

УДК 539.3

© 1999 г. А.А. ПАНЬКОВ

**АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ СВОЙСТВ
ОДНОНАПРАВЛЕННОГО ВОЛОКНИСТОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА
ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ САМОСОГЛАСОВАНИЯ**

Композиты благодаря своим высоким удельным физико-механическим свойствам находят широкое применение в различных областях науки и техники. Поведение и свойства композита обуславливаются сложным взаимодействием большого числа элементов, составляющих структуру материала. Нерегулярный характер реальных структур требует решения задач прогнозирования эффективных физико-механических свойств композитов в статистической постановке.

Представлен новый метод статистической механики композитов – обобщенный метод самосогласования [1] для прогнозирования эффективных упругих свойств композитов, который, в отличие от известных методов, например, от сингулярного приближения теории случайных функций или от традиционных методов самосогласования [2–4], позволяет непосредственно учитывать такие "тонкие" особенности реальных или модельных структур как заданные вероятностные законы случайного взаимного расположения и статистического разброса размеров включений композита.

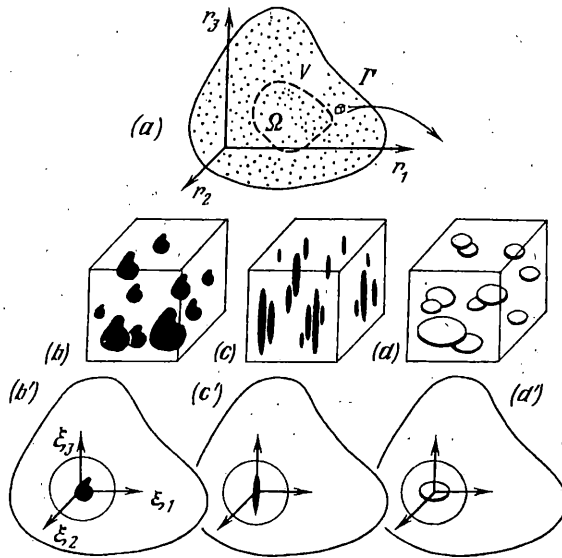
Обобщенный метод самосогласования позволяет свести задачу прогнозирования эффективных упругих свойств композитов со случайными структурами к решению более простой "осредненной" задачи о включении с переходным слоем в среде с искомыми эффективными упругими свойствами. Характерный размер переходного слоя определяется радиусом корреляции случайной структуры, а его упругие свойства учитывают "ближний" порядок взаимного расположения включений через осредненную индикаторную функцию для заданной модельной или реальной случайной структуры композита.

1. Постановка задачи. Пусть случайная структура композита обладает свойствами однородности и эргодичности и для наглядности задана не функциями распределения, а соответствующей представительной реализацией этой случайной структуры в некоторой области V с границей Γ . Считаем, что все включения имеют одинаковые упругие свойства, форму и ориентацию; статистический разброс лишь у взаимного расположения и размеров включений, их коэффициентов подобия α (фиг. 1). Упругие свойства включений и матрицы однородны и считаются известными; выполняются условия идеального контакта на межфазных поверхностях.

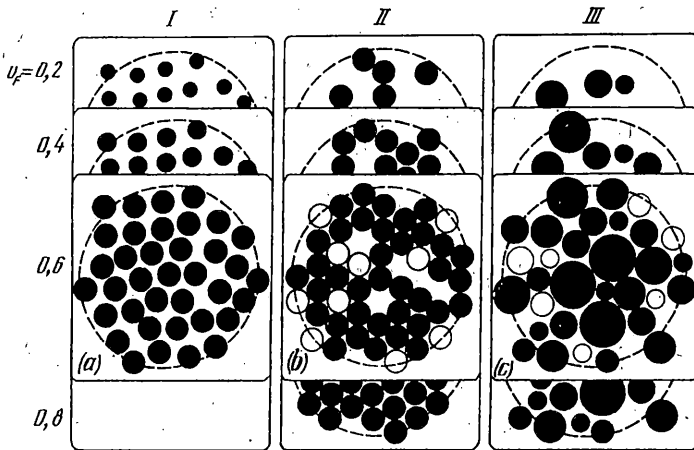
Эффективные анизотропные упругие свойства композита характеризуются тензором C^* , задача расчета которого через заданные величину ν_F относительного объемного содержания включений и тензоры упругих свойств матрицы C^M и включений C^F , согласно известной зависимости [2]:

