

УДК 531.8

© 1999 г. Д.Ю. СКУБОВ, И.В. ШУМАКОВИЧ

## УСТОЙЧИВОСТЬ РОТОРА АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ТОКОВЫХ ОБМОТКОВ

Эксцентрическое положение ротора электрической машины в расточке статора может служить причиной его повышенных вибраций. При центральном положении ротора главный вектор электродинамических усилий равен нулю. Отклонение от центрального положения нарушает равновесие системы сил, действующих на ротор, и приводит к появлению ненулевого результирующего усилия.

Исследование влияния силы магнитного тяжения на вибрацию электрических машин с ферромагнитным ротором проводилось в [1, 2]. Результаты экспериментальных исследований, показывающие, что при определенных условиях в асинхронном двигателе с ферромагнитным сердечником происходит потеря устойчивости центрального положения ротора и возбуждаются автоколебания, приводятся в работе [3]. Авторы объясняют это явление появлением тангенциальной составляющей электродинамического усилия.

Цель данной работы состоит в расчете магнитного поля в воздушном зазоре асинхронного двигателя с дальнейшим получением явных формул для электродинамических усилий, действующих на эксцентрический ротор при его движении во вращающемся магнитном поле. На основе метода усреднения, примененного к уравнениям Лагранжа – Максвелла, исследуются малые колебания ферромагнитного ротора, определяются стационарные режимы и граница устойчивости центрального положения ротора в зависимости от параметров системы.

**1. Расчет магнитного поля в рабочей зоне асинхронного двигателя.** Для исследования специфики действия электромагнитных сил будем решать задачу на основе электромеханической модели, с принятием ряда упрощающих предположений. Центр тяжести ротора  $O_1$  находится на оси вращения, которая смещена на величину  $e$  по отношению к геометрическому центру статора  $O$  (фиг. 1). Статор имеет трехфазную обмотку, подключенную к трехфазной сети. Ротор выполнен в виде беличьей клетки и его ферромагнитный сердечник шихтован.

Для вычисления электродинамических усилий, действующих на ротор, необходим расчет магнитного поля для всей области, ограниченной сердечником статора. Расчет поля приводится в плоском случае без учета краевых эффектов в зоне лобовых частей обмоток. Обмотки статора и беличья клетка ротора представляются бесконечно тонкими цилиндрическими токонесущими слоями с заданным видом распределения плотности тока по окружности. Радиусы токонесущих поверхностей  $r_1$  и  $r_2$  принимаются равными средним радиусам обмоток. Магнитные проницаемости сердечников ротора и статора считаются бесконечными, поэтому магнитное поле можно считать сосредоточенным в воздушном зазоре машины.

Для расчета поля зададим гармонический состав линейной плотности тока. Обозначим фазы тока статора через  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , и будем считать, что амплитуды всех фазных токов совпадают, а фазовые сдвиги во времени равны пространственным сдвигам. Тогда распределение плотностей токов на внутренней поверхности статора,



В дальнейшем ток на статоре будем считать заданным. В выражении линейной плотности тока ротора будем удерживать две гармоники

$$j_2 = J_{1s}^{(2)} \sin \vartheta^{(2)} + J_{1c}^{(2)} \cos \vartheta^{(2)} + J_{2s}^{(2)} \sin 2\vartheta^{(2)} + J_{2c}^{(2)} \cos 2\vartheta^{(2)} \quad (1.3)$$

где  $\vartheta^{(2)}$  – это угловая координата, соответствующая ротору, отсчитываемая от оси вращения ротора (линия  $OB$  на фиг. 1).

Введем в рассмотрение угловые координаты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  для ротора и статора, соответственно, отсчитываемые от линии наименьшего зазора (линия  $OO_1A$  на фиг. 1). Выберем в качестве обобщенных координат столбец  $(\psi, \varphi, e)^T$ , а в качестве обобщенных электрических скоростей – столбец амплитуд плотностей токов  $(J_{1s}^{(2)}, J_{1c}^{(2)}, J_{2s}^{(2)}, J_{2c}^{(2)})^T$ . Здесь угол  $\psi$  – угол между фазой  $a$  и осью вращения ротора,  $e$  – эксцентриситет,  $\varphi$  – угол между фазой  $a$  и линией наименьшего зазора (угол эксцентриситета). Из фиг. 1 следует, что  $\vartheta^{(1)} = \varphi_1 + \varphi$ ,  $\vartheta^{(2)} = \varphi_2 - (\varphi - \varphi)$ .

С учетом допущений, описанных выше, расчет магнитного поля сводится к решению задачи Неймана относительно вектор-потенциала для области, соответствующей воздушному зазору между обмотками ротора и статора. Решение краевой задачи удобно проводить в бицилиндрических координатах  $\tau$  и  $\sigma$ , связанных с декартовыми следующими соотношениями:

$$x = a \operatorname{sh} \tau (\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)^{-1}, y = a \sin \sigma (\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)^{-1} \quad (1.4)$$

$$a = \frac{1}{2} ([ (r_1 + r_2)^2 - e^2 ] [ (r_1 - r_2)^2 - e^2 ] )^{1/2}$$

где  $r_1, r_2$  – средние радиусы обмоток статора и ротора, – смещение центра ротора.

Граничные области являются координатными линиями  $\tau = \tau_i$  (для  $i = 1, 2$ ). Параметры  $a, \tau$  и  $\sigma$  полностью задают геометрию области, при этом имеют место соотношения:  $a \operatorname{sh} (\tau_2 - \tau_1) = e \operatorname{sh} \tau_1 \operatorname{sh} \tau_2$ ,  $a = r_i \operatorname{sh} \tau_i$ . В плоском случае аксиальная составляющая вектор-потенциала удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в бицилиндрических координатах имеет вид:

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} = 0 \quad (1.5)$$

Граничные условия записываются в виде соотношений

$$H_{\sigma_1}|_{\tau=\tau_2} = \frac{1}{\mu_0 \sqrt{g_{\tau\tau}}} \frac{\partial A}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_2} = j_2 \quad (1.6)$$

$$H_{\sigma_1}|_{\tau=\tau_1} = \frac{1}{\mu_0 \sqrt{g_{\tau\tau}}} \frac{\partial A}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_1} = -j_1$$

Здесь предполагается, что напряженность магнитного поля в стальных сердечниках статора и ротора равна нулю. Так как сердечник ротора шихтованный, то вихревые токи в нем не наводятся. Используя периодичность по координате  $\sigma$ , будем искать решение уравнения (1.5) в виде Фурье-разложения:

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} (A_{ks}(\tau) \sin(k\sigma) + A_{kc}(\tau) \cos(k\sigma)) \quad (1.7)$$

Метод разделения переменных приводит к следующему выражению для аксиальной

составляющей вектор-потенциала:

$$A = \mu_0 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\operatorname{ch} k(\tