

УДК 539.3

© 1999 г. И.И. АРГАТОВ

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ШТАМПОВ  
 НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ**

Методом сращиваемых асимптотических разложений контактная задача о вдавливании нескольких гладких штампов в упругое полупространство сводится к решению последовательности контактных задач для изолированных штампов с "полиномиальными" основаниями. Взаимодействие между штампами описывается в терминах емкостных характеристик штампов. В явном виде найдена асимптотика контактного давления в системе, состоящей из круговых и эллиптических штампов.

**1. Постановка задачи и ее обсуждение.** На границе полупространства  $\mathbf{R}_+^3 = \{x : x_3 > 0\}$  выделим точки  $P^1, \dots, P^J$  с координатами  $(x_1^j, x_2^j, 0)$ . Наименьшее из всевозможных расстояний  $|P^j - P^k|$  при  $i \neq k$  обозначим через  $d$ .

Пусть  $\omega_j$  – область на плоскости  $\mathbf{R}^2$ , содержащаяся в круге диаметром  $d$ . Пусть еще  $\varepsilon$  – малый положительный параметр и  $\omega_j(\varepsilon)$  – область, полученная сжатием  $\omega_j$  в  $\varepsilon^{-1}$  раз:  $\omega_j(\varepsilon) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : \varepsilon^{-1}(x_1 - x_1^j, x_2 - x_2^j) \in \omega_j\}$ . Объединение всех ( $j = 1, \dots, J$ ) замкнутых областей  $\overline{\omega_j(\varepsilon)}$  обозначим  $\Gamma(\varepsilon)$ .

Исследуем задачу о поступательном вдавливании в упругое полупространство на глубину  $\delta_0$  системы гладких штампов  $\Gamma(\varepsilon)$ :

$$\mu \Delta_x u^\varepsilon(x) + (\lambda + \mu) \text{grad div } u^\varepsilon(x) = 0, x \in \mathbf{R}_+^3 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{31}(u^\varepsilon; x', 0) = \sigma_{32}(u^\varepsilon; x', 0) = 0, x' = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \quad (1.2)$$

$$\sigma_{33}(u^\varepsilon; x', 0) = 0, x' \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma(\varepsilon) \quad (1.3)$$

$$u_3^\varepsilon(x', 0) = \delta_0, x' \in \omega_j(\varepsilon) (j = 1, \dots, J) \quad (1.4)$$

$$u^\varepsilon(x) = o(1), |x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

Здесь  $\lambda, \mu$  – остоянные Ламе;  $\sigma_{3j}(u^\varepsilon)$  – компоненты тензора напряжений, отвечающего вектору  $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon)$  смещений точек полупространства.

В случае, когда  $\Gamma(\varepsilon)$  есть объединение двух кругов радиусом  $a$ , асимптотика контактного давления

$$p(u^\varepsilon, x') \equiv -\sigma_{33}(u^\varepsilon; x', 0), x' \in \omega_j(\varepsilon) \quad (1.6)$$

найдена в [1] с точностью до членов порядка  $\varepsilon^4$ , где  $\varepsilon = a/d$ . Ранее [2] эта задача решена в квадратурах. В [3] получена асимптотика контактного давления в системе, состоящей из двух одинаковых близких к круговым эллиптическим штампов. В [4–6] на основе результатов [7] построено приближенное решение задачи о взаимодействии нескольких круговых штампов.

В настоящей работе решение задачи (1.1) – (1.5) ищется методом сращиваемых асимптотических разложений (см. [8, 9] и др.).

**2. Внешнее асимптотическое разложение.** При  $\varepsilon \rightarrow 0$  зоны контакта стягиваются в точки, краевые условия (1.4) исчезают, а оставшиеся соотношения (1.1) – (1.3), (1.5) формируют первую предельную задачу:

$$\begin{aligned} \mu \Delta_x v^q(\mathbf{x}) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} v^q(\mathbf{x}) &= 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^3 \\ \sigma_{31}(v^q; \mathbf{x}', 0) = \sigma_{32}(v^q; \mathbf{x}', 0) &= 0, \mathbf{x}' \in \mathbf{R}^2 \\ \sigma_{33}(v^q; \mathbf{x}', 0) = 0, \mathbf{x}' \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(x_1^1, x_2^1), \dots, (x_1^J, x_2^J)\} \\ v^q(\mathbf{x}) &= o(1), |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.1)$$

Метод сращиваемых разложений предопределяет использование в качестве членов внешнего разложения

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon v^1(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 v^2(\mathbf{x}) + \dots \quad (2.2)$$

вектор-функции, имеющие особенности в точках  $P^1, \dots, P^J$ .

Хорошо известно (см. [10, 11] и др.), что решение

$$\begin{aligned} 4\pi\mu T_i(\mathbf{x}) &= x_i x_3 |\mathbf{x}|^{-3} - (\alpha - 1)x_i |\mathbf{x}|^{-1} (|\mathbf{x}| + x_3)^{-1} \quad (i = 1, 2) \\ 4\pi\mu T_3(\mathbf{x}) &= x_3^2 |\mathbf{x}|^{-3} + \alpha |\mathbf{x}|^{-1}, \alpha \equiv (\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)^{-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

задачи Буссинеска о нагружении упругого полупространства (ориентированной вдоль оси  $Ox_3$ ) единичной сосредоточенной силой в окрестности точки ее приложения приводит к абсурдным выводам. Поэтому разложение (2.2) пригодно лишь на удалении от зоны контакта  $\Gamma(\varepsilon)$ .

**3. Внутренние асимптотические разложения.** Фиксируем индекс  $j$  и сделаем замену переменных

$$\xi^j = (\xi_1^j, \xi_2^j, \xi_3^j), \xi^j = \varepsilon^{-1}(\mathbf{x} - P^j) \quad (3.1)$$

При этом в системе "растянутых" координат (3.1) расстояние от точки  $P^j$  до ближайшей из оставшихся будет не меньше чем  $\varepsilon^{-1}d$ . Поэтому в первом приближении пренебрегаем воздействием штампов друг на друга.

$$\mu \Delta_\xi w^{0j}(\xi) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} w^{0j}(\xi) = 0, \xi \in \mathbf{R}_+^3 \quad (3.2)$$

$$\sigma_{31}(w^{0j}; \xi', 0) = \sigma_{32}(w^{0j}; \xi', 0) = 0, \xi' = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2 \quad (3.3)$$

$$\sigma_{33}(w^{0j}; \xi', 0) = 0, \xi' \in \mathbf{R}^2 \setminus \bar{\omega}_j \quad (3.4)$$

$$w_3^{0j}(\xi', 0) = \delta_0, \xi' \in \omega_j \quad (3.5)$$

$$w^{0j}(\xi) = o(1), |\xi| = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2} \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

Здесь индекс в символе  $\xi^j$ , для облегчения записи опущен.

Области местных возмущений упругого полупространства, возникающие в окрестностях зон контакта, обслуживаются внутренними разложениями

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\varepsilon(\mathbf{x} - P^j)) = w^{0j}(\xi^j) + \varepsilon w^{1j}(\xi^j) + \dots \quad (j = 1, \dots, J) \quad (3.7)$$

Вектор-функции  $w^{pj}$  при  $p = 1, 2, \dots$  удовлетворяют уравнению (3.2), краевым условиям (3.3), (3.4) и

$$w_3^{pj}(\xi', 0) = 0, \xi' \in \omega_j \quad (3.8)$$

получаемым из (1.1) – (1.4) после замены (3.1) и подстановки разложения (3.7). Эти соотношения должны замыкаться асимптотическими условиями на бесконечности, позволяющими учесть влияние соседних штампов.