$$C_{ijmn}^* = C_{ijmn}^M + \nu_F (C_{ijdb}^F - C_{ijdb}^M) N_{dbmn}^F \quad (1.1)$$

$$\epsilon_{db}^F = N_{dbmn}^F \epsilon_{mn}^* \quad (1.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

сводится к расчету тензора \mathbf{N}^F , связывающего тензор осредненных по включениям деформаций $\boldsymbol{\epsilon}^F$ с заданным однородным полем макродеформаций $\boldsymbol{\epsilon}^*$ композита (1.2). Формально тензор осредненных по включениям деформаций $\boldsymbol{\epsilon}^F$, и далее тензор \mathbf{N}^F по формуле (1.2), может быть определен по зависимости

$$\epsilon_{ij}^F = \frac{1}{|\Omega_E| |\Omega_F|} \int \epsilon_{ij}(\mathbf{r}) d\Omega_F$$

через решения для поля деформаций $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r})$ задачи теории упругости в области \mathbf{V} : $\sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) = 0$, $\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijmn}(\mathbf{r}) \epsilon_{nm}(\mathbf{r})$, $\epsilon_{ij}(\mathbf{r}) = 1/2(u_{i,j}(\mathbf{r}) + u_{j,i}(\mathbf{r}))$, $u_i|_{\Gamma} = \epsilon_{ij}^* r_j$, где $\boldsymbol{\epsilon}^*$ – заданный тензор однородной макродеформации, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ – поля напряжений и перемещений. Поле тензора упругих свойств $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ допускает разложение вида $C_{ijmn}(\mathbf{r}) = \omega(\mathbf{r}) C_{ijmn}^F +$

$+(1 - \omega(\mathbf{r}))C_{ijmn}^M$ через индикаторную функцию включений

$$\omega(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \mathbf{V}_F \\ 0, & \mathbf{r} \notin \mathbf{V}_F \end{cases}$$

Здесь \mathbf{V}_F – область включений в области \mathbf{V} , $\mathbf{\Omega}_F$ – область включений из некоторой представительной области композита $\mathbf{\Omega}$, расположенной на удалении от границы Γ так, что геометрия границы Γ не влияет на поля деформирования в области $\mathbf{\Omega}$ и в ее окрестности, характерный размер которой соизмерим с размером области $\mathbf{\Omega}$. В представительной области композита $\mathbf{\Omega}$ расположено большое, но конечное число включений N и искомая осредненная деформация ϵ^F может быть представлена разложением

$$\epsilon_{ij}^F = \frac{1}{|\mathbf{\Omega}_F|} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbf{v}_{(k)}} \epsilon_{ij}(\mathbf{r}) d\mathbf{v}_{(k)}, \quad |\mathbf{\Omega}_F| = \sum_{k=1}^N |\mathbf{v}_{(k)}|$$

где $|\mathbf{\Omega}_F|$ – суммарный объем N включений, $\mathbf{v}_{(k)}$ и $|\mathbf{v}_{(k)}|$ – соответственно область и объем k -го включения из области $\mathbf{\Omega}$.

2. Обобщенный метод самосогласования. Пусть коэффициенты подобия $\alpha_{(k)}$ включений из области $\mathbf{\Omega}$ заданы относительно размеров некоторого формального включения, объем $|\mathbf{v}|$ области \mathbf{v} которого равен среднему арифметическому объему всех N включений из области $\mathbf{\Omega}$; тогда в формуле (1.3) суммарный объем включений $|\mathbf{\Omega}_F|$ и элементарный объем $d\mathbf{v}_{(k)}$ произвольного k -го включения из области $\mathbf{\Omega}$ могут быть выражены через величины $|\mathbf{v}|$ и $d\mathbf{v}$ соотношениями: $|\mathbf{\Omega}_F| = N|\mathbf{v}|$, $d\mathbf{v}_{(k)} = \alpha_{(k)}^\beta d\mathbf{v}$, где показатель степени β связан с размерностью задачи и равен 1, 2 или 3 соответственно для слоистого, однонаправленного волокнистого или гранулированного композитов.

