

УДК 539.3

© 1999 г. В.Г. КУЗНЕЦОВА, А.А. РОГОВОЙ

ЭФФЕКТ УЧЕТА СЛАБОЙ СЖИМАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА В УПРУГИХ ЗАДАЧАХ С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

Приводится определяющее соотношение слабосжимаемого изотропного упругого материала при конечных деформациях, позволяющее учесть изменение "объемного модуля" и "модуля сдвига" при изменении объема. Для идентификации параметров этой модели по экспериментальным данным исследуются простейшие задачи. Для демонстрации эффекта учета слабой сжимаемости строится аналитическое решение задачи о сдвиге с растяжением–сжатием реального слабосжимаемого материала.

1. Введение. Основные соотношения. Теория конечных упругих деформаций с достаточной полнотой разработана для существенно сжимаемых материалов, упругий потенциал W которых есть, например, функция всех трех главных инвариантов тензора меры деформаций Коши–Грина $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ (\mathbf{F} – градиент места):

$$W = W(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})) \quad (1.1)$$

и для абсолютно несжимаемых материалов ($I_3(\mathbf{C}) = 1$) с упругим потенциалом

$$W^* = W(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C})) + p(I_3(\mathbf{C}) - 1) \quad (1.2)$$

где p – множитель Лагранжа. В соответствии с соотношениями (1.1) или (1.2), энергетический тензор напряжений \mathbf{Q} определяется выражением

$$\frac{1}{2} \sqrt{I_3} \mathbf{Q} = \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{g} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{C} + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} \quad (1.3)$$

или

$$\frac{1}{2} \mathbf{Q} = \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{g} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{C} + p \mathbf{C}^{-1} \quad (1.4)$$

где \mathbf{g} – единичный (метрический) тензор. В выражении (1.4) p уже не трактуется как обобщенный модуль упругости, а является неизвестной величиной, определяемой из решения задачи при условии несжимаемости материала $I_3 = 1$.

Большинство эластомеров, допускающих конечные упругие деформации, обычно слабосжимаемые. Для многих практически важных задач эти материалы аппроксимируются несжимаемыми, что часто оправдано, и определяющие уравнения для таких материалов и численные методы реализации задач с этими определяющими уравнениями хорошо известны [1–3]. Но в рамках такого подхода невозможно в принципе решить термоупругую задачу, а также описать экспериментально наблюдаемые факты изменения "объемного модуля" и "модуля сдвига" при изменении объема.

В литературе нашли отражение два подхода к учету слабой сжимаемости элас-

томера. Первый отражен, например, в [4,5] и основан на представлении упругого потенциала в виде

$$W = (I_3)^\gamma W_1(I_1, I_2) + \psi(I_3)$$

где W_1 — упругий потенциал несжимаемого "опорного" материала, а показатель γ и функция $\psi(I_3)$ подправляют этот потенциал, чтобы учесть слабую сжимаемость материала.

Отличный от вышеизложенного подход к построению уравнения состояния для несжимаемых материалов предложен в [6–8]. Его особенность заключается в том, что сжимаемость (несжимаемость) материала определяется не кинематической зависимостью — отличием третьего инварианта I_3 от единицы, а обобщенным модулем упругости, по величине которого можно судить о степени сжимаемости материала. Поэтому подход применим и при построении определяющих уравнений для слабосжимаемых сред, для которых метод множителей Лагранжа неосуществим, а выражение (1.3) может привести к большим погрешностям при численной реализации (аналогичная ситуация возникает в линейной теории упругости при коэффициенте Пуассона близком к 0,5). Этот подход, основанный на разложении упругого потенциала в ряд по третьему инварианту в окрестности единицы с удержанием в силу слабой сжимаемости материала только членов не выше квадратичных,

$$W(I_1, I_2, I_3) = \hat{W}(I_1, I_2) + \chi_1(I_3 - 1) + \frac{1}{2}\chi_2(I_3 - 1)^2 \quad (1.5)$$

$$\hat{W}(I_1, I_2) = W(I_1, I_2, 1), \quad \chi_1(I_1, I_2) = \left. \frac{\partial W}{\partial I_3} \right|_{I_3=1}, \quad \chi_2(I_1, I_2) = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial I_3^2} \right|_{I_3=1}$$

получил дальнейшее развитие в работах [9–11]. В них, исходя из разложения (1.5), получены определяющие уравнения, описывающие, с помощью обобщенных модулей упругости, как слабосжимаемый, так и несжимаемый материал при конечных деформациях, и предложены функционалы для численной реализации краевых задач с этими уравнениями состояния. В работе [11], используя три группы инвариантов тензора деформаций Коши–Грина (главные инварианты, инварианты Пенна–Пальмова [5,12] и инварианты Цешкотто–Фондера [6]), получены три формы уравнения состояния с соответствующими обобщенными модулями упругости и на простейших задачах (простой сдвиг, гидростатическое напряженное и одноосное деформированное состояния), полагая критерием выбора той или другой группы инвариантов в упругом потенциале простоту определения обобщенных модулей упругости из экспериментальных данных, проанализированы эти формы определяющего уравнения. В частности, для группы инвариантов

$$\hat{I}_1 = I_1 - (I_3 - 1), \quad \hat{I}_2 = I_2 - 2(I_3 - 1), \quad \hat{I}_3 = I_3 \quad (1.6)$$

введенных в [6], где I_1, I_2, I_3 — главные инварианты тензора меры деформации Коши–Грина, энергетический тензор напряжений представляется в виде

$$\frac{1}{2}\sqrt{I_3}\mathbf{Q} = (\mathbf{g} - I_3\mathbf{C}^{-1})c_1 + (I_1\mathbf{g} - \mathbf{C} - 2I_3\mathbf{C}^{-1})c_2 + \alpha I_3\mathbf{C}^{-1} \quad (1.7)$$

$$\alpha(\sigma - \chi_1) = I_3 - 1, \quad \alpha = 1/\chi_2$$

$$c_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2, I_3) = k_i + p_i(I_3 - 1) + \frac{1}{2}q_i(I_3 - 1)^2$$

$$k_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{I}_i}, \quad p_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2) = \frac{\partial \chi_1}{\partial \hat{I}_i}, \quad q_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2) = \frac{\partial \chi_2}{\partial \hat{I}_i} \quad (i=1,2) \quad (1.8)$$

В [9–11] показано, что в недеформированной и ненапряженной конфигурации

$$\chi_1(\hat{I}_1, \hat{I}_2)|_{C=g} = 0 \quad (1.9)$$

$$2(k_1 + k_2)|_{C=g} = G_0, \quad 4\left(\chi_2 - \frac{G_0}{3}\right)\Big|_{C=g} = B_0, \quad \frac{\chi_2 - (k_1 + k_2)}{2\chi_2 - (k_1 + k_2)}\Big|_{C=g} = \nu_0 \quad (1.10)$$

