МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1999

УДК 539.3

© 1999 г. В.М. АЛЕКСАНДРОВ, J.J. KALKER, Д.А. ПОЖАРСКИЙ

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ С ЗАРАНЕЕ НЕИЗВЕСТНОЙ ОБЛАСТЬЮ КОНТАКТА

Существенно пространственная контактная задача с неизвестной априори областью контакта методом граничных интегральных уравнений изучалась лишь для случая однородного упругого полупространства (см., например [1]). Здесь при помощи метода нелинейных граничных интегральных уравнений [2–4] проводится численный анализ существенно пространственной контактной задачи с неизвестной областью контакта для двухслойного упругого основания (слой на полупространстве). Метод позволяет одновременно определить неизвестные контактные давления и площадку контакта. Затем находится связь между вдавливающей силой и осадкой штампа. Задача представляет большой интерес для механики контактного взаимодействия тел с покрытиями. Ранее [5] для решения этой задачи использовались асимптотические методы.

Рассмотрим контактную задачу о вдавливании силой P штампа, форма основания которого описывается функцией $f(x, y)$, в слой толщины h с упругими характеристиками G_1, ν_1, полностью сцепленный с полупространством, имеющим упругие характеристики G_2, ν_2. Для простоты предположим, что штамп – эллиптический параболоид

$$f(x,y) = x^2/(2R_1) + y^2/(2R_2) \tag{1}$$

а сила P приложена центрально, так что штамп внедряется без перекоса на величину δ.

Относительно функции распределения неизвестных контактных давлений под штампом $q(x, y)$ методами операционного исчисления было получено [5] интегральное уравнение вида

$$\iint_\Omega q(\xi,\eta) K\left(\frac{R}{h}\right) d\xi d\eta = 2\pi h\theta_1(\delta - f(x,y)) \quad ((x,y)\in\Omega) \tag{2}$$

$$K(t) = \int_0^\infty N(u) J_0(ut)du, \quad N(u) = \frac{M + 4ue^{-2u} - Le^{-4u}}{M-(1+4u^2+LM)e^{-2u} + Le^{-4u}}$$

$$M = \frac{G_2\varkappa_1 + G_1}{G_1 - G_2}, \quad L = \frac{G_1\varkappa_2 - G_2\varkappa_1}{G_1\varkappa_2 + G_2}, \quad \theta_n = \frac{G_n}{1-\nu_n} \quad (n = 1,2)$$

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad \varkappa_n = 3 - 4\nu_n \quad (n = 1,2)$$

где Ω – неизвестная область контакта.

Предположим, что область контакта содержится в прямоугольнике S: $\{|x| \leqslant$

$\leqslant a, |y| \leqslant b\}$, и пусть для определенности $b \geqslant a$: Введем безразмерные обозначения по формулам

$$\frac{x}{b} = x', \ \frac{\xi}{b} = \xi', \ \frac{y}{b} = y', \ \frac{\eta}{b} = \eta', \ \frac{R}{b} = R', \ \frac{\delta}{b} = \delta', \ \frac{h}{b} = \lambda, \ \frac{a}{b} = \varepsilon$$

$$\frac{b}{2R_1} = A, \ \frac{b}{2R_2} = B, \ \frac{q(x,y)}{2\pi\theta_1} = q'(x',y'), \ \frac{P}{2\pi\theta_1 b^2} = P', \ \Omega \to \Omega', \ S \to S' \tag{3}$$

Безразмерный параметр λ характеризует относительную толщину упругого слоя. В обозначениях (3) с использованием значения интеграла [6]:

$$\int_0^\infty J_0(ut)du = \frac{1}{t} \tag{4}$$

перепишем интегральное уравнение (2), (1) в эквивалентной форме (штрихи опускаем):

$$\int_S K(M,N)q(N)d\Omega_N = g(M), \quad q(M) \geqslant 0, \ M \in \Omega \tag{5}$$

$$\int_S K(M,N)q(N)d\Omega_N > g(M), \quad q(M) = 0, \ M \in (S \setminus \Omega)$$

где введены обозначения

$$M = (x,y), \quad N = (\xi,\eta), \ g(x,y) = \delta - Ax^2 - By^2 \tag{6}$$

$$K(M,N) = \frac{1}{R} + K_*\left(\frac{R}{\lambda}\right), \ K_*(t) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty [N(u)-1]J_0(ut)du$$

Также предполагается, что существует ограниченная область $S_0 = \{M\colon g(M) > 0\}$ такая, что $\Omega \subset \bar{S}_0 \subset S$. Введем нелинейные операторы

$$v^+(M) = \sup\{v(M), 0\}, \quad v^-(M) = \inf\{v(M), 0\} \tag{7}$$

и рассмотрим операторное уравнение

$$Tv = 0 \ (M \in \Omega), \quad T \equiv \mu v^- + Kv^+ - g, \ \mu = \text{const} \tag{8}$$

где $v^\pm = v^\pm(M)$, $g = g(M)$, K – интегральный оператор вида

$$Kv^+ = \int_S K(M,N)v^+(N)dS_N \tag{9}$$

Теорема 1. Если $v_* = v_*(M)$ – решение (8), то ($q = q(M) = v_*^+$, $\Omega = \{M\colon v_* \geqslant 0\}$) – решение (5), причем $\Omega \neq \varnothing$ при $S_0 \neq \varnothing$; обратно, если (q, Ω) – решение (5), то $v_* = \mu^{-1}g + q - \mu^{-1}Kq$, $M \in \Omega$ – решение (8).