**4. Главные члены асимптотики решения задачи (1.1) – (1.5).** Чтобы получить асимптотическое поведение решения задачи (3.2) – (3.6) на бесконечности, представим его в виде обобщенного потенциала простого слоя

$$\mathbf{w}^{0j}(\xi) = \iint_{w_j} p(\mathbf{w}^{0j}; \boldsymbol{\eta}) \mathbf{T}(\xi_1 - \eta_1, \xi_2 - \eta_2, \xi_3) d\eta_1 d\eta_2 \quad (4.1)$$

Здесь  $\mathbf{T}$  – вектор-функция с компонентами (2.3):

$$p(\mathbf{w}^{0j}; \xi') = -\sigma_{33}(\mathbf{w}^{0j}; \xi', 0), \xi' \in \omega_j \quad (4.2)$$

Разложим в (4.1) выражение  $\mathbf{T}(\xi_1 - \eta_1, \xi_2 - \eta_2, \xi_3)$  по степеням  $\eta_1, \eta_2$ , и почленно проинтегрируем. В итоге имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{0j}(\xi) = & F_3^{0j} \mathbf{T}(\xi) - M_1^{0j} \frac{\partial \mathbf{T}(\xi)}{\partial \xi_2} + M_2^{0j} \frac{\partial \mathbf{T}(\xi)}{\partial \xi_1} + \sum_{n=0}^2 M_{2,n}^{0j} \frac{\partial^2 \mathbf{T}(\xi)}{\partial \xi_1^{2-n} \partial \xi_2^n} + \\ & + O\left(\frac{1}{|\xi|^4}\right), |\xi| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь для интегральных характеристик давления (4.2) введены обозначения

$$F_3^{0j} = \iint_{w_j} p(\mathbf{w}^{0j}; \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \quad (4.4)$$

$$M_1^{0j} = \iint_{w_j} \eta_2 p(\mathbf{w}^{0j}; \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}, \quad M_2^{0j} = -\iint_{w_j} \eta_1 p(\mathbf{w}^{0j}; \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \quad (4.5)$$

$$M_{2,n}^{0j} = \frac{(-1)^2}{2!} C_2^n \iint_{w_j} \eta_1^{2-n} \eta_2^n p(\mathbf{w}^{0j}; \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \quad (4.6)$$

Вектор-функции в (4.3), имеющие своими множителями  $M_1^{0j}$  и  $M_2^{0j}$ , будем обозначать соответственно  $\mathbf{S}^{(1)}$  и  $\mathbf{S}^{(2)}$ . Они являются решениями задачи о нагружении упругого полупространства единичным сосредоточенным моментом (индекс указывает направление вектора интенсивности).

Сделаем теперь в (4.3) обратную к (3.1) замену координат

$$\mathbf{w}^{0j}(\varepsilon^{-1}(\mathbf{x} - P^j)) \sim \varepsilon F_3^{0j} \mathbf{T}(\mathbf{x} - P^j) + \varepsilon^2 [M_1^{0j} \mathbf{S}^{(1)}(\mathbf{x} - P^j) + M_2^{0j} \mathbf{S}^{(2)}(\mathbf{x} - P^j)] + \dots \quad (4.7)$$

В соответствии с методом срачиваемых разложений подчеркнутое слагаемое в правой части (4.7) определяет сингулярность вектор-функции  $\mathbf{v}^1$  в точке  $P^j$ , т.е. главный член внешнего разложения (2.2) таков:

$$\mathbf{v}^1(\mathbf{x}) = F_3^{01} \mathbf{T}(\mathbf{x} - P^1) + \dots + F_3^{0J} \mathbf{T}(\mathbf{x} - P^J) \quad (4.8)$$

Иными словами, воздействие штампов на полупространство в области, удаленной от зон контакта, в главном моделируется при помощи сосредоточенных сил.

**5. Вторые члены асимптотики.** Первая и вторая предельные задачи допускают множество решений. В первой отсутствуют асимптотические условия при  $|\mathbf{x} - P^j| \rightarrow 0$  ( $j = 1, \dots, J$ ), а во второй – при  $|\xi^j| \rightarrow \infty$ , обеспечивающие единственность решений. Эти соотношения получают путем срачивания внешнего и внутренних разложений.

Второй член внешнего разложения возьмем в виде (см. (4.7)):

$$v^2(x) = \sum_{j=1}^J \left[ F_3^{1j} \mathbf{T}(x - P^j) + M_1^{0j} \mathbf{S}^{(1)}(x - P^j) + M_2^{0j} \mathbf{S}^{(2)}(x - P^j) \right] \quad (5.1)$$

Здесь коэффициенты  $M_1^{0j}$  и  $M_2^{0j}$  вычисляются по формулам (4.5) в то время, как  $F_3^{1j}$  подлежат определению.