Обозначим через $\bar{\omega}(\xi)$, $\bar{\sigma}(\xi)$ и $\bar{\epsilon}(\xi)$ осредненные поля, определенные по соответствующим функциям $\omega(\mathbf{r})$, $\sigma(\mathbf{r})$ и $\epsilon(\mathbf{r})$. Например, осредненное поле $\bar{\omega}(\xi)$ рассчитывается через функцию $\omega(\mathbf{r})$ по формуле

$$\bar{\omega}(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \alpha_{(k)}^\beta \omega(\mathbf{r}_{(k)} + \alpha_{(k)} \xi) \quad (2.1)$$

где $\mathbf{r}_{(k)}$ – координаты центра k -го включения, центр локальной системы координат ξ совмещен с центром формального включения \mathbf{v} . Осредненные поля $\bar{\sigma}(\xi)$ и $\bar{\epsilon}(\xi)$ вводятся аналогично (2.1). Оператор осреднения взят в виде (2.1) для того, чтобы искомую осредненную деформацию ϵ^F (1.3) можно было найти через дополнительное осреднение $\epsilon_{ij}^F = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \int_{\mathbf{v}} \bar{\epsilon}_{ij}(\xi) d\mathbf{v}$ и чтобы осредненные поля $\bar{\sigma}(\xi)$ и $\bar{\epsilon}(\xi)$ удовлетворяли

соответственно уравнениям равновесия и уравнениям совместности деформаций. Таким образом, для постановки "осредненной" задачи механики относительно полей деформирования $\bar{\sigma}(\xi)$ и $\bar{\epsilon}(\xi)$ необходимо установить связь типа обобщенного закона Гука между этими полями; если структура композита в области \mathbf{V} является представительной реализацией однородного эргодического случайного поля, моментные функции которого локальны, то "граничные условия" осредненной задачи имеют вид $\bar{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij}^*$ для значений $\xi \equiv |\xi|$, превышающих радиус корреляции упругого и деформационного полей.

Установим связь между полями $\bar{\sigma}(\xi)$ и $\bar{\epsilon}(\xi)$. Так как для прогнозирования (1.1) тензора эффективных упругих свойств \mathbf{C}^* необходимо знать лишь осредненную по включениям деформацию (1.2), поэтому действительные поля деформирова-

ния представим в упрощенной форме

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \omega(\mathbf{r})\sigma_{ij}^F + (1 - \omega(\mathbf{r}))\sigma_{ij}^M$$

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \omega(\mathbf{r})\varepsilon_{ij}^F + (1 - \omega(\mathbf{r}))\varepsilon_{ij}^M$$

где индексами F и M отмечены осредненные соответственно по включениям и матрице напряжения и деформации. Тогда осредненные поля $\bar{\sigma}(\xi)$ и $\bar{\varepsilon}(\xi)$ возможно будет представить через разложения

$$\bar{\sigma}_{ij}(\xi) = \bar{\omega}(\xi)\sigma_{ij}^F + (1 - \bar{\omega}(\xi))\sigma_{ij}^M \quad (2.2)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(\xi) = \bar{\omega}(\xi)\varepsilon_{ij}^F + (1 - \bar{\omega}(\xi))\varepsilon_{ij}^M \quad (2.3)$$

С учетом обобщенного закона Гука для включений и матрицы из формулы (2.2) получим уравнение вида

$$\bar{\sigma}_{ij}(\xi) = \bar{\omega}(\xi)C_{ijmn}^F\varepsilon_{mn}^F + (1 - \bar{\omega}(\xi))C_{ijmn}^M\varepsilon_{mn}^M \quad (2.4)$$

