\eta^2 + 1, 5\sqrt{2}b_5)\eta^2 / \xi - \\ &- b_5\eta^3 \cos 3\varphi\}\sigma\delta_{ij} + 1/3\{2(b_3 + b_4\xi + b_5\eta \cos 3\varphi) - \\ &-(b_2\xi^2 + b_4\eta^2)\xi - b_5(3 - \eta\xi^2) \cos 3\varphi + 3\sqrt{2}b_5\mu_{ij}\}S_{ij} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\mu_{ij} = \lambda_{ij} / S_{ij}$, $\lambda_{ij} = \Delta_{ij} / S_0$, Δ_{ij} — алгебраическое дополнение элемента S_{ij} .

Для нелинейно разносопротивляющихся материалов потенциал W построим по аналогии с уравнениями деформационной теории пластичности. Будем считать, что для пропорционального или близкого к нему нагружения компоненты полной деформации e_{ij} складываются из упругих e_{ij}^e и пластических e_{ij}^p составляющих и в общем случае зависимость упругих компонент от напряжений определяется из выражений (1.3). Тогда потенциал деформаций упрочняющегося материала для случая нагружения представим в виде суммы квазилинейной и нелинейной частей. При этом обе части данного потенциала будут совпадать с точностью до констант, а нелинейность деформирования – учитываться показателем степени n :

$$W = \Phi_e(I_\alpha, III_\alpha)S^2 + [\Phi_p(I_\alpha, III_\alpha)S^2]^n \quad (1.5)$$

Полиномиальное разложение Φ_e, Φ_p по степеням качественных характеристик первого пространства с учетом связей (1) и методики [23; 25] позволяет получить две нелинейные формы потенциала деформаций

$$W = \{K_e\}[W_0] + (\{K_p\}[W_0])^n \quad (1.6)$$

$$W = \{Y_e\}[W_1] + (\{Y_p\}[W_1])^n \quad (1.7)$$

где $\{K_e\}, \{Y_e\}, \{K_p\}, \{Y_p\}$ – константы квазилинейной и нелинейной частей потенциала, определяемые в результате обработки стандартных опытов;

$$[W_0] = S^2 \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 \\ \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2\alpha_3^2 + \alpha_2\alpha_1^2 + \alpha_3\alpha_1^2 + \alpha_3\alpha_2^2 \end{bmatrix}$$

$$[W_1] = S_0^2 \begin{bmatrix} \xi^2 \\ \eta^2 \\ \xi^3 \\ \xi\eta^2 \\ \eta^3 \cos 3\varphi \end{bmatrix}$$

$$\{K_e\} = \{A_e B_e C_e D_e\}; \quad \{K_p\} = \{A_p B_p C_p D_p\}; \quad Y_{e1} = 3(A_e + C_e)$$

$$Y_{e2} = 3(A_e - C_e / 2), \quad Y_{e3} = \sqrt{3}(B_e + 2D_e), \quad Y_{e4} = \sqrt{27}B_e$$

$$Y_{e5} = \sqrt{1,5}(B_e - D_e), \quad Y_{p1} = 3(A_p + C_p), \quad Y_{p2} = 3(A_p - C_p / 2)$$

$$Y_{p3} = 3(B_p + 2D_p), \quad Y_{p4} = \sqrt{27}B_p, \quad Y_{p5} = \sqrt{1,5}(B_p - D_p)$$

Дифференцируя выражение потенциала W (1.6), (1.7) по σ_{ij} находим зависимости между полными деформациями и напряжениями

$$e_{ij} = \{R\}[W_{ij}] \quad (1.8)$$

$$R_m = Y_{em} + n(\{Y_p\}[W_1])^{n-1}Y_{pm} \quad (m = 1, 2, \dots, 5)$$

$$[W_{kk}] = \partial[W_1] / \partial \sigma_{kk} \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$2[W_{ij}] = \partial[W_1] / \partial \tau_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j)$$