Для вектор-функции (4.7) справедлива асимптотическая формула

$$v^1(x) = F_3^{0j} \mathbf{T}(x - P^j) + \mathbf{V}^1(P^j) + O(|x - P^j|), \quad x \rightarrow P^j, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{V}^1(P^j) = \sum_{k \neq j} F_3^{0k} \mathbf{T}(P^j - P^k)$$

Перейдем в (5.1) и (5.2) к растянутым координатам (3.1). Полученные соотношения подставим в (2.2) и соберем слагаемые при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$ . В итоге имеем

$$\varepsilon v^1(P^j + \varepsilon \xi^j) + \varepsilon^2 v^2(P^j + \varepsilon \xi^j) = \varepsilon^0 \{ F_3^{0j} \mathbf{T}(\xi^j) + M_1^{0j} \mathbf{S}^{(1)}(\xi^j) + M_2^{0j} \mathbf{S}^{(2)}(\xi^j) \} + \varepsilon \{ \mathbf{V}^1(P^j) + F_3^{1j} \mathbf{T}(\xi^j) \} + O(\varepsilon |\xi^j|), \quad \varepsilon |\xi^j| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (5.3)$$

Сравним асимптотическое представление "внешнего" поля перемещений (5.3) с двухчленной асимптотикой "внутреннего". В силу (4.6):

$$w^{0j}(\xi^j) + \varepsilon w^{1j}(\xi^j) = \varepsilon^0 \{ F_3^{0j} \mathbf{T}(\xi^j) + M_1^{0j} \mathbf{S}^{(1)}(\xi^j) + M_2^{0j} \mathbf{S}^{(2)}(\xi^j) \} + O(|\xi^j|^{-3}) + \varepsilon w^{1j}(\xi^j), \quad |\xi^j| \rightarrow \infty \quad (5.4)$$

В зоне срачивания  $\{ \xi^j : \varepsilon^{-1/2} \leq |\xi^j| \leq 2\varepsilon^{-1/2} \}$ , где "работают" оба асимптотических представления, правые части соотношений (5.3) и (5.4) будут отличаться на величины  $O(\varepsilon^{3/2})$ , если будет соблюдено условие

$$w^{1j}(\xi^j) = \mathbf{V}^1(P^j) + F_3^{1j} \mathbf{T}(\xi^j) + O(|\xi^j|^{-2}), \quad |\xi^j| \rightarrow \infty \quad (5.5)$$

Решение задачи (3.2) – (3.4), (3.8), (5.5) представим в виде

$$w^{1j}(\xi^j) = \mathbf{V}^1(P^j) + \mathbf{W}^{1j}(\xi^j) \quad (5.6)$$

Вектор-функция  $\mathbf{W}^{1j}$  удовлетворяет (3.2) – (3.4) и краевому условию

$$W_3^{1j}(\xi^j, 0) = -V_3^1(P^j), \quad \xi^j \in \omega_j$$

а на бесконечности обладает разложением вида (4.6), откуда находится значение  $F_3^{1j}$ .

**6. О построении следующих членов асимптотики.** Члены  $v^q(x)$  внешнего разложения представляют собой линейные комбинации сингулярных решений Буссинеска  $\mathbf{T}(x - P^j)$  и их производных  $\partial^m \mathbf{T}(x - P^j) / \partial x_1^{m-n} \partial x_2^n$  ( $n = 0, 1, \dots, m$ ) до порядка  $q - 1$ , включительно.

Члены  $w^{pj}(\xi^j)$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) внутренних разложений слагаются (см. (5.6)) из (учитывающего взаимодействие штампов) векторного полинома степени  $p - 1$ , третья компонента которого привносит невязку в краевое условие (3.8), и исчезающего на бесконечности решения  $\mathbf{W}^{pj}$  задачи для штампа с так называемым полиномиальным основанием.

Вычисления упрощаются, когда точка  $P^j$  совпадает (по терминологии [12]) с центром давления области  $\omega_j$ ; коэффициенты  $M_1^{0j}$  и  $M_2^{0j}$  (см. (4.5) и (4.3)) равны нулю. В дальнейшем будем считать, что это предположение выполняется.