(G_0 , B_0 и ν_0 – модуль сдвига, объемный модуль и коэффициент Пуассона линейной теории упругости), а также для того, чтобы уравнения состояния были энергетически допустимыми, должны выполняться равенства:

$$\frac{\partial k_1}{\partial \hat{I}_2} = \frac{\partial k_2}{\partial \hat{I}_1}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \hat{I}_2} = \frac{\partial p_2}{\partial \hat{I}_1}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial \hat{I}_2} = \frac{\partial q_2}{\partial \hat{I}_1} \quad (1.11)$$

В этих работах также предложены и исследованы функционалы для решения нелинейных краевых задач с уравнением состояния (1.7), (1.8), простейший из которых, например, имеет вид

$$He(\sigma, \mathbf{u}) = \int_{V_0} \left(\sigma(I_3 - 1) - \frac{\alpha}{2}(\sigma - \chi_1)^2 + \hat{W}(\hat{I}_1, \hat{I}_2) - \rho_0 \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \right) dV_0 - \int_{S_p^0} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} dS_p^0 \quad (1.12)$$

где \mathbf{u} и \mathbf{K} – векторы перемещений и объемных сил, ρ_0 – плотность в недеформированной конфигурации V_0 , S_p^0 – часть поверхности V_0 -объема, на которой приложены силы \mathbf{p} . Варьируемые параметры функционала (1.12) – σ и \mathbf{u} .

Цель настоящей статьи – расширение определяющих соотношений слабосжимаемого материала, позволяющих учесть при конечных деформациях изменение "объемного модуля" и "модуля сдвига"¹ при изменении объема; исследование простейших задач, позволяющих идентифицировать параметры модели по экспериментальным данным и, наконец, построение аналитического решения задачи о сдвиге с растяжением–сжатием реального слабосжимаемого материала, позволяющего продемонстрировать эффект учета слабой сжимаемости.

2. Определяющее соотношение, учитывающее изменение "объемного модуля" и "модуля сдвига". Как экспериментально показано в работах [13–17] и отмечено в других, например, [18, 19], "объемный модуль" и "модуль сдвига" зависят от изменения объема. В рамках разложения (1.5), из которого следует уравнение состояния (1.7), (1.8), попытаемся, полагая k_1 и k_2 константами и задавая функции χ_1 и χ_2 , например, в виде

$$\chi_1 = p_1(\hat{I}_1 - 3) + p_2(\hat{I}_2 - 3), \quad \chi_2 = \chi_{20} + q_1(\hat{I}_1 - 3) + q_2(\hat{I}_2 - 3) \quad (2.1)$$

$$p_1, p_2, \chi_{20}, q_1, q_2 - \text{const}$$

учесть изменение "модуля сдвига" и "объемного модуля". Заметим, что функции (2.1) удовлетворяют соотношениям (1.8), (1.9) и (1.11). С целью выяснения механического смысла параметров модели рассмотрим три однородные задачи: одноосное деформированное состояние, простой сдвиг с растяжением–осадкой и гидростатическое состояние.

Одноосное деформированное состояние (ОДС). Этому процессу соответствует

¹ При конечных деформациях выражения, определяющие модуль сдвига и объемный модуль, зависят от конкретной задачи, т.е. для разных задач они разные, что и будет продемонстрировано ниже. В этом нет ничего удивительного, поскольку гидростатика при конечных деформациях определяется не только изменением объема, но и изменением формы. И наоборот, изменение объема определяется и шаровой и дивергентной частями тензора напряжений. В связи с этим понятия "объемный модуль" и "модуль сдвига" – это чисто условные понятия, терминологически удобные, но при этом нужно обязательно привязывать их к конкретной задаче. Поэтому они и взяты в кавычки.

осаживание сплошного цилиндра в замкнутом объеме. Начальная и текущая конфигурации при этом определяются в цилиндрической системе координат радиус-векторами $\mathbf{r} = r\mathbf{r}_1 + z\mathbf{r}_3$ и $\mathbf{R} = r\mathbf{r}_1 + \lambda z\mathbf{r}_3$, где λ – осевое сжатие, а базисные векторы, компоненты метрического тензора и определитель его ковариантных составляющих запишутся в начальной и текущей конфигурациях в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r}_2 = r\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{e}_3, \quad |\mathbf{e}_i| = 1 \quad (i = 1, 2, 3) \\ q_{11} &= g_{11} = g_{33} = g^{33} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g^{22} = 1/r^2, \quad g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad \tilde{g} = \det g_{ij} = r^2 \\ \mathbf{R}_1 &= \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{R}_2 = r\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{R}_3 = \lambda\mathbf{e}_3 \\ G_{11} &= G^{11} = 1, \quad G_{22} = r^2, \quad G_{33} = \lambda^2 \\ G^{22} &= 1/r^2, \quad G^{33} = 1/\lambda^2, \quad G_{ij} = G^{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad \tilde{G} = \det G_{ij} = (r\lambda)^2 \end{aligned}$$

Из этих соотношений, учитывая, что $\mathbf{C} = G_{ij}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j$ и $\mathbf{C}^{-1} = G^{ij}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j$, получаем

$$I_1(\mathbf{C}) = g^{ij}G_{ij} = 2 + \lambda^2, \quad I_2(\mathbf{C}) = \frac{\tilde{G}}{\tilde{g}} g_{ij}G^{ij} = 1 + 2\lambda^2, \quad I_3(\mathbf{C}) = \frac{\tilde{G}}{\tilde{g}} = \lambda^2$$

и, в соответствии с выражениями (1.6),

$$\hat{I}_1 = I_1 - (I_3 - 1) = 3, \quad \hat{I}_2 = I_2 - 2(I_3 - 1) = 3$$

Для этой кинематики из уравнений (1.7), (1.8) получаем следующие составляющие тензора истинных напряжений в ортонормированном базисе \mathbf{e}_i :

$$\begin{aligned} T^{11} &= T^{22} = [G_0 + 2(p_1 + p_2)(\lambda^2 - 1) + (q_1 + q_2)(\lambda^2 - 1)^2](1/\lambda - \lambda) + 2\chi_{20}\lambda(\lambda^2 - 1) \\ T^{33} &= 2\chi_{20}\lambda(\lambda^2 - 1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Последнее соотношение удобно для определения параметра модели χ_{20} по данным эксперимента. Для выяснения же их механического смысла найдем, используя выражения (2.2), среднее напряжение:

$$T = \frac{2}{3}[G_0 + 2(p_1 + p_2)(\lambda^2 - 1) + (q_1 + q_2)(\lambda^2 - 1)^2](1/\lambda - \lambda) + 2\chi_{20}\lambda(\lambda^2 - 1)$$

Поскольку относительное изменение объема

$$\Delta = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \sqrt{I_3(\mathbf{C})} - 1$$