в котором деформацию ε^M выразим через ε^F из соотношения

$$\nu_F\varepsilon_{mn}^F + (1 - \nu_F)\varepsilon_{mn}^M = \varepsilon_{mn}^* \quad (2.5)$$

В результате получим формулу

$$\bar{\sigma}_{ij}(\xi) = \bar{\omega}(\xi)C_{ijmn}^F\varepsilon_{mn}^F + \frac{1 - \bar{\omega}(\xi)}{1 - \nu_F}C_{ijmn}^M(\varepsilon_{mn}^* - \nu_F\varepsilon_{mn}^F) \quad (2.6)$$

не содержащую тензор ε^M . Так как из уравнений (1.1) и (1.2) следует зависимость

$$\varepsilon_{mn}^F = \frac{1}{\nu_F}S_{mndb}^{-1}(C_{dbgh}^* - C_{dbgh}^M)\varepsilon_{gh}^* \quad (2.7)$$

где S^{-1} – тензор, обратный тензору $S_{mndb} \equiv C_{mndb}^F - C_{mndb}^M$, следовательно уравнение (2.6) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}(\xi) = & \left[\frac{1 - \bar{\omega}(\xi)}{1 - \nu_F}C_{ijgh}^M + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\bar{\omega}(\xi)}{\nu_F}C_{ijmn}^F - \frac{1 - \bar{\omega}(\xi)}{1 - \nu_F}C_{ijmn}^M \right) S_{mndb}^{-1}(C_{dbgh}^* - C_{dbgh}^M) \right] \varepsilon_{gh}^* \end{aligned} \quad (2.8)$$

В формуле (2.8) необходимо выразить тензор ε^* через функцию $\bar{\varepsilon}(\xi)$. Для этого в соотношении (2.3) выразим тензор ε^M через ε^F на основе зависимости (2.5) и далее выразим ε^F через тензор ε^* по зависимости (2.7); в результате получим уравнение

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(\xi) = k_{ijmn}(\xi)\varepsilon_{mn}^* \quad (2.9)$$

$$k_{ijmn}(\xi) = \frac{1 - \bar{\omega}(\xi)}{1 - \nu_F}E_{ijmn} + \frac{\bar{\omega}(\xi) - \nu_F}{\nu_F(1 - \nu_F)}S_{ijdb}^{-1}(C_{dbmn}^* - C_{dbmn}^M)$$

где \mathbf{E} – единичный тензор.

Таким образом, из зависимостей (2.8) и (2.9) следует формула, замыкающая систему уравнений осредненной краевой задачи

$$\bar{\sigma}_{ij}(\xi) = a_{ijmn}(\xi)\bar{\varepsilon}_{mn}(\xi)$$

$$a_{ijmn}(\xi) = \left[\frac{1 - \bar{\omega}(\xi)}{1 - \nu_F} C_{ijgh}^M + \left(\frac{\bar{\omega}(\xi)}{\nu_F} C_{ijqp}^F - \frac{1 - \bar{\omega}(\xi)}{1 - \nu_F} C_{ijqp}^M \right) \times \right. \\ \left. \times S_{qpdh}^{-1} (C_{dbgh}^* - C_{dbgh}^M) \right] k_{ghmn}^{-1}(\xi) \quad (2.10)$$

Когда C^F и C^M – изотропные, а C^* – также изотропный или трансверсально-изотропный тензоры, тогда поле $\mathbf{a}(\xi)$ будет соответственно изотропным или трансверсально-изотропным в каждой точке ξ . Объемный модуль $K_a(\xi)$ и модуль сдвига $G_a(\xi)$ для случая изотропного поля $\mathbf{a}(\xi)$ или соответственно объемный модуль плоской деформации $k_{a12}(\xi)$ и модуль сдвига $G_{a12}(\xi)$ в плоскости изотропии, например, r_1Or_2 для случая трансверсально-изотропного поля $\mathbf{a}(\xi)$ могут быть определены на основе формулы (2.10) по единой зависимости вида