7. Асимптотика контактного давления. В формуле (1.6) перейдем к растянутым координатам (3.1) (используя  $\partial/\partial x_i = \varepsilon^{-1}\partial/\partial \xi_i$ ) и учтем представление (3.7):

$$p(\mathbf{u}^\varepsilon; \mathbf{x}') = \varepsilon^{-1} p(\mathbf{w}^{0j}; \xi') + p(\mathbf{w}^{1j}; \xi') + \dots, \quad \xi' \in \omega_j \quad (7.1)$$

Первые члены разложения (7.1) удовлетворяют следующим интегральным уравнениям первого рода (см., например, [4, 7])<sup>1</sup>

$$(Bp^{0j})(\xi_1, \xi_2) \equiv \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_{\omega_j} \frac{p(\mathbf{w}^{0j}; \eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2}{\sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}} = \delta_0 \quad (7.2)$$

$$(Bp^{1j})(\xi_1, \xi_2) = - \sum_{k \neq j} F_3^{0k} T_3(P^j - P^k) \quad (7.3)$$

Здесь  $E$  и  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Для построения следующих двух членов асимптотики контактного давления применяется формула

$$\begin{aligned} \left. \frac{\pi E}{1-\nu^2} T_3(\mathbf{x} - P^k) \right|_{x_3=0} &= \frac{1}{|P^j - P^k|} + \frac{\Delta x_1^j \cos \gamma_{jk} + \Delta x_2^j \sin \gamma_{jk}}{|P^j - P^k|^2} + \\ &+ \frac{3(\Delta x_1^j \cos \gamma_{jk} + \Delta x_2^j \sin \gamma_{jk})^2 - (\Delta x_1^j)^2 - (\Delta x_2^j)^2}{2|P^j - P^k|^3} + O(|\mathbf{x} - P^j|^3), \quad \mathbf{x} \rightarrow P^j \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta x_1^j &= x_1 - x_1^j, \quad \Delta x_2^j = x_2 - x_2^j, \quad |P^j - P^k| = \sqrt{(x_1^k - x_1^j)^2 + (x_2^k - x_2^j)^2} \\ \cos \gamma_{jk} &= \frac{x_1^k - x_1^j}{|P^j - P^k|}, \quad \sin \gamma_{jk} = \frac{x_2^k - x_2^j}{|P^j - P^k|} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Третий член внешнего разложения указать нетрудно (см. (4.3)):

$$\mathbf{v}^3(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^J \left( \sum_{n=0}^2 M_{2,n}^{0j} \frac{\partial^2 \mathbf{T}(\mathbf{x} - P^j)}{\partial x_1^{2-n} \partial x_2^n} + F_3^{2j} \mathbf{T}(\mathbf{x} - P^j) \right) \quad (7.6)$$

Коэффициенты  $M_{2,n}^{0j}$  вычисляются по формулам (4.6), а  $F_3^{2j}$  определяются в процессе срачивания.

Принимая во внимание (4.8), (5.1), (7.4) и опуская выкладки, находим

$$(Bp^{2j})(\xi_1, \xi_2) = - \frac{1-\nu^2}{\pi E} \sum_{k \neq j} \left( \frac{F_3^{1k}}{|P^j - P^k|} + F_3^{0k} \frac{\xi_1^j \cos \gamma_{jk} + \xi_2^j \sin \gamma_{jk}}{|P^j - P^k|^2} \right) \quad (7.7)$$

Правые части уравнений (7.3) и (7.7) зависят от первых членов разложения для силы, действующей на штамп с основанием  $\omega_j(\varepsilon)$ :

$$F_3^{\varepsilon j} = \iint_{\omega_j(\varepsilon)} p(\mathbf{u}^\varepsilon; x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \varepsilon F_3^{0j} + \varepsilon^2 F_3^{1j} + \varepsilon^3 F_3^{2j} + \dots \quad (7.8)$$