(для рассматриваемой задачи $\lambda = 1 + \Delta$), то с точностью до Δ^4 (так как $I_3(\mathbf{C}) = (1 + \Delta)^2$, то эта точность заложена в представлении упругого потенциала (1.5) и определяющего соотношения (1.7); (1.8)) получаем следующую зависимость среднего напряжения от изменения объема:

$$\begin{aligned} T &= B_0\Delta + \frac{2}{3}[9\chi_{20} + G_0 - 8(p_1 + p_2)]\Delta^2 + \\ &+ \frac{2}{3}[3\chi_{20} - G_0 - 8(q_1 + q_2)]\Delta^3 + \frac{2}{3}[G_0 - 2(p_1 + p_2) - 4(q_1 + q_2)]\Delta^4 \end{aligned}$$

и величину

$$\begin{aligned} B &= \partial T / \partial \Delta = B_0 + \frac{4}{3}[9\chi_{20} + G_0 - 8(p_1 + p_2)]\Delta + \\ &+ 2[3\chi_{20} - G_0 - 8(q_1 + q_2)]\Delta^2 + \frac{8}{3}[G_0 - 2(p_1 + p_2) - 4(q_1 + q_2)]\Delta^3 \end{aligned} \quad (2.3)$$

часто называемую текущим объемным модулем. В этих выражениях использовано соотношение (1.10) для B_0 и $\lambda^{-1} = (1 + \Delta)^{-1}$ разложено в ряд по Δ в окрестности нуля с

удержанием членов не выше четвертого порядка. Ниже будет показано, что (2.3) – это просто удобное соотношение для определения по экспериментальным данным параметров модели, но не текущий объемный модуль. Напряжение T^{33} (2.2) запишется через относительное изменение объема Δ в виде

$$T^{33} = 2\chi_{20}(2\Delta + 3\Delta^2 + \Delta^3) \quad (2.4)$$

и отсюда следует, что для несжимаемого материала $\chi_{20} \rightarrow \infty$ ($\nu_0 \rightarrow 0,5$, см. соотношения (1.10)).

Простой сдвиг с растяжением–осадкой. Начальная и текущая конфигурации в этом процессе определяются радиус-векторами $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$ ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$), δ_{ij} – символ Кронекера), $\mathbf{R} = (x_1 + s x_2) \mathbf{e}_1 + \lambda x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ (s и λ – параметры сдвига и осадки, соответственно), а кинематические характеристики процесса в этих конфигурациях – следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \partial \mathbf{r} / \partial x_i : \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_2, \mathbf{r}_3 = \mathbf{e}_3 \\ g_{ii} &= g^{ii} = 1, \quad g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad \tilde{g} = \det g_{ij} = 1 \\ \mathbf{R}_i &= \partial \mathbf{R} / \partial x_i : \mathbf{R}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{R}_2 = s \mathbf{e}_1 + \lambda \mathbf{e}_2, \mathbf{R}_3 = \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} G_{11} = 1 & G_{12} = s & G_{13} = 0 \\ G_{21} = s & G_{22} = s^2 + \lambda^2 & G_{23} = 0 \\ G_{31} = 0 & G_{32} = 0 & G_{33} = 1 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{ccc} G^{11} = (s^2 + \lambda^2) / \lambda^2 & G^{12} = -s / \lambda^2 & G^{13} = 0 \\ G^{21} = -s / \lambda^2 & G^{22} = 1 / \lambda^2 & G^{23} = 0 \\ G^{31} = 0 & G^{32} = 0 & G^{33} = 1 \end{array} \right\|$$

$$\tilde{G} = \det G_{ij} = \lambda^2$$

Тогда $I_1 = 2 + s^2 + \lambda^2$, $I_2 = 1 + s^2 + 2\lambda^2$, $I_3 = \lambda^2$, $\hat{I}_1 = \hat{I}_2 = 3 + s^2$. Из определяющего уравнения (1.7), (1.8) найдем составляющие Q^{ij} энергетического тензора \mathbf{Q} , через которые, в свою очередь, тензор истинных напряжений \mathbf{T} запишется в базисе \mathbf{R}_i :

$$\mathbf{T} = Q^{11} \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1 + Q^{12} (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1) + Q^{22} \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2 + Q^{33} \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_3 \quad (2.6)$$

или, с учетом выражений (2.5), в базисе \mathbf{e}_i :

$$\mathbf{T} = (Q^{11} + 2sQ^{12} + s^2Q^{22}) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda(Q^{12} + sQ^{22}) (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + \lambda^2 Q^{22} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + Q^{33} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$$

Из последнего соотношения определяем составляющие тензора \mathbf{T} в базисе \mathbf{e}_i :

$$\begin{aligned} T^{11} &= (1 + s^2 - \lambda^2) [G_0 + 2(p_1 + p_2)(\lambda^2 - 1) + (q_1 + q_2)(\lambda^2 - 1)^2] / \lambda + \\ &+ 2\lambda s^2 [(p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)(\lambda^2 - 1)] + 2\chi_{20} \lambda (\lambda^2 - 1) \\ T^{12} &= [G_0 + 2(p_1 + p_2)(\lambda^2 - 1) + (q_1 + q_2)(\lambda^2 - 1)^2] s \\ T^{22} &= [2(p_1 + p_2)s^2 + 2\chi_{20}(\lambda^2 - 1) + 2(q_1 + q_2)s^2(\lambda^2 - 1)] \lambda \\ T^{33} &= (1/\lambda - \lambda) [G_0 + 2(p_1 + p_2)(\lambda^2 - 1) + (q_1 + q_2)(\lambda^2 - 1)^2] + s^2 [2k_2 + 2p_2(\lambda^2 - 1) + \\ &+ q_2(\lambda^2 - 1)^2] / \lambda + [2(p_1 + p_2)s^2 + 2\chi_{20}(\lambda^2 - 1) + 2(q_1 + q_2)s^2(\lambda^2 - 1)] \lambda \end{aligned} \quad (2.7)$$

Составляющую тензора истинных напряжений T^{12} в выражениях (2.7) удобно записать в виде $T^{12} = Gs$, где $G = G_0 + 2(p_1 + p_2)(\lambda^2 - 1) + (q_1 + q_2)(\lambda^2 - 1)^2$, и тогда, снова вводя относительное изменение объема Δ , получаем с точностью до Δ^4 следующую зависимость модуля сдвига от изменения объема для рассматриваемой задачи:

$$G = G_0 + 4(p_1 + p_2)\Delta + 2[(p_1 + p_2) + 2(q_1 + q_2)]\Delta^2 + (q_1 + q_2)\Delta^3(4 + \Delta) \quad (2.8)$$

Это выражение и определяет смысл комплексов $p_1 + p_2$ и $q_1 + q_2$.