Теорема 2. Для существования единственного решения $v_* \in L_2(S)$ уравнения (8) необходимо и достаточно, чтобы функция $v_0 = v_0(M)$, служащая решением уравнения ($\varepsilon_* > 0$):

$$\varepsilon_* v^+ + \mu v^- + Kv^+ = g \ (M \in \Omega) \tag{10}$$

удовлетворяла условию

$$\|v_0\|_{L_2} \leqslant C, \quad \varepsilon_* \in (0, \varepsilon_0], \ \varepsilon_0 = \text{const} > 0 \tag{11}$$

где постоянная C не зависит от ε_*.

Таблица 1

Материал	$E10^{-4}$ МПа	ν
сталь углеродистая	20	0,28
латунь холодно-тянутая	9	0,35
бетон	2	0,17
песок, замороженный при –10°C	0,15	0,30
глина	0,0077	0,17

Таблица 2

N	λ	2	1	1/2	1/4
1	$q_0 10^3$	0,313	0,289	0,243	0,186
1	$P10^3$	0,200	0,171	0,143	0,127
2	$q_0 10^3$	0,358	0,384	0,448	0,541
2	$P10^3$	0,288	0,328	0,386	0,438
3	$q_0 10^3$	0,243	0,202	0,143	0,0626
3	$P10^3$	0,0964	0,0627	0,0392	0,0263
4	$q_0 10^3$	0,145	0,116	0,0857	0,0512
4	$P10^3$	0,0211	0,0114	0,00603	0,00316

Уравнение (10) имеет решение в силу принципа сжатых отображений при достаточно больших значениях μ [2].

Теорема 3. Пусть v_1(M) и $v_2(M)$ – решения уравнения (8) при $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$ соответственно ($\mu_1 \neq \mu_2$). Тогда $\overset{+}{v_1}(M) = \overset{+}{v_2}(M)$.

Доказательства этих трех ключевых для метода нелинейных граничных уравнений теорем повторяют доказательства соответствующих теорем из [2–4]. При этом используется, что интегральный оператор K вида (9) является вполне непрерывным, самосопряженным, строго положительным, а его ядро $K(M, N)$ обладает слабой особенностью.

Для определения величины P к уравнению (8) следует присоединить интегральное условие равновесия штампа

$$\int\limits_{\Omega} q(M)d\Omega_M = P \tag{12}$$

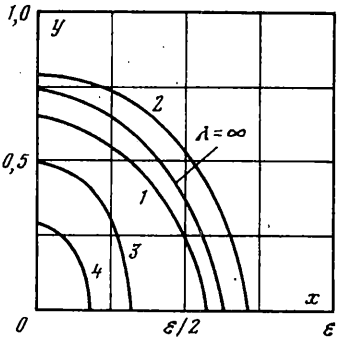
При численном решении уравнения (8) применим метод М.А. Красносельского [7], суть которого заключается в построении последовательных приближений по формулам

$$\begin{gathered} v_{n+1} = v_n - (Q'v_n)^{-1} Tv_n \\ v_n = v_n(M) \ (n = 0,1,...), \ v_0 = g \end{gathered} \tag{13}$$

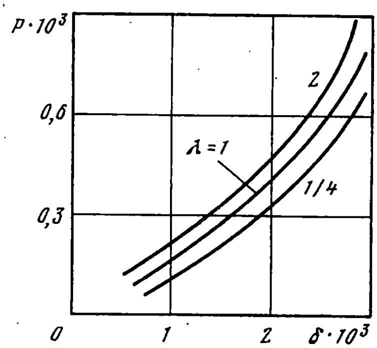
где Q – дифференцируемый оператор, хорошо аппроксимирующий оператор T вида (8) по равномерной метрике, имеющий вид

$$\begin{gathered} Q_v = \mu(v - Q_1 v) + KQ_1 v - g \\ Q_1 v = \begin{cases} 0 & (v < -\varepsilon_1) \\ \frac{1}{2}[v - v^2/(2\varepsilon_1)] + \frac{3}{4}\varepsilon_1 & (|v| \leq \varepsilon_1) \\ v & (v > \varepsilon_1 > 0) \end{cases} \end{gathered} \tag{14}$$

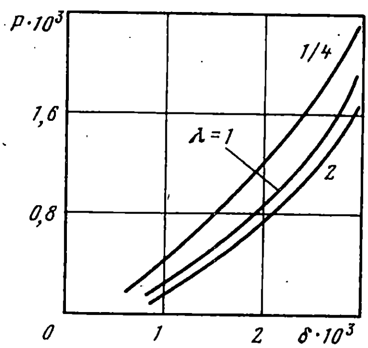
причем выбором постоянной ε_1 в (14) можно добиться аппроксимации оператора T с любой наперед заданной точностью.