Так как точка  $P^j$  совпадает с центром давления  $\omega_j(\varepsilon)$ , то справедливы равенства

$$F_3^{0j} = \frac{\pi E}{1-\nu^2} C_j \delta_0, \quad F_3^{1j} = - \frac{\pi E}{1-\nu^2} C_j \delta_0 \sum_{k \neq j} \frac{C_k}{|P^j - P^k|} \quad (7.9)$$

$$F_3^{2j} = \frac{\pi E}{1-\nu^2} C_j \delta_0 \sum_{k \neq j} \frac{C_k}{|P^j - P^k|} \sum_{l \neq k} \frac{C_l}{|P^k - P^l|} \quad (7.10)$$

Постоянную  $C_j$ , имеющую размерность длины, по аналогии с электростатической емкостью (см. [7]) будем называть поступательной емкостью штампа с плоским гладким основанием в форме области  $\omega_j$ . Для штампа с основанием  $\omega_j(\epsilon)$  емкость равна  $c_j = \epsilon C_j$ .

Наконец, выпишем уравнение для четвертого члена в разложении (7.2) (см. (4.8), (5.1), (7.6), (7.4)):

$$(Bp^{3j})(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1-v^2}{\pi E} \sum_{k \neq j} \left\{ \sum_{n=0}^2 M_{2,n}^{0k} t_{jk}^{2,n} + F_3^{1k} \frac{\xi_1^j \cos \gamma_{jk} + \xi_2^j \sin \gamma_{jk}}{|P^j - P^k|^2} + F_3^{2k} \frac{3(\xi_1^j \cos \gamma_{jk} + \xi_2^j \sin \gamma_{jk})^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}{2|P^j - P^k|^3} + \frac{F_3^{2k}}{|P^j - P^k|} \right\} \quad (7.11)$$

Здесь в соответствии с обозначениями (7.5):

$$t_{jk}^{2,n} = \frac{\pi E}{1-v^2} \left. \frac{\partial^2 T_3(\mathbf{x} - P^k)}{\partial x_1^{2-n} \partial x_2^n} \right|_{\mathbf{x}=P^j}, \quad t_{jk}^{2,0} = \frac{3 \cos^2 \gamma_{jk} - 1}{|P^j - P^k|^3}$$

$$t_{jk}^{2,1} = -\frac{3 \cos \gamma_{jk} \sin \gamma_{jk}}{|P^j - P^k|^3}, \quad t_{jk}^{2,2} = \frac{3 \sin^2 \gamma_{jk} - 1}{|P^j - P^k|^3}$$

**8. Примеры. 1. Взаимодействие круговых штампов.** Пусть  $\Gamma(\epsilon)$  состоит из двух круговых штампов различных радиусов  $a_1$  и  $a_2$  (см. фиг. 1). Тогда, используя результаты работ [7, 13–15] по решению уравнений (7.2), (7.3), (7.7) и (7.11) для контактного давления под штампом, центр основания которого помещен в начале координат, найдем с точностью до членов  $O(\epsilon^4)$  асимптотическое представление ( $\epsilon = 2d^{-1} \max \{a_1, a_2\}$ ):

$$p(x_1, x_2) \approx \frac{\epsilon \delta_0}{\pi(1-v^2)} (a_1^2 - x_1^2 - x_2^2)^{-1/2} \left\{ 1 - \frac{2a_2}{\pi d} + \left( \frac{4a_1 a_2}{\pi^2 d^2} - \frac{4a_2 x_1}{\pi d^2} \right) - \frac{8a_1 a_2^2}{\pi^3 d^3} - \frac{a_2^3}{3\pi d^3} + \frac{8a_1 a_2 x_1}{\pi^2 d^3} + \frac{a_2 a_1^2}{\pi d^3} - \frac{6a_2 x_1^2}{\pi d^3} + \frac{2a_2 x_2^2}{\pi d^3} \right\} \quad (8.1)$$

Когда штампы обладают одинаковыми радиусами оснований, (8.1) совпадает с результатами [1].