Следствием полученного потенциала W (1.6), (1.7) являются общие законы

деформирования, которые носят дилатационный характер:

$$\theta = \sigma/K_0 + \tau/D_0 \quad (1.9)$$

$$1,5\gamma = \sqrt{1 + \text{tg}^2 \omega} (1,5\tau/G_0 + \sigma/D_0) \quad (1.10)$$

$$\text{tg} \omega = 3R_5 \eta \sin 3\varphi / (1,5\eta/G_0 + \xi/D_0) \quad (1.11)$$

$$K_0 = 1/\{R\}[W_2], \quad D_0 = 1/\{R\}[W_3], \quad G_0 = 1,5/\{R\}[W_4]$$

$$\theta = e_{ij} \delta_{ij}, \quad 0,5\gamma = \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} / 3, \quad \varepsilon_{ij} = e_{ij} - \theta \delta_{ij} / 3$$

$$[W_2] = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \xi(2 + \eta^2) \\ 0 \\ -\eta^3 \cos 3\varphi \end{bmatrix}, \quad [W_3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \eta^3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [W_4] = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -\xi^3 \\ 2\xi^3 \\ (2 + \xi^2)\eta \cos 3\varphi \end{bmatrix},$$

где ω – разность фаз напряжений и деформаций, K_0, G_0, D_0 – обобщенные модули изменения объема, сдвига и дилатации.

Очевидно, что законы изменения объема (1.9) и формы (1.10) совместны. Однако взаимосвязь этих законов такова, что под действием гидростатического напряжения изменение формы не происходит (при $\tau = 0$ имеем $\gamma = 0$), но с другой стороны, чистый сдвиг вызывает изменение объема (при $\sigma = 0$ имеем $\theta \neq 0$). Наличие подобных свойств у разносопротивляющихся материалов подтверждалось в ряде теоретических и экспериментальных исследований [2, 7, 9, 20, 26, 27]³.

В том случае, когда зависимость механических характеристик материала от вида напряженного состояния проявляется только в области пластических деформаций, а фаза подобия дивергентов близка к нулю [28], выражение потенциала W (1.7) можно упростить:

$$W = Y_{e1} \sigma^2 + Y_{e2} \tau^2 + [(Y_{p2} + Y_{p4} \xi + Y_{p5} \eta) \tau^2]^n \quad (1.12)$$

В этом случае общие законы деформирования (1.9)–(1.11) приобретают вид

$$\theta = \sigma/K_0 + \tau/D_0, \quad 1,5\gamma = 1,5\tau/G_0 + \sigma/D_0, \quad \text{tg} \omega = 0 \quad (1.13)$$

$$K_0 = \{2Y_{e1} - nY_{p5} \eta^3 [(Y_{p2} + Y_{p4} \xi + Y_{p5} \eta) \tau^2]^{n-1}\}^{-1}$$

$$D_0 = \{nY_{p4} \eta^3 [(Y_{p2} + Y_{p4} \xi + Y_{p5} \eta) \tau^2]^{n-1}\}^{-1}$$

$$G_0 = 1,5/\{2e_2 + n[2(Y_{p2} + Y_{p4} \xi^3) + Y_{p5} \eta(2 + \xi^2)] [(Y_{p2} + Y_{p4} \xi + Y_{p5} \eta) \tau^2]^{n-1}\}$$

Очевидно, что после несложных преобразований из соотношений (1.9)–(1.11), (1.13) можно выделить объемную остаточную деформацию (пластическое разрыхление), которая одновременно зависит от интенсивности напряжений и вида напряженного состояния.

Законы пропорциональной разгрузки или близкой к ней следует принять в виде

$$\theta^* - \theta = 2Y_{e1}(\sigma^* - \sigma), \quad \gamma^* - \gamma = \frac{4}{3} Y_{e2}(\tau^* - \tau) \quad (1.14)$$

Здесь звездочкой обозначены напряжения и деформации, соответствующие состоянию деформируемого тела на момент начала разгрузки.