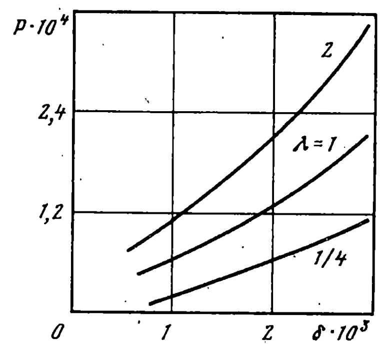
Фиг. 1



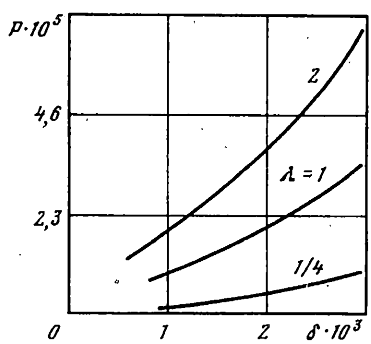
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

В силу симметрии задачи относительно обеих осей координат достаточно рассматривать лишь четверть прямоугольника S, лежащую в первом квадранте плоскости (x, y), которую покроем сеткой из m узлов с шагом h_1 по оси x и h_2 по оси y (в расчетах $m \geqslant 81$). При вычислении значений функции $K(M, N)$ вида (6) в этих узлах ее особенность сглаживается по формулам

$$1/R \to 1/R_*, \quad R_* = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y)^2 + \delta_*} \tag{15}$$

Можно показать, что регуляризующий параметр δ_* в формуле (15) должен быть связан с шагами сетки h_1 и h_2 (в расчетах полагалось $\delta_* = h_1 h_2/16$). Для вычисления функции Бесселя $J_0(u)$ удобны специальные аппроксимации [8].

При проведении расчетов принимали $A = 0{,}002$, $B = 0{,}001$, $\varepsilon = 0{,}8$. При этом в случае $\delta = 0{,}001$, $\lambda = \infty$ имеем для отладки точное решение задачи в виде [9]:

$$q(x,y)10^3 = 0{,}348\sqrt{1-\left(\frac{x}{0{,}469}\right)^2-\left(\frac{y}{0{,}744}\right)^2}, \quad P10^3 = 0{,}254 \tag{16}$$

Рассматривались четыре случая двухслойного основания: (1) сталь на латуни; (2) латунь на стали; (3) бетон на замороженном песке; (4) бетон на глине. Значения упругих характеристик для перечисленных материалов (модуль Юнга E [МПа] и коэффициент Пуассона ν) брались из табл. 1 (см. [10–12]). Как известно, модуль сдвига $G = E/[2(1+\nu)]$. В табл. 2 для случаев $N = 1, \ldots, 4$ при $\delta = 0{,}001$ приведены значения силы P и контактного давления в точке первоначального контакта $q_0 = q(0, 0)$ в зависимости от λ, а на фиг. 1 при $\lambda = 1/4$ и том же значении δ показана граница четверти области контакта Ω. На фиг. 2–5 соответственно для случаев 1–4 показана зависимость силы P от осадки δ при разных λ.

Видно, что когда контактная жесткость слоя θ_1 больше жесткости полупространства θ_2, область контакта и сила уменьшаются с уменьшением относительной толщины слоя. Если же жесткость полупространства превосходит жесткость слоя, то, наоборот, следует ожидать увеличения области контакта и силы с уменьшением λ.

Работа выполнена в соответствии с программой гранта ИНТАС–РФФИ (95-IN-RU-492).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kalker J.J.* Three–Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact. Dordrecht, etc.: Kluwer, 1990. 314 p.
2. *Галанов Б.А.* Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 827–835.
3. *Галанов Б.А.* Нелинейные граничные уравнения контактных задач теории упругости // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296. № 4. С. 812–815.
4. *Пожарский Д.А.* О пространственной контактной задаче для упругого клина с неизвестной областью контакта // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 812–818.
5. *Александрова Г.П.* Контактные задачи изгиба плит, лежащих на упругом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 1. С. 97–106.
6. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.М.: Наука, 1971. 1108 с.
7. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
9. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
10. *Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г.* Справочник по элементарной физике. М.: Наука, 1988. 254 с.
11. *Баклашев И.В., Картозия Б.А.* Механика горных пород. М.: Недра, 1975. 272 с.
12. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.

Москва, Дельфт (Нидерланды)

Поступила в редакцию
26.06.1997