Гидростатическое состояние. В этом процессе начальная и актуальная конфигурации определяются радиус-векторами $\mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{R} = \lambda x^i \mathbf{e}_i$ и тогда

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{e}_i, \quad g_{ii} = g^{ii} = 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad \tilde{g} = 1$$

$$\mathbf{R}_i = \lambda \mathbf{e}_i, \quad G_{ii} = \lambda^2, \quad G^{ii} = 1/\lambda^2 \quad (i = 1, 2, 3), \quad G_{ij} = G^{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad \tilde{G} = \lambda^6$$

$$I_1 = 3\lambda^2, \quad I_2 = 3\lambda^4, \quad I_3 = \lambda^6, \quad \hat{I}_1 = 3\lambda^2 - (\lambda^6 - 1), \quad \hat{I}_2 = 3\lambda^4 - 2(\lambda^6 - 1)$$

Составляющие тензора истинных напряжений, равные среднему напряжению, записываются в базе \mathbf{e}_i :

$$T = T^{11} = T^{22} = T^{33} = 2(1/\lambda - \lambda^3)[k_1 + p_1(\lambda^6 - 1) + q_1(\lambda^6 - 1)^2/2] + \\ + 4(\lambda - \lambda^3)[k_2 + p_2(\lambda^6 - 1) + q_2(\lambda^6 - 1)^2/2] + 2[p_1(3\lambda^2 - \lambda^6 - 2) + p_2(3\lambda^4 - 2\lambda^6 - 1) + \\ + (\chi_{20} + q_1(3\lambda^2 - \lambda^6 - 2) + q_2(3\lambda^4 - 2\lambda^6 - 1))(\lambda^6 - 1)]\lambda^3$$

и, вводя относительное изменение объема Δ , получаем с точностью до Δ^4 :

$$B = \partial T / \partial \Delta = B_0 + \frac{4}{9}[27\chi_{20} + 2(k_1 - k_2) - 36(p_1 + p_2)]\Delta + \\ + \frac{2}{27}[81\chi_{20} - 2(7k_1 - 5k_2) - 24(7p_1 + 11p_2) - 432(q_1 + q_2)]\Delta^2 + \\ + \frac{8}{243}[5(7k_1 - 4k_2) - 15(p_1 + p_2) - 360(4q_1 + 5q_2)]\Delta^3 \quad (2.9)$$

Первые две задачи дают простые соотношения (2.4) и (2.8) для определения по экспериментальным данным параметров модели χ_{20} и комплексов $(p_1 + p_2)$ и $(q_1 + q_2)$. Последняя приведена для того, чтобы продемонстрировать некорректность использования понятия "текущий объемный модуль" при конечных деформациях, вытекающую из различия соотношений (2.3) и (2.9) для B .

В работах [13,16] приведена экспериментальная зависимость изменения объемного модуля резины 2959 от относительного изменения объема Δ , соответствующая задаче об ОДС, которая удовлетворительно аппроксимируется, как пишут авторы, функцией

$$B = \begin{cases} B_0 & -0,0065 \leq \Delta \leq 0 \\ 6 \cdot 10^3 \cdot 1,17 |\Delta|^{0,17}, & -0,02 \leq \Delta \leq -0,0065 \end{cases} \quad (2.10)$$

где $B_0 = 2880$ МПа. Минимизация среднеквадратичного относительного отклонения зависимостей (2.10) и $\partial T^{33}/\partial \Delta$, где T^{33} определяется соотношением (2.4) (именно эта составляющая тензора напряжений измерялась в экспериментах [13,16]), дала значение $\chi_{20} = 769,4$ МПа с максимальной относительной невязкой не превышающей 10 процентов.

В работах [17,18] приведена экспериментальная зависимость изменения модуля сдвига той же самой резины 2959 от относительного изменения объема, соответствующая задаче о сдвиге со сжатием, которая аппроксимируется выражением

$$G = \begin{cases} G_0, & -0,0065 \leq \Delta \leq 0 \\ G_0 \left(1 - 0,87 \frac{\Delta + 0,0065}{0,02 - 0,0065} \right), & -0,02 \leq \Delta \leq -0,0065 \end{cases} \quad (2.11)$$

где $G_0 = 1,0$ МПа. Минимизация среднеквадратичного относительного отклонения зависимостей (2.8) и (2.11) дала значения для комплексов $p_1 + p_2 = 1,425 G_0$, $q_1 + q_2 = 673,97 G_0$ и максимальное относительное отклонение теоретической кривой от экспериментальной составило 6,2 процента в точке излома кривой (2.11). Эти, определенные из эксперимента, параметры модели и использованы ниже.

3. Сдвиг с растяжением–сжатием слабосжимаемого материала при конечных деформациях. Аналитическое решение. С целью продемонстрировать эффекты, к которым приводит учет слабой сжимаемости материала при конечных деформациях, исследуем простой, но достаточно информативный для нашей цели процесс деформирования слабосжимаемого материала. Слой, толщины h , нижняя поверхность которого закреплена, сдвигается в направлении оси x_1 распределенной силой p_n^* и сжимается (растягивается) по оси x_2 распределенной силой p_n^* , приложенными на верхней поверхности. Материальная точка до деформации занимает положение $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$ ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$), δ_{ij} – символ Кронекера). Решение будем искать в виде

$$\mathbf{R} = (x_1 + u(x_2)) \mathbf{e}_1 + v(x_2) \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \quad (3.1)$$

Тогда базисные векторы, компоненты метрического тензора и определитель его ковариантных составляющих запишутся в начальной и текущей конфигурациях в виде:

$$\mathbf{r}_i = \partial \mathbf{r} / \partial x_i; \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{e}_3 \quad (3.2)$$

$$g_{ii} = g^{ii} = 1, \quad g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad \tilde{g} = \det g_{ij} = 1 \quad (3.3)$$

$$\mathbf{R}_i = \partial \mathbf{R} / \partial x_i; \quad \mathbf{R}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{R}_2 = u' \mathbf{e}_1 + v' \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{R}_3 = \mathbf{e}_3, \quad u' = \partial u / \partial x_2, \quad v' = \partial v / \partial x_2 \quad (3.4)$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} G_{11} = 1 & G_{12} = u' & G_{13} = 0 \\ G_{21} = u' & G_{22} = u'^2 + v'^2 & G_{23} = 0 \\ G_{31} = 0 & G_{32} = 0 & G_{33} = 1 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} G^{11} = (u'^2 + v'^2) / v'^2 & G^{12} = u' / v'^2 & G^{13} = 0 \\ G^{21} = -u' / v'^2 & G^{22} = 1 / v'^2 & G^{23} = 0 \\ G^{31} = 0 & G^{32} = 0 & G^{33} = 1 \end{array} \right\|$$

$$\tilde{G} = \det G_{ij} = v'^2 \quad (3.5)$$

Из соотношений (3.3), (3.5), учитывая, что $\mathbf{C} = G_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j$ и $\mathbf{C}^{-1} = G^{ij} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j$, получаем

$$I_1(\mathbf{C}) = g^{ij} G_{ij} = 2 + u'^2 + v'^2, \quad I_2(\mathbf{C}) = g_{ij} G^{ij} \tilde{G} / \tilde{g} = 1 + u'^2 + 2v'^2, \quad I_3(\mathbf{C}) = \tilde{G} / \tilde{g} = v'^2$$