2. Определение констант, сравнение с экспериментом. В [23, 24] подробно изложена методика определения констант потенциала деформаций W (1.3) для упругого

³ См. указ. публ. Касимов Р.Г. ... с. 87.

разносопротивляющегося тела, допускающего квазилинейную аппроксимацию. Эта методика ограничена результатами обработки диаграмм деформирования материала, полученных из экспериментов на осевое растяжение и осевое сжатие при простом нагружении. Математическая обработка экспериментальных данных проводилась по способу наименьших квадратов.

Аналогичной методикой можно воспользоваться для вычисления констант потенциала (1.6), представленного через характеристики пространства, связанного с главными осями тензора напряжений. Очевидно, что эта форма записи потенциала деформаций W имеет по четыре константы для квазилинейной и нелинейной составляющих. Тогда при одноосном растяжении и одноосном сжатии зависимости между главными деформациями и напряжениями (1.8) можно представить в виде

$$e_k^\pm = P_k^\pm \sigma_1^\pm + T_k^\pm (\sigma_1^\pm)^m \quad (k=1,2; m=2n-1), \quad (2.1)$$

где P_k, T_k – коэффициенты, вычисляемые соответственно через константы потенциала $\{K_e\}$ и $\{K_p\}$ с учетом значений $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ – при одноосном растяжении и $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ – при одноосном сжатии; верхние индексы "плюс" относятся к характеристикам растяжения, а "минус" – к характеристикам сжатия.

С другой стороны, при фиксированном показателе степени m коэффициенты P_k, T_k можно определить по результатам обработки экспериментальных диаграмм деформирования, построенных в условиях простого нагружения и обработанных по методу наименьших квадратов. Очевидно, что для вычисления восьми констант потенциала деформаций W , представленного в форме (1.6), достаточно четыре экспериментальных кривых, выбранных из опытов на одноосное растяжение и одноосное сжатие.

Точность аппроксимации экспериментальных диаграмм непосредственно зависит от выбора показателя степени m . Оптимальная степень выделяется путем простого перебора ее значений с установленным шагом изменения. В процессе расчета следует проверять точность теоретически предсказываемых диаграмм деформирования материала для сложных видов напряженного состояния и отфильтровывать те комбинации констант и показателя степени, которые приводят к математическим неопределенностям. Такие неопределенности проявляются для некоторых видов напряженного состояния при возведении отрицательных значений $\{K_p\}[W_0]$ в дробную степень. Константы $\{Y_e\}, \{Y_p\}$ потенциала W , представленного в форме (1.7), следует вычислить через коэффициенты $\{K_e\}, \{K_p\}$ по формулам связи.

Для полной корректности рассмотренных соотношений (1.6), (1.7) с учетом полученных констант необходимо проверить устойчивость потенциала в малом [29, 30]:

$$\delta\sigma_{ij}\delta e_{ij} \geq 0 \quad (2.2)$$

Выполнив выкладки, аналогичные изложенным в работах [16, 30]⁴ применительно потенциалу $W(\psi, \varphi, S_0)$, получим, что для устойчивого материала необходимо и достаточно, чтобы были неотрицательны все главные миноры матрицы $[C_{ij}]$ с коэффициентами

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{\partial^2 W}{\partial S_0^2}, \quad C_{12} = \frac{\partial^2 W}{\partial S_0 \partial \psi}, \quad C_{13} = \frac{\partial^2 W}{\partial S_0 \partial \varphi} - \frac{1}{S_0} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \\ C_{22} &= \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} + S_0 \frac{\partial W}{\partial S_0}, \quad C_{23} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial \psi} - \frac{\xi}{\eta} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \\ C_{33} &= \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + S_0 \eta^2 \frac{\partial W}{\partial S_0} + \xi \eta \frac{\partial W}{\partial \psi} \end{aligned} \quad (2.3)$$

⁴ См. также *Трещев А.А., Воронова С.А.* О единственности решения задач теории упругости разносопротивляющихся сред. Тула, 1987. 11 с. Деп. в ВИНТИ 23.03.87, № 2040-В87.