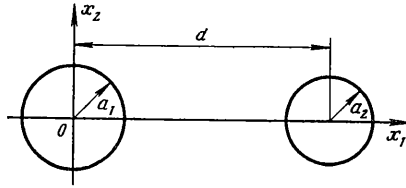
**2. Асимптотика контактной жесткости системы штампов.** Формулы (7.8)–(7.10) дают три члена асимптотики поступательной емкости системы штампов  $\Gamma(\epsilon)$ . С такой же точностью в [6] решена задача расчета (аналогичной характеристики) жесткости системы одинаковых круговых штампов.

Если все штампы системы имеют одинаковую контактную жесткость  $j_0 = \pi E(1 - v^2)^{-1} c_0$  ( $c_0$  – поступательная емкость), то жесткость системы штампов равна  $j_0 R$ , причем (сравните с [6], § 2.3)

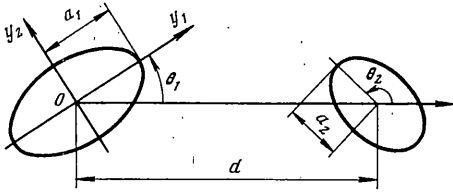
$$R \approx \sum_{j=1}^J \left( 1 - \sum_{k \neq j} \frac{c_0}{|P^j - P^k|} + \sum_{k \neq j} \frac{c_0}{|P^j - P^k|} \sum_{l \neq k} \frac{c_0}{|P^k - P^l|} \right) \quad (8.2)$$

Формула (8.2) имеет погрешность  $O(\epsilon^3)$ , где  $\epsilon = \pi c_0 / d$ .

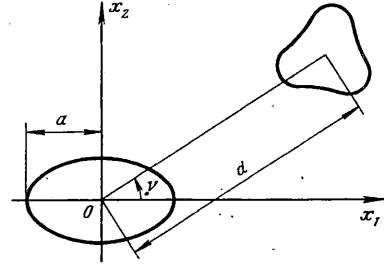
**3. Взаимодействие эллиптических штампов.** В задаче, изображенной на фиг. 2, для контактного давления под подошвой штампа, центр которого расположен в начале координат, с точностью до членов  $O(\epsilon^4)$ , где  $\epsilon = 2d^{-1} \max \{a_1, a_2\}$ , находим



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

следующее асимптотическое представление

$$\begin{aligned}
 p(y_1, y_2) &\approx \frac{E\delta_0}{2(1-v^2)a_1\sqrt{1-e_1^2}} \left(1 - \frac{y_1^2}{a_1^2} - \frac{y_2^2}{a_1^2(1-e_1^2)}\right)^{-1/2} \times \\
 &\times \left\{ \frac{1}{\mathbf{K}(e_1)} - \frac{c_2}{\mathbf{K}(e_1)d} + \frac{c_1c_2}{\mathbf{K}(e_1)d^2} - \frac{c_2y_1 \cos \theta_1}{\mathbf{D}(e_1)d^2} + \frac{c_2y_2 \sin \theta_1}{\mathbf{B}(e_1)d^2} - \right. \\
 &- \left. \left( \frac{c_1c_2^2}{d^3} + \frac{a_2^3}{6\mathbf{K}(e_2)d^3} [1 + e_2^2(1 - 3\sin^2 \theta_2)] \right) \frac{1}{\mathbf{K}(e_1)} - \frac{c_2a_1^2}{6d^3} [1 + e_1^2(1 - 3\sin^2 \theta_1)] \frac{1}{\mathbf{K}(e_1)} + \right. \\
 &+ \frac{c_1c_2}{d^3} \left( \frac{y_1 \cos \theta_1}{\mathbf{D}(e_1)} - \frac{y_2 \sin \theta_1}{\mathbf{B}(e_1)} \right) + \frac{3c_2y_1y_2 \sin 2\theta_1}{2(\mathbf{D}(e_1) - \mathbf{C}(e_1))d^3} - \\
 &- \frac{3c_2}{2d^3} [\cos 2\theta_1 + \sigma_1^{(1)}(3\sin^2 \theta_1 - 1)] C_1(e_1) \left( y_1^2 + \frac{y_2^2}{1 - 3\sigma_2^{(1)}} - \sigma_1^{(1)}a_1^2 \right) - \\
 &- \frac{3c_2}{2d^3} [\cos 2\theta_1 + \sigma_2^{(1)}(3\sin^2 \theta_1 - 1)] C_2(e_1) \left( y_1^2 - \frac{y_2^2}{3\sigma_1^{(1)} - 1} - \sigma_2^{(1)}a_1^2 \right) \\
 C_1(e_1) &= \frac{2(\sigma_1^{(1)} - e_1^2)^2}{(3(\sigma_1^{(1)})^2 - e_1^2)(1 - \sigma_1^{(1)})[\mathbf{K}(e_1) - 3\sigma_2^{(1)}\mathbf{D}(e_1)]} \\
 C_2(e_1) &= \frac{2(\sigma_1^{(1)})^2(3\sigma_1^{(1)} - 1)^2}{(3\sigma_1^{(1)} - e_1^2)(3(\sigma_1^{(1)})^2 - e_1^2)[\sigma_1^{(1)}\mathbf{C}(e_1) + (2\sigma_1^{(1)} - 1)\mathbf{D}(e_1)]} \\
 3\sigma_{1,2}^{(1)} &= 1 + e_1^2 \pm \sqrt{1 - e_1^2 + e_1^4}, \quad c_j = \frac{a_j}{\mathbf{K}(e_j)} \quad (j=1, 2)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}(e) = \frac{1}{e^2} [\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)], \quad \mathbf{B}(e) = \mathbf{K}(e) - \mathbf{D}(e), \quad \mathbf{C}(e) = \frac{1}{e^2} [2\mathbf{D}(e) - \mathbf{K}(e)]$$