и, в соответствии с выражениями (1.6):

$$\hat{I}_1 = I_1 - (I_3 - 1) = 3 + u'^2, \quad \hat{I}_2 = I_2 - 2(I_3 - 1) = 3 + u'^2 \quad (3.6)$$

Полагая теперь в определяющем уравнении (1.7), (1.8) k_1 и k_2 константами и задавая χ_1 и χ_2 в виде (2.1), получаем, с учетом (3.6):

$$\chi_1 = P u'^2, \quad \chi_2 = \chi_{20} (1 + Q) u'^2 \quad (3.7)$$

где числовые значения величин $P = p_1 + p_2$ и $Q = Q_1 + Q_2$, $Q_i = q_i / \chi_{20}$ ($i = 1, 2$) определены в предыдущем разделе. Заметим, что χ_{20} и $q_1 + q_2$ величины одного порядка, т.е. величина Q порядка единицы. По-видимому, разумно полагать, что Q_1 и Q_2 тоже порядка единицы, хотя экспериментальной информации на этот счет не имеется. В соответствии с (1.8) имеем

$$\begin{aligned} c_1 &= k_1 + p_1 (I_3 - 1) + q_1 (I_3 - 1)^2 / 2 = k_1 + p_1 (v'^2 - 1) + q_1 (v'^2 - 1)^2 / 2 \\ c_2 &= k_2 + p_2 (I_3 - 1) + q_2 (I_3 - 1)^2 / 2 = k_2 + p_2 (v'^2 - 1) + q_2 (v'^2 - 1)^2 / 2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для решения задачи воспользуемся функционалом (1.12), который в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} He(\sigma, \mathbf{u}) &= \int_0^h [\sigma (v'^2 - 1) - \frac{\alpha (u'^2)}{2} (\sigma - \chi_1 (u'^2))^2 + \hat{W}(\hat{I}_1 (u'^2), \hat{I}_2 (u'^2))] dx_2 - \\ &- p_n^* (v(h) - h) - p_t^* u(h) \end{aligned}$$

или

$$He(\sigma, \mathbf{u}) = \int_0^h F(\sigma, u', v') dx_2 - p_n^*(v(h) - h) - p_\tau^*(u(h))$$

$$F(\sigma, u', v') = \sigma(v'^2 - 1) - \frac{\alpha(u'^2)}{2} (\sigma - \chi_1(u'^2))^2 + \hat{W}(\hat{I}_1(u'^2), \hat{I}_2(u'^2)) \quad (3.9)$$

$$\alpha = \alpha_0(1 + Qu'^2)^{-1}, \quad \alpha_0 = 1/\chi_{20} \quad (3.10)$$

Уравнениями Эйлера для этого функционала будут

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial v'} \right) = 0 \quad (3.11)$$

условиями трансверсальности

$$\left. \frac{\partial F}{\partial u'} \right|_{x_2=h} = p_\tau^*, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial v'} \right|_{x_2=h} = p_n^* \quad (3.12)$$

и граничными условиями

$$u|_{x_2=0} = v|_{x_2=0} = 0 \quad (3.13)$$

С учетом первого выражения (1.10) и соотношений (3.7) и (3.9), уравнения (3.11) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \partial F / \partial \sigma &= (v'^2 - 1) - \alpha(u'^2)(\sigma - Pu'^2) = 0 \\ \partial F / \partial u' &= 2\alpha(u'^2)(\sigma - Pu'^2)Pu' - \frac{1}{2}(\sigma - Pu'^2)^2 \partial \alpha / \partial u' + G_0 u' = C_1 \\ \partial F / \partial v' &= 2\sigma v' = C_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Будем искать решение системы (3.14) в виде ряда по малому параметру α_0 :

$$u(x_2) = u_0(x_2) + \alpha_0 \varphi(x_2), \quad v(x_2) = v_0(x_2) + \alpha_0 \psi(x_2), \quad \sigma(x_2) = \sigma_0(x_2) + \alpha_0 \eta(x_2) \quad (3.15)$$

с точностью до α_0 в степени не выше первой в силу слабой сжимаемости материала. Тогда уравнения (3.14), условия трансверсальности (3.12) и граничные условия (3.13) принимают, с учетом (3.10), вид:

$$\begin{aligned} (u_0'^2 - 1) + \alpha_0 [2v_0' \psi' - (1 + Qu_0'^2)^{-1} (\sigma_0 - Pu_0'^2)] &= 0 \\ G_0 u_0' + \alpha_0 [G_0 \varphi' + 2Pu_0' (1 + Qu_0'^2)^{-1} (\sigma_0 - Pu_0'^2) + Qu_0' (1 + Qu_0'^2)^{-2} (\sigma_0 - \\ - Pu_0'^2)^2] &= C_{01} + \alpha_0 C_{11} \\ 2\sigma_0 v_0' + 2\alpha_0 (\eta v_0' + \sigma_0 \psi') &= C_{02} + \alpha_0 C_{22} \\ G_0 u_0' + \alpha_0 [G_0 \varphi' + 2Pu_0' (1 + Qu_0'^2)^{-1} (\sigma_0 - Pu_0'^2) + Qu_0' (1 + Qu_0'^2)^{-2} (\sigma_0 - \\ - Pu_0'^2)^2] \Big|_{x_2=h} &= p_\tau^* \\ 2\sigma_0 v_0' + 2\alpha_0 (\eta v_0' + \sigma_0 \psi') \Big|_{x_2=h} &= p_n^* \\ u_0 + \alpha_0 \varphi \Big|_{x_2=0} = 0, \quad v_0 + \alpha_0 \psi \Big|_{x_2=0} &= 0 \end{aligned}$$

Приравнявая в этих уравнениях члены при α_0 в нулевой и первой степенях в левой и

правой частях, приходим к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \nu_0'^2 &= 1, \quad 2\nu_0' \psi' - (1 + Qu_0'^2)^{-1}(\sigma_0 - Pu_0'^2) = 0 \\ G_0 u_0' &= C_{01}, \quad G_0 \phi' + 2Pu_0'(1 + Qu_0'^2)^{-1}(\sigma_0 - Pu_0'^2) + Qu_0'(1 + Qu_0'^2)^{-2}(\sigma_0 - \\ &- Pu_0'^2)^2 = C_{11} \\ 2\sigma_0 \nu_0' &= C_{02}, \quad 2(\eta \nu_0' + \sigma_0 \psi') = C_{22} \end{aligned} \quad (3.16)$$