Проверку устойчивости потенциала следует проводить параллельно с процедурой вычисления констант, учитывая диапазоны изменения качественных характеристик напряженного состояния ψ и φ ($0 \leq \psi \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/3$).

Пользуясь рассмотренной методикой, и ограничиваясь результатами испытаний на осевое растяжение и осевое сжатие для графита АРВ, чугуна СЧ15-32 и тяжелого бетона двух классов [4, 8, 7, 27]⁵, можно вычислить константы потенциала деформаций (1.6), (1.7), необходимые для определения состояний указанных материалов.

Полученные константы имеют следующие значения:

(а) для графита АРВ:

$$n = 2,1; A_e = 6,083 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; B_e = 1,429 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; C_e = -3,267 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; \\ D_e = 1,015 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; A_p = 3,822 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{(1-2n)/n}; B_p = 1,625 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{(1-2n)/n}; \\ C_p = 1,857 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{(1-2n)/n}; D_p = 1,943 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{(1-2n)/n}$$

(б) для чугуна СЧ15-32:

$$n = 3,6; A_e = 7,842 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}; B_e = 9,313 \cdot 10^{-8} \text{ МПа}^{-1}; C_e = -4,333 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}; \\ D_e = 1,461 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}; A_p = 1,191 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{(1-2n)/n}; B_p = 7,073 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{(1-2n)/n}; \\ C_p = -4,178 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{(1-2n)/n}; D_p = 2,761 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{(1-2n)/n};$$

(с) для бетона с пределом прочности на сжатие $R^- = 28,4$ МПа:

$$n = 2,75; A_e = 3,148 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; B_e = 6,723 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}; C_e = -9,705 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}; \\ D_e = -4,861 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^{-1}; A_p = 4,927 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{(1-2n)/n}; B_p = 3,865 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{(1-2n)/n}; \\ C_p = 6,782 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{(1-2n)/n}; D_p = 2,712 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{(1-2n)/n};$$

(d) для бетона с пределом прочности на сжатие $R^- = 37$ МПа:

$$n = 2,8; A_e = 2,341 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; B_e = 2,783 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}; C_e = -1,549 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; \\ D_e = -7,794 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}; A_p = 1,752 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{(1-2n)/n}; B_p = 8,120 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{(1-2n)/n}; \\ C_p = -1,056 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{(1-2n)/n}; D_p = 1,490 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{(1-2n)/n}.$$

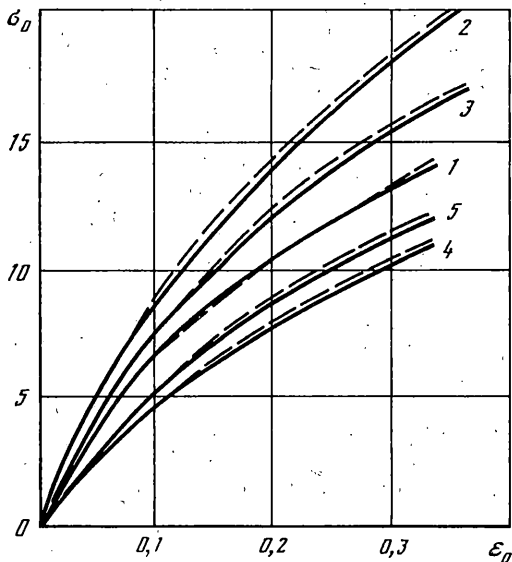
Заметим, что для анализа напряженно-деформированного состояния специально были выбраны три вида конструкционных материалов, существенно отличающихся по структуре и по механическим свойствам.