где  $e_j$  – эксцентриситет;  $K$  и  $E$  – полные эллиптические интегралы первого и второго родов.

Соотношение (8.3) получено на основе результатов работ [7, 14, 16].

4. Давление под эллиптическим штампом. В ситуации на фиг. 3 для контактного давления под эллиптическим штампом имеем асимптотическое представление

$$p(x_1, x_2) \approx \frac{E\delta_0}{2(1-\nu^2)a\sqrt{1-e^2}} \left( 1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{a^2(1-e^2)} \right)^{-1/2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{K(e)} - \frac{c}{K(e)d} + \frac{ac}{K(e)^2 d^2} - \frac{cx_1 \cos \gamma}{D(e)d^2} - \frac{cx_2 \sin \gamma}{B(e)d^2} \right\} \quad (8.4)$$

Формула (8.4) при помощи двусторонних оценок для поступательной емкости  $c$  произвольного штампа (см. [7, 17, 18]) позволяет с точностью до членов  $O(\epsilon^3)$ , где  $\epsilon = d^{-1} \max \{2a, \pi c\}$ , оценить влияние штампов друг на друга.

Автор благодарит С.А. Назарова за внимание к работе и обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Госкомвуза РФ (95-0-43-175).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрейків А.Е., Панасюк В.В. Тиск системи колових штампів на пружний напівпростір // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1971. № 6. С. 535–536.
2. Collins W.D. Some coplanar punch and crack problems in three-dimensional elastostatics // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1963. V. 274. № 1359. P. 507–528.
3. Андрейкив А.Е. Вдавливание в упругое полупространство системы штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 2. С. 125–131.
4. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
5. Gladwell G.M.L., Fabrikant V.I. The interaction between a system of circular punches on an elastic half space // J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1982. V. 49. No. 2. P. 341–344.
6. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.
7. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
8. Ван-Дайк М.Д. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
9. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
10. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
11. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
12. Аргатов И.И., Назаров С.А. Асимптотическое решение задачи об упругом теле, лежащем на нескольких малых опорах // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 110–118.
13. Абрамов В.М. Исследование случая несимметричного давления штампа круглого сечения на упругое полупространство // Докл. АН СССР. 1939. Т. 23. № 8. С. 759–763.
14. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.
15. Ростовцев Н.А. Комплексные потенциалы в задаче о штампе, круглом в плане // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 1. С. 77–82.
16. Александров В.М., Ворович И.И. О действии штампа на упругий слой конечной толщины // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 323–333.
17. Поля Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
18. Бородачев Н.М. Об определении осадок жестких плит и массивов // Основания, фундаменты и мех. грунтов. 1964. № 4. С. 3–5.