условиям трансверсальности

$$\begin{aligned} G_0 u_0' \Big|_{x_2=h} &= p_\tau^* \\ G_0 \phi' + 2Pu_0'(1 + Qu_0'^2)^{-1}(\sigma_0 - Pu_0'^2) + Qu_0'(1 + Qu_0'^2)^{-2}(\sigma_0 - Pu_0'^2)^2 \Big|_{x_2=h} &= 0 \\ 2\sigma_0 \nu_0' \Big|_{x_2=h} &= p_n^*, \quad 2(\eta \nu_0' + \sigma_0 \psi') \Big|_{x_2=h} = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u_0 \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad \phi \Big|_{x_2=0} = 0 \\ \nu_0 \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad \psi \Big|_{x_2=0} = 0 \end{aligned}$$

Из соотношений (3.16) и (3.17) следует, что $C_{01} = p_\tau^*$, $C_{11} = 0$, $C_{02} = p_n^*$, $C_{22} = 0$. Тогда, последовательно решая уравнения $\nu_0'^2 = 1$ с граничным условием $\nu_0 \Big|_{x_2=0} = 0$, $G_0 u_0' = p_\tau^*$ с граничным условием $u_0 \Big|_{x_2=0} = 0$, $2\sigma_0 \nu_0' = p_n^*$, $2\nu_0' \psi' - (1 + Qu_0'^2)^{-1}(\sigma_0 - Pu_0'^2) = 0$ с граничным условием $\psi \Big|_{x_2=0} = 0$, $G_0 \phi' + 2Pu_0'(1 + Qu_0'^2)^{-1}(\sigma_0 - Pu_0'^2) + Qu_0'(1 + Qu_0'^2)^{-2}(\sigma_0 - Pu_0'^2)^2 = 0$ с граничным условием $\phi \Big|_{x_2=0} = 0$ и $2(\eta \nu_0' + \sigma_0 \psi') = 0$, находим ν_0 , u_0 , σ_0 , ψ , ϕ и η :

$$\begin{aligned} \nu_0 &= x_2, \quad u_0 = \frac{p_\tau^*}{G_0} x_2, \quad \sigma_0 = \frac{p_n^*}{2} \\ \psi &= \frac{1}{2} A x_2, \quad \phi = -\frac{p_\tau^* A}{G_0^2} (2P + QA) x_2, \quad \eta = -\frac{p_n^*}{4} A \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$A = \frac{p_n^* / 2 - P(p_\tau^* / G_0)^2}{1 + Q(p_\tau^* / G_0)^2} \quad (3.19)$$

Тензор истинных напряжений \mathbf{T} запишется в базисе \mathbf{R}_i через составляющие энергетического тензора \mathbf{Q} аналогично (2.6): $\mathbf{T} = Q^{11} \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1 + Q^{12} (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1) + Q^{22} \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2 + Q^{33} \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_3$ или, с учетом выражений (3.4), в базисе \mathbf{e}_i :

$$\mathbf{T} = (Q^{11} + 2Q^{12} u' + Q^{22} u'^2) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + (Q^{12} \nu' + Q^{22} u' \nu') (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + Q^{22} \nu'^2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + Q^{33} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$$

Из последнего соотношения определяем составляющие тензора \mathbf{T} в базисе \mathbf{e}_i :

$$\begin{aligned} T^{11} &= Q^{11} + 2Q^{12} u' + Q^{22} u'^2, \quad T^{12} = Q^{12} \nu' + Q^{22} u' \nu' \\ T^{22} &= Q^{22} \nu'^2, \quad T^{33} = Q^{33} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Учитывая, что для рассматриваемой задачи

$$(I_3(\mathbf{C}))^{-1/2} = (\nu')^{-1} = (1 + \alpha_0 \psi')^{-1} = 1 - \alpha_0 \psi'$$

(здесь использовано разложение в ряд по α_0 в окрестности нуля с удержанием только линейных членов) и в соответствии с (3.8) опять же с точностью до линейных слагаемых по α_0 :

$$c_i = k_i + 2\alpha_0 p_i \Psi' + \alpha_0^{-1} Q_i (2\alpha_0 \Psi')^2 / 2 = k_i + 2\alpha_0 (p_i + Q_i \Psi') \Psi'$$

где $\alpha_0^{-1} Q_i = q_i$, получаем следующее выражение для энергетического тензора напряжений:

$$\mathbf{Q} = 2(1 - \alpha_0 \Psi') \{ (\mathbf{g} - \nu'^2 \mathbf{C}^{-1}) [k_1 + 2\alpha_0 (p_1 + Q_1 \Psi') \Psi'] + \\ + (I \mathbf{g} - \mathbf{C} - 2\nu'^2 \mathbf{C}^{-1}) [k_2 + 2\alpha_0 (p_2 + Q_2 \Psi') \Psi'] + \sigma \nu'^2 \mathbf{C}^{-1} \}$$

Тогда, принимая во внимание соотношения (3.15), (3.18) и (3.19), имеем

$$Q^{11} = p_n^* \left[1 + \left(\frac{p_\tau^*}{G_0} \right)^2 \right] - G_0 \left(\frac{p_\tau^*}{G_0} \right)^2 - \alpha_0 A \left[G_0 - \left(1 - 2 \frac{p_n^*}{G_0} \right) \left(\frac{G_0}{2} + 2P + QA \right) \right] \left(\frac{p_\tau^*}{G_0} \right)^2$$

$$Q^{12} = p_\tau^* \left(1 - \frac{p_n^*}{G_0} \right) + \alpha_0 A \frac{p_\tau^*}{G_0} \left[(2P + QA) \frac{p_n^*}{G_0} + \left(p_n^* - \frac{G_0}{2} \right) \right]$$

$$Q^{22} = p_n^* - \alpha_0 p_n^* A$$

$$Q^{33} = p_n^* + 2k_2 \left(\frac{p_\tau^*}{G_0} \right)^2 - \alpha_0 A \left\{ G_0 + \left[4 \frac{k_2}{G_0} (2P + QA) - (2p_2 - k_2 + Q_2 A) \right] \left(\frac{p_\tau^*}{G_0} \right)^2 \right\}$$

и выражения (3.20) дают следующие составляющие тензора истинных напряжений:

$$T^{11} = p_n^* + G_0 \left(\frac{p_\tau^*}{G_0} \right)^2 - \alpha_0 A \left[G_0 + \left(\frac{p_\tau^*}{G_0} \right)^2 \left(\frac{G_0}{2} + 2P + QA \right) \right]$$

$$T^{12} = p_\tau^*, T^{22} = p_n^*$$

$$T^{33} = p_n^* + 2k_2 \left(\frac{p_\tau^*}{G_0} \right)^2 - \alpha_0 A \left\{ G_0 + \left[4 \frac{k_2}{G_0} (2P + QA) - (2p_2 - k_2 + Q_2 A) \right] \left(\frac{p_\tau^*}{G_0} \right)^2 \right\} \quad (3.21)$$

Учитывая, что

$$\mathbf{p}_0 = \sqrt{I_3(\mathbf{C})} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{n})^{1/2} \mathbf{p}$$

где \mathbf{p} и \mathbf{p}_0 — усилия в текущей и начальной конфигурациях на поверхности, определяемой в начальной конфигурации внешней единичной нормалью \mathbf{n} , и замечая, что в рассматриваемой задаче верхняя поверхность определяется нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$, получаем из соотношений (3.5), что

$$\sqrt{I_3(\mathbf{C})} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{n})^{1/2} = \sqrt{I_3(\mathbf{C})} (G^{22})^{1/2} = 1,$$

т.е. $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$. Это и вытекает из выражений (3.21) для T^{12} и T^{22} .