С учетом представленных констант на фиг. 1 проведено сравнение экспериментальных диаграмм деформирования (сплошные кривые) с расчетными (штриховые линии) для графита АРВ при сложных видах напряженного состояния, на фиг. 2 – для чугуна СЧ15-32, на фиг. 3 – для бетона с $R^- = 28,4$ МПа, а на фиг. 4 – для бетона с $R^- = 37$ МПа. На фиг. 1, 2 по осям ординат отложены величины интенсивности напряжений $\sigma_0 = \sqrt{1,5S_{ij}S_{ij}}$ (МПа), по осям абсцисс – величины интенсивности деформаций $\varepsilon_0 = \sqrt{2/3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$ (%), а на фиг. 3, 4 – величины τ и γ , соответственно. Кривые 1, 2 на фиг. 1–4 соответствуют одноосным растяжению и сжатию; кривые 3 – чистому сдвигу, 4 – пропорциональному нагружению при соотношениях главных напряжений $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : 1 : 0$, 5 – при $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : 0,325 : 0$, 6 – при $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : 0,5 : 0$, 7 – при $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : -1,4 : 0$, 8 – при $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : -0,217 : 0$, 9 – при $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -1 : 0$, 10 – при $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,1 : -0,1$, 11 – при $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,52 : -0,06$, 12 – при $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,03 : -0,03$, 13 – при $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,5 : -0,07$.

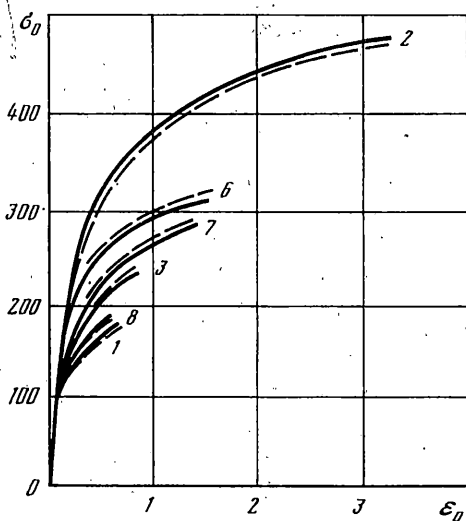
Как видно из приведенных графиков, теоретические зависимости между деформациями и напряжениями хорошо согласуются с экспериментальными для всех четырех материалов. Таким образом, судя по фиг. 1–4, можно утверждать, что потенциальные соотношения (1.6), (1.7) достаточно универсальны и вполне применимы для расчета упругопластических состояний широкого класса разносопротивляющихся материалов.

Построение потенциала деформаций (1.6), (1.7) проводилось в предположении, что упругие характеристики материала при растяжении и при сжатии различны, а эта

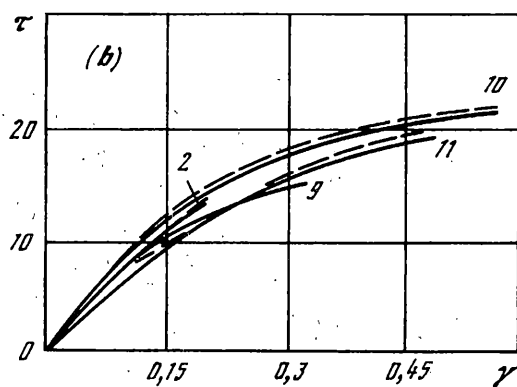
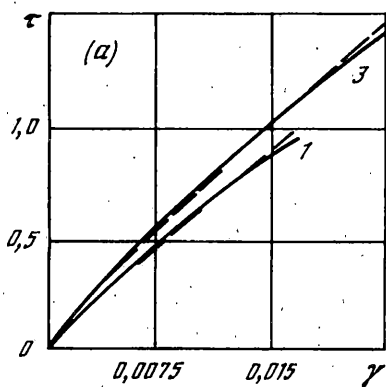
⁵ См. указ. публ. Касимов Р.Г. ... с. 87.