$$L_a(\xi) = L_M \frac{\beta(\xi) + ((L_F / L_M)\alpha(\xi) - \beta(\xi))\gamma_L}{\beta(\xi) + (\alpha(\xi) - \beta(\xi))\gamma_L} \quad (2.11)$$

$$\alpha(\xi) = \bar{\omega}(\xi) / \nu_F, \quad \beta(\xi) = (1 - \bar{\omega}(\xi)) / (1 - \nu_F)$$

$$\gamma_L = (L^* - L_M) / (L_F - L_M) \quad (2.12)$$

где формальный символ L в формулах (2.11), (2.12) надо последовательно заменить соответственно на величины: K , G или k_{12} и G_{12} . Для произвольного трансверсально-изотропного тензора упругих свойств C с плоскостью изотропии r_1Or_2 существуют зависимости: $k_{12} = 1/2(C_{1111} + C_{1122})$, $G_{12} = C_{1212}$.

Таким образом, из решения вспомогательной осредненной задачи (фиг. 1, σ' - d') могут быть определены компоненты $N^F(C^*)$ в зависимости (1.2) как функции тензора C^* . Следовательно, уравнение (1.1) может быть преобразовано к виду $C_{ijmn}^* = C_{ijmn}^M + \nu_F (C_{ijdb}^F - C_{ijdb}^M) N_{abmn}^F(C^*)$, решением которого и будет являться искомый тензор эффективных упругих свойств C^* композита со случайной структурой.

3. Численный расчет. Рассмотрим прогнозирование обобщенным методом самосогласования и анализ в сравнении с экспериментальными данными [5] эффективных упругих свойств однонаправленного волокнистого стеклопластика на основе различных моделей (фиг. 2) реальных случайных структур в плоскости изотропии r_1Or_2 . Фрагмент структуры, по которому проводился расчет величины относительного объемного содержания волокон ν_F и численное построение осредненной индикаторной функции $\bar{\omega}(\xi)$ в предположении статистической изотропии структуры в плоскости r_1Or_2 , ограничен штриховой окружностью (фиг. 2), например, при $\nu_F = 0,6$ (фиг. 2, $a-c$) соответственно для различных I–III-го типов моделей. Для других значений $\nu_F \in [0,2; 0,6]$ фрагменты структуры I-го типа получены уменьшением радиуса волокна r_F при фиксированных координатах центров волокон фрагмента на фиг. 2, a . Фрагменты структуры II-го типа для значений $\nu_F \in [0,2; 0,8]$ были получены варьированием числа свободных от волокон узлов правильной гексагональной решетки при фиксированном значении отношения величины стороны ячейки к радиусу волокна r_F , что обеспечивало минимальную гарантированную прослойку матрицы между волокнами; ее величина для рассматриваемых структур II.1, II.2 и II.3 соответственно равна 4%, 2% и 1% от радиуса волокна r_F . Полидисперсные фрагменты структур III-го типа для значений $\nu_F \in [0,2; 0,8]$ образованы по схеме "удаления" волокон из плотнозаполненной укладки фрагмента структуры при $\nu_F = 0,8$. Незатушеванные окружности на фиг. 2, b, c фрагментов структур II и III-го типов указывают размеры и расположения удаленных волокон при переходе от $\nu_F = 0,8$ к значению 0,6.

Результаты численного расчета осредненной индикаторной функции $\bar{\omega}(\xi)$ для различных значений величины относительного объемного содержания волокон ν_F и для разных типов структур представлены на фиг. 3; при значениях $\xi > 7r_F$ полагали равенство $\bar{\omega} = \nu_F$, так как для рассматриваемых структур (фиг. 2) особенности "дальнего" порядка несущественны, что было подтверждено неизменностью численных результатов прогнозирования эффективных упругих свойств при различных значениях "радиуса" корреляции $> 7r_F$. Графики $\bar{\omega}(\xi)$ для структур II.1, II.2 и II.3 отличаются между собой незначительно и на фиг. 3 обозначены условно единой кривой II. Для полидисперсной структуры III-го типа r_F есть радиус формального волокна, площадь поперечного сечения которого равна среднему арифметическому значению от величин площадей поперечных сечений волокон рассматриваемого фрагмента. Пунктирные линии 1 и 2 на фиг. 3 – аппроксимации действительных зависимостей $\bar{\omega}(\xi)$ кусочно-постоянными функциями, которые принимают значения соответственно $1,0 \nu_F$ и $1, \nu_F$. Значение 0 аппроксимация 1 принимает на интервале (r_F, R) , где величина R определяется из равенства $(r_F/R)^2 = \nu_F$.