Соотношения (3.18), (3.19) и (3.21) определяют перемещения и напряжения через нормальное p_n^* и касательное p_τ^* усилия. Используя выражения (3.18), (3.19), можно записать решение задачи еще для трех комбинаций граничных условий

Задано p_τ^* и вертикальное перемещение ϑ^* . Из выражения (3.1) вертикальное

перемещение $\vartheta = u(x_2) - x_2$ и из соотношений (3.15) и (3.18) получаем, что

$$\vartheta^* = \alpha_0 \Psi \Big|_{x_2=h} = \alpha_0 Ah / 2 \quad (3.22)$$

откуда, учитывая, что $\alpha_0 = 1/\chi_{20}$ (соотношение (3.10)):

$$A = 2\chi_{20} \frac{\vartheta^*}{h} = \frac{p_n^* / 2 - P(p_\tau^* / G_0)^2}{1 + Q(p_\tau^* / G_0)^2}$$

Из последнего равенства имеем

$$p_n = 4\chi_{20} \frac{\vartheta^*}{h} + 2(P + 2\chi_{20} \frac{\vartheta^*}{h} Q) \left(\frac{p_\tau^*}{G_0} \right)^2 \quad (3.23)$$

и тогда из выражений (3.18):

$$u = \frac{p_\tau^*}{G_0} \left[1 - 2 \left(2P + 2\chi_{20} \frac{\vartheta^*}{h} Q \right) \frac{\vartheta^*}{G_0 h} \right] x_2 \quad (3.24)$$

а из выражений (3.21):

$$\begin{aligned} T^{11} &= 2(2\chi_{20} - G_0) \frac{\vartheta^*}{h} + \left[\left(G_0 + 4\chi_{20} \frac{\vartheta^*}{h} Q \right) \left(1 - \frac{\vartheta^*}{h} \right) + 2P \left(1 - 2 \frac{\vartheta^*}{h} \right) \right] \left(\frac{p_\tau^*}{G_0} \right)^2 \\ T^{12} &= p_\tau^*, \quad T^{22} = p_n \\ T^{33} &= 2(2\chi_{20} - G_0) \frac{\vartheta^*}{h} + 2 \left(\frac{p_\tau^*}{G_0} \right)^2 \left\{ \left(P + \chi_{20} \frac{\vartheta^*}{h} Q \right) \left(1 - 8 \frac{k_2}{G_0} \frac{\vartheta^*}{h} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left[2p_2 + \chi_{20} \left(Q + 2 \frac{\vartheta^*}{h} Q_2 \right) \right] \frac{\vartheta^*}{h} + k_2 \left(1 - \frac{\vartheta^*}{h} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

где p_n определено равенством (3.23).

Задано p_n^* и горизонтальное перемещение u^* . Из соотношений (3.18) имеем

$$u^* = \frac{p_\tau^*}{G_0} \left[1 - \alpha_0 \frac{A}{G_0} (2P + QA) \right] h \quad (3.26)$$

и, подставляя сюда выражение для A (3.19), получаем уравнение для определения p_τ , решение которого проще всего искать в виде ряда по малому параметру α_0 , ограничиваясь в этом разложении в силу слабой сжимаемости материала членами не выше первого порядка ($p_\tau = p_0 + \alpha_0 p$). Подставляя это разложение в уравнение (3.26) и приравнявая коэффициенты при нулевой и первой степенях α_0 , определяем p_0 и p . В результате будем иметь

$$p_\tau = G_0 \frac{u^*}{h} + \alpha_0 A_0 \frac{u^*}{h} (2P + QA_0)$$

$$A_0 = \frac{p_n^* / 2 - P(u^* / h)^2}{1 + Q(u^* / h)^2}$$

Тогда из выражений (3.18), (3.19) следует, что $v = x_2 + \alpha_0 A_0 x_2 / 2$, а соотношения (3.21) принимают вид

$$T^{11} = p_n^* + G_0 \left(\frac{u^*}{h_0} \right)^2 - \alpha_0 A \left[G_0 + \left(\frac{u^*}{h} \right)^2 \left(\frac{G_0}{2} - 2P + QA_0 \right) \right]$$

$$T^{12} = p_\tau, T^{22} = p_n^*$$

$$T^{33} = p_n^* + 2k_2 \left(\frac{u^*}{h} \right)^2 - \alpha_0 A_0 \left[G_0 - (2p_2 - k_2 + Q_2 A_0) \left(\frac{u^*}{h} \right)^2 \right]$$

Заданы оба перемещения. Из соотношений (3.18) имеем $\vartheta^* = \alpha_0 A h / 2$. Тогда

$$u^* = \frac{p_\tau}{G_0} \left[h - 4 \frac{\vartheta^*}{G_0} \left(P + \chi_{20} Q \frac{\vartheta^*}{h} \right) \right] \quad (3.27)$$

Отсюда получаем

$$p_\tau = \frac{G_0^2 u^* / h}{G_0 - 4\vartheta^* (P + \chi_{20} Q \vartheta^* / h) / h}, p_n = 4\chi_{20} \frac{\vartheta^*}{h} + \left(2P + 4\chi_{20} Q \frac{\vartheta^*}{h} \right) \left(\frac{p_\tau}{G_0} \right)^2 \quad (3.28)$$

и соотношения (3.21) принимают вид

$$T^{11} = p_n + G_0 \left(1 - \frac{\vartheta^*}{h} \right) \left(\frac{p_\tau}{G_0} \right)^2 - 2G_0 \frac{\vartheta^*}{h} - 4 \frac{\vartheta^*}{h} \left(\frac{p_\tau}{G_0} \right)^2 \left(P + \chi_{20} Q \frac{\vartheta^*}{h} \right)$$

$$T^{12} = p_\tau, T^{22} = p_n$$

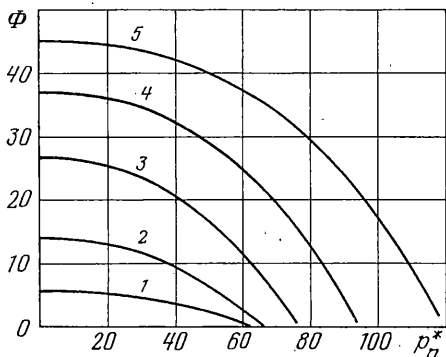
$$T^{33} = p_n + 2k_2 \left(1 - \frac{\vartheta^*}{h} \right) \left(\frac{p_\tau}{G_0} \right)^2 - 2G_0 \frac{\vartheta^*}{h} - \quad (3.29)$$

$$- 4 \frac{\vartheta^*}{h} \left(\frac{p_\tau}{G_0} \right)^2 \left[4 \frac{k_2}{G_0} \left(P + \chi_{20} Q \frac{\vartheta^*}{h} \right) - \left(p_2 + \chi_{20} Q_2 \frac{\vartheta^*}{h} \right) \right]$$

где p_n и p_τ определены выражениями (3.28).