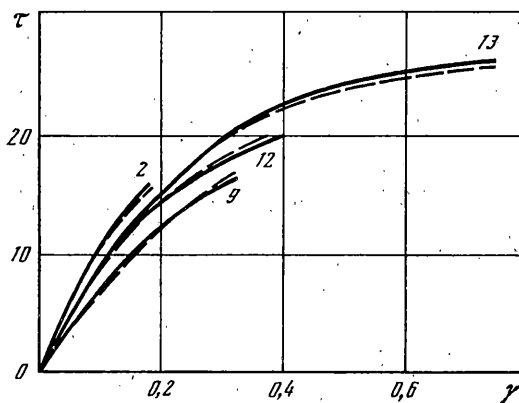
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

гипотеза зачастую подвергается критике [31]. Как показали расчеты, для чугуна СЧ15-32, имеющего достаточно развитый единый линейный участок упругого деформирования, теоретические модули упругости при растяжении и при сжатии ($E^+ = 0,5/(A_e + B_e)$, $E^- = 0,5/(A_e - B_e)$) отличаются на 2,3%. В этом случае для расчета напряженно-деформированных состояний можно воспользоваться упрощенным потенциалом деформаций (1.12). Для определения констант этого потенциала можно воспользоваться результатами одноосных испытаний и описанной выше методикой, приняв при этом $Y_{p5} = 0$. В противном случае для определения константы Y_{p5} необходимо использовать диаграмму деформирования для чистого сдвига. При описании деформирования графита АРВ и бетона, у которых единый линейный участок на диаграммах практически отсутствует, а зависимость механических свойств от вида напряженного состояния наблюдается при весьма низких напряжениях, погрешность соотношений (1.12) заметно выше, чем у потенциала (1.6), (1.7).

Таким образом, рассмотренный потенциал деформаций адекватно представляет упругопластические состояния материалов не только имеющих сравнимую протяженность участков упрочнения для любых видов напряженного состояния [4, 7, 8]⁶, но и материалов, интервал упрочнения которых может отличаться на порядок при изменении этого состояния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tasuji M.E., Slate F.O., Nilson A.H.* Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading // J. Amer. Concrete Inst. 1978. V. 75. No. 7. P. 306–312.
2. *Kupfer H., Hilsdorf H.K., Rusch H.* Behavior of concrete under biaxial stresses // J. Amer. Concrete Inst. 1969. V. 66. No. 8. P. 656–666.
3. *Писаренко Г.С., Лебедев А.А., Ломашевский В.П.* Экспериментальные исследования закономерностей деформирования углеродистой стали в условиях сложного напряженного состояния при низких температурах // Проблемы прочности. 1969. № 5. С. 42–47.
4. *Березин А.В., Ломакин Е.В., Строков В.И., Барабанов В.Н.* Сопротивление деформированию и разрушению изотропных графитовых материалов в условиях сложного напряженного состояния // Проблемы прочности. 1979. № 2. С. 60–65.
5. *Елсуфьев С.А.* Исследование деформирования фторопласта-4 при линейном и плоском напряженном состояниях // Механика полимеров. 1968. № 4. С. 742–746.
6. *Елсуфьев С.А., Чебанов В.М.* Изучение деформирования фторопласта в условиях плоского напряженного состояния // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1971. Вып. 8. С. 209–213.
7. *Ломакин Е.В.* Нелинейная деформация материалов, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 92–99.
8. *Березин А.В.* Влияние повреждений на деформационные и прочностные характеристики твердых тел. М.: Наука, 1990. 135 с.
9. *Амбарцумян С.А.* Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 320 с.
10. *Матченко Н.М., Толоконников Л.А.* О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах // Инж. ж. МТТ. 1968. № 6. С. 108–110.
11. *Jones R.M.* Stress-strain relation for materials with different moduli in tension and compression // AIAA J. 1977. V. 15. No. 1. P. 16–23.
12. *Бригадиоров Г.В., Матченко Н.М.* Вариант построения основных соотношений разномодульной теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 5. С. 109–111.
13. *Туровцев Г.В.* О построении определяющих уравнений для изотропных упругих сред с усложненными свойствами // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродин. СО АН СССР. 1981. Вып. 53. С. 132–143.
14. *Шапиро Г.С.* О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. ж. МТТ. 1966. № 2. С. 123–125.