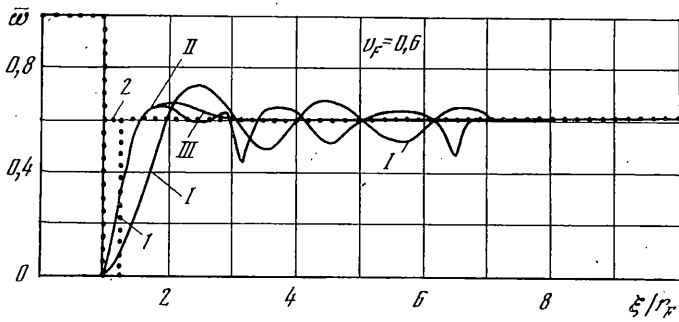
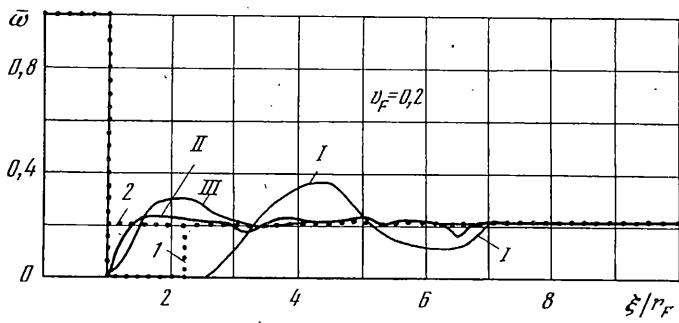
Рассмотрим численный расчет эффективных упругих технических характеристик: E_3^* и E_1^* – модулей Юнга соответственно в направлениях r_3 и r_1 ; k_{12}^* и G_{12}^* – соответственно объемного модуля плоской деформации и модуля сдвига в плоскости r_1Or_2 ; ν_{13}^* и ν_{12}^* – коэффициентов Пуассона, характеризующих сокращения в направлении r_1 при растяжении соответственно в направлениях r_3 и r_2 трансверсально-изотропного однонаправленного волокнистого стеклопластика, модули Юнга и коэффициенты Пуассона изотропных матрицы и волокон которого: $E_M = 3,45$ ГПа, $\nu_M = 0,35$ и $E_F = 73,10$ ГПа, $\nu_F = 0,22$ [5] для различных I–III-го типов моделей случайных структур (фиг. 2) в плоскости изотропии r_1Or_2 . Благодаря известным точным соотношениям [6]:

$$\begin{aligned} \nu_{13}^* - \nu_F \nu_F - (1 - \nu_F) \nu_M &= \left(\frac{\nu_F - \nu_M}{1/k_{F12} - 1/k_{M12}} \right) \left(\frac{1}{k_{12}^*} - \frac{\nu_F}{k_{F12}} - \frac{1 - \nu_F}{k_{M12}} \right) = \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1/k_{F12} - 1/k_{M12}}{\nu_F - \nu_M} \right) (E_3^* - \nu_F E_F - (1 - \nu_F) E_M) \end{aligned} \quad (3.1)$$