Напомним, что для несжимаемого материала с одной стороны $I_3(C) = 1$, что для рассматриваемой задачи равносильно нулевым вертикальным перемещениям ϑ^* , а с другой стороны $\alpha_0 = 0$ ($\chi_{20} \rightarrow \infty$). Тогда из соотношения (3.22) следует, что величина $\chi_{20}\vartheta^*$ — конечная и неизвестная, и выражения (3.23)–(3.25), (3.27)–(3.29) определены с точностью до этой величины. При этом величины Q_1 и Q_2 , а, значит, и Q равны нулю.

Численные результаты. Отношение горизонтального перемещения $u(x_2)$ к координате x_2 определяет тангенс угла наклона первоначально вертикального волокна материала в исследуемом процессе деформирования. Зависимость этого угла (угла сдвига ϕ) от усилия сдвига p_τ^* и сжимающего усилия p_n^* приведена на фигуре (кривые 1–5 соответствуют p_n^* 0,1; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0 МПа) для реальных, определенных в настоящей работе, параметров материала и реальных (может быть и экстремальных) усилий в области относительного изменения объема, не превышающего двух процентов. Из графика следует, что при фиксированном перемещении верхней поверхности слоя u^* , т.е. при постоянном угле сдвига ϕ (например, $\phi = 10^\circ = \text{const}$), и увеличении сжимающего усилия p_n^* , положим, в два раза ($40 \text{ МПа} \leq p_n^* \leq 80 \text{ МПа}$) нужно в два–три раза увеличивать усилие сдвига p_τ , ($0,25G_0 \leq p_\tau \leq 0,75G_0$, кривые 2–4), чтобы удерживать это заданное горизонтальное перемещение. И наоборот, при фиксированном усилии сдвига p_τ^* (например, $p_\tau^* = 0,75G_0 = \text{const}$, кривая 4) и увеличении сжимающего усилия p_n^* , положим, опять в два раза ($40 \text{ МПа} \leq p_n^* \leq 80 \text{ МПа}$), угол сдвига уменьшается примерно в два с половиной раза ($32^\circ \geq \phi \geq 13^\circ$). Этот достаточно сильный эффект объясняется значительным увеличением "модуля



сдвига" при сжатии, которое можно учесть только в рамках предложенной модели слабосжимаемого материала. Действительно, если положить в определяющем уравнении параметры материала p_1, p_2, q_1 и q_2 нулевыми, что в соответствии с соотношением (2.8) приводит к постоянству "модуля сдвига", то из выражений (3.18) следует, что перемещение u , а, значит, и угол сдвига, не зависит от сжимающего усилия p_n^* (зависит только от усилия сдвига p_τ^*).

4. Заключение. Для реальных слабосжимаемых упругих материалов при конечных деформациях теоретически обнаружен эффект уменьшения перемещений в направлении сдвига при фиксированных усилиях сдвига (или увеличения усилия сдвига при фиксированных сдвиговых перемещениях) при наложении сжимающего усилия в другом направлении. Эффект объясняется известным экспериментальным фактом существенного увеличения "модуля сдвига" эластомерного материала при наложении гидростатического давления. Обнаруженный эффект значительно сильнее известного эффекта Пойнтинга.

Работа выполнена в Институте механики сплошных сред УрО РАН при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00470).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
4. Черных К.Ф., Шубина И.М. Об учете сжимаемости резины // Механика эластомеров. Краснодар: Изд-во Кубан. ун-та, 1978. Т. 2. С. 56–62.
5. Penn R.W. Volume changes accompanying the extension of rubber // Trans. Soc. Reol. 1970. V. 14. № 4. P. 509–517.
6. Cescotto S., Fonder G. A finite element approach for large strains of nearly incompressible rubber-like materials // Intern. J. Solids and Struct. 1975. V. 15. № 8. P. 589–605.
7. Ogden R.W. Non-linear elastic deformations. Chichester: Horwood, 1984. 532 p.
8. Ogden R.W. Recent advances in the phenomenological theory of rubber elasticity // Rubb. Chem. Technol. 1986. V. 59. № 3. P. 361–383.
9. Кожевникова Л.Л., Кузнецов Г.Б., Роговой А.А. Равновесие тел вращения под действием массовых сил. М.: Наука, 1983. 102 с.
10. Роговой А.А. Уравнение состояния и функционал для слабосжимаемых и несжимаемых материалов при конечных деформациях // Механика эластомеров. Краснодар: Краснодар. политехн. ин-т, 1988. С. 72–88.
11. Kozhevnikova L.L., Moshev V.V., Rogovoy A.A. A continuum model for finite void growth around spherical inclusion // Intern. J. Solids and Struct. 1993. V. 30. № 2. P. 237–248.
12. Пальмов В.А. Колебания упругопластических тел. М.: Наука, 1976. 328 с.
13. Лейканд М.А., Лавендел Э.Э., Львов С.В., Болотин В.З. Исследование объемной сжимаемости резины // Механика эластомеров. Краснодар: Краснодар. политехн. ин-т, 1983. Вып. 2. С. 4–8.
14. Тихонов В.А., Щеголев В.А., Горелик Б.Н., Колосова В.И. К определению упругих характеристик резины в сжатом тонком слое // Механика эластомеров. Краснодар: Краснодар. политехн. ин-т, 1981. С. 66–74.
15. Лейканд М.А., Лавендел Э.Э., Львов С.В., Тарновский Г.И. Исследование жесткости сдвига тонкослойных резинометаллических элементов при действии сжимающих нагрузок // Механика эластомеров. Краснодар: Краснодар. политехн. ин-т, 1981. С. 83–86.

16. Лейканд М.А., Львов С.В., Лавендел Э.Э. Экспериментальное исследование изменения объема резины при сжатии и растяжении // Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1981. Вып. 38. С. 49–53.
17. Лавендел Э.Э., Хричикова В.А., Лейканд М.А. Расчет жесткости сжатия тонкослойных резинометаллических элементов // Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1981. Вып. 38. С. 57–63.
18. Дымников С.И., Мейерс И.Р., Эрдманис А.Г. Упругие потенциалы для слабосжимаемых эластомерных материалов // Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1982. Вып. 40. С. 98–108.
19. Anand L. A constitutive model for compressible elastomeric solids // Computational Mechanics. 1996. V. 18. P. 339–355.

Пермь

Поступила в редакцию
29.01.1998