⁶ См. также *Туровцев Г.В.* Вариант теории деформирования и методы механики тел, свойства которых зависят от вида напряженного состояния: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: Запорожье, 1992. 257 с.

15. *Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н.* Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 29–34.
16. *Цвелодуб И.Ю.* К разномодульной теории упругости изотропных материалов // Динамика сплошной среды. Новосибирск. Ин-т гидродин. СО АН СССР. 1977. Вып. 32. С. 123–131.
17. *Гаврилов Д.А.* Зависимости между напряжениями и деформациями для квазилинейного разномодульного тела // Проблемы прочности. 1979. № 9. С. 10–12.
18. *Матченко Н.М., Толоконников Л.А.* О нелинейных соотношениях разномодульной теории упругости // Сб. работ по теории упругости. Тула: Тульск. политехн. ин-т, 1968. С. 69–72.
19. *Пономарев Б.В.* Изгиб прямоугольных пластин из нелинейно-упругих материалов, неодинаково работающих на растяжение и сжатие // Прикл-Механика. 1968. Т. 4. Вып. 2. С. 20–27.
20. *Быков Д.Л.* Основные уравнения и теоремы для одной модели физически нелинейной среды // Инж. ж. МТТ. 1966. № 4. С. 58–64.
21. *Панферов В.М.* Теория упругости и деформационная теория пластичности для твердых тел с разными свойствами на сжатие, растяжение и кручение // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 1. С. 41–44.
22. *Гаврилов Д.А.* Определяющие уравнения для нелинейных тел неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию // Докл. АН УССР. Сер. А. 1980. № 3. С. 37–41.
23. *Матченко Н.М., Толоконников Л.А., Трещев А.А.* Определяющие соотношения изотропных разносопротивляющихся сред. Квазилинейные соотношения // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 73–78.
24. *Толоконников Л.А., Трещев А.А.* К описанию свойств разносопротивляемости конструкционных материалов // Тр. 9-й Конф. по прочности и пластичности. М.: Ин-т проблем механики РАН, 1996. Т. 2. С. 160–165.
25. *Аркания Э.В., Матченко Н.М., Трещев А.А.* К построению определяющих уравнений разномодульной теории упругости изотропных сред // Механика сплошных сред. Тбилиси: ГПИ. 1984. № 9. С. 88–90.
26. *Козачевский А.И.* Модификация деформационной теории пластичности бетона и плоское напряженное состояние железобетона с трещинами // Строит. механика и расчет сооружений. 1983. № 4. С. 12–16.
27. *Леонов М.Я., Паняев В.А., Русинко К.Н.* Зависимости между деформациями и напряжениями для полухрупких тел // Инж. ж. МТТ. 1967. № 6. С. 26–32.
28. *Тамуров Н.Г., Туровцев Г.В.* Закон упругости для изотропного материала с различными характеристиками при растяжении и сжатии // Динамика и прочность тяжелых машин. Днепрпетровск. ДГУ, 1983. С. 76–80.
29. *Друккер Д.С.* О постулате устойчивости материала в механике сплошной среды // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1964. № 3. С. 115–128.
30. *Турсунов Б.С.* О свойствах потенциала напряжений упругих тел // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 1. С. 75–83.
31. *Жуков А.М.* Упругие, прочностные и деформационные свойства некоторых полимеров // Механика композит. материалов. 1984. № 1. С. 8–15.

Москва

Поступила в редакцию
30.02.1998