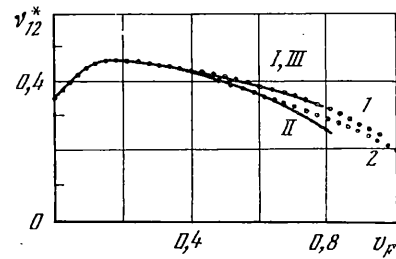
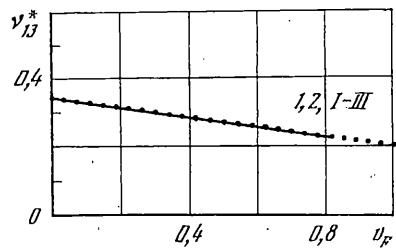
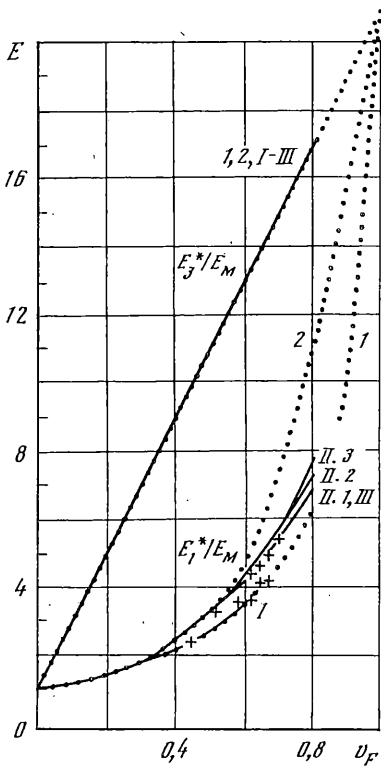
$$E_1^* = \frac{4G_{12}^* k_{12}^*}{k_{12}^* + G_{12}^* + 4\nu_{13}^{*2} G_{12}^* k_{12}^* / E_3^*}, \quad \nu_{12}^* = \frac{E_1^*}{2G_{12}^*} - 1$$

связывающим искомые эффективные упругие технические характеристики, для полного определения эффективных упругих свойств композита необходимо рассчитать обобщенным методом самосогласования лишь величины k_{12}^* , G_{12}^* и дополнительно G_{13}^* – эффективный модуль сдвига в плоскости r_1Or_3 , так как остальные эффективные характеристики могут быть определены по формулам (3.1).

Расчетная схема осредненной задачи – изотропное волокно с тензором упругих свойств C^F , окруженное трансверсально-изотропными переходным слоем и средой, упругие свойства которых определяются соответственно функцией $a(\xi)$ и тензором C^* , при простых условиях нагружения среды на бесконечности: (1) всестороннее растяжение в плоскости r_1Or_2 при плоском деформированном состоянии; (2) сдвиг в плоскости r_1Or_2 и (3) сдвиг в плоскости r_1Or_3 . Из совместного решения 1 и 2-й подзадач становится возможным определить эффективные объемный модуль плоской деформации k_{12}^* и модуль сдвига G_{12}^* . Таким образом, задача прогнозирования эффективного модуля сдвига G_{13}^* может быть выделена в отдельную подзадачу, в



Фиг. 3



Фиг. 4

k, G	t	$\nu_F=0$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
k_{12}^* k_{M12}	I	I	1,280	1,464	1,690	1,986	2,401	—	—
	II.1	I	1,302	1,528	1,842	2,267	2,856	3,568	4,229
	II.2	I	1,303	1,533	1,852	2,298	2,910	3,722	4,523
	II.3	I	1,304	1,535	1,856	2,317	2,957	3,839	4,743
	III	I	1,299	1,520	1,835	2,262	2,776	3,596	4,455
	I	I	1,379	1,656	2,034	2,567	3,368	—	—
G_{12}^* G_{M12}	II.1	I	1,413	1,748	2,245	2,974	4,068	5,609	7,490
	II.2	I	1,415	1,755	2,260	3,026	4,165	5,867	8,060
	II.3	I	1,416	1,757	2,266	3,045	4,238	6,068	8,417
	III	I	1,416	1,741	2,241	2,956	3,861	5,377	7,042

расчетной схеме которой упругие свойства переходного слоя и среды будут явным образом учитывать предварительно найденные значения k_{12}^* и G_{12}^* , и в работе ее решение не рассматривалось. При численном решении 1 и 2-й подзадач переходный цилиндрический слой дискретизировался на 100 тонких слоев толщиной $0,06 r_F$ и в пределах каждого тонкого слоя упругие свойства считались однородными трансверсально-изотропными. Общие решения для полей деформирования каждого тонкого слоя известны [4] и условия идеального контакта этих слоев позволяют перейти к решению системы линейных уравнений ленточного типа относительно искомым коэффициентов.

Результаты численного прогнозирования обобщенным методом самосогласования эффективных объемного модуля плоской деформации k_{12}^* и модуля сдвига G_{12}^* стеклопластика представлены в таблице (t – тип модели), а эффективные модули Юнга E_3^* , E_1^* и коэффициенты Пуассона ν_{13}^* и ν_{12}^* , рассчитанные по соответствующим значениям k_{12}^* и G_{12}^* (3.1) для различных I–III-го типов моделей случайных структур, приведены на фиг. 4 в сравнении с известными экспериментальными данными для модуля Юнга E_1^* [5]. Решения 1 и 2 (фиг. 4) получены обобщенным методом самосогласования на основе соответствующих кусочно-постоянных аппроксимаций (фиг. 3) осредненной индикаторной функции $\bar{\omega}(\xi)$ и тождественны решениям известных методов самосогласования [2–4]; например, по принятой терминологии работы [4] расчетная схема решения 1 названа "трехфазной моделью" – волокно с прослойкой матрицы в среде с эффективными свойствами. Решение 1 практически совпадает с результатами обобщенного метода самосогласования для структуры I-го типа в рассматриваемом диапазоне значений ν_F .

4. Заключение. Таким образом, из анализа численных результатов (табл., фиг. 4) обобщенного метода самосогласования может быть сделан вывод, что существенный разброс экспериментальных значений, например, эффективного модуля Юнга E_1^* однонаправленного волокнистого стеклопластика обусловлен вариациями характера случайного взаимного расположения и статистическим разбросом размеров радиусов волокон в плоскости изотропии $r_1 O r_2$ образцов.

Уменьшение минимальной гарантированной прослойки матрицы между волокнами в случайных структурах II-го типа приводит к повышению жесткости композита, однако, существуют некоторые "пороговые" величины, например, для стеклопластика 1% (структура II.3, фиг. 4) и для боропластика 0,1% от радиуса волокна r_F ; уменьшение минимальных гарантированных прослоек ниже соответствующих пороговых

значений практически не приводит к изменению эффективных упругих свойств композитов.

Влияние на эффективные упругие свойства характера случайных структур в плоскости изотропии r_1Or_2 уменьшается соответственно с уменьшением различия жесткостных характеристик матрицы и волокон. В предельном случае для среды Хилла, когда модули сдвига матрицы и волокон равны, известно точное аналитическое решение [6], согласно которому, для такой среды характер статистически изотропной структуры в плоскости r_1Or_2 не влияет на эффективные упругие свойства и тензор C^* является изотропным; обобщенный метод самосогласования также дает "единое" численное решение для всех I–III-го типов моделей случайных структур (фиг. 2), которое с точностью до 5% совпадает с аналитическим решением [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Паньков А.А.* Прогнозирование эффективных упругих свойств композитов со случайными структурами обобщенным методом самосогласования // Вестник ПГТУ. Механика. Пермь: ПГТУ. 1995. № 2. С. 33–40.
2. Композиционные материалы: в 8-и т. Т. 2. Механика композиционных материалов // Под ред. Сендецки Дж.-М.: Мир, 1978. 563 с.
3. Принципы создания композиционных полимерных материалов / А.А. Берлин, С.А. Вольфсон, В.Г. Ошмян, Н.С. Ениколопов. М.: Химия, 1990. 240 с.
4. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
5. Современные композиционные материалы / Под ред. Л. Браутмана и Р. Крока. М.: Мир, 1970. – 672 с.
6. *Хилл Р.* Теория механических свойств волокнистых композитных материалов // Механика: Сб. переводов. М.: 1966. Т. 96. № 2. С. 131–149.

Пермь

Поступила в редакцию
17.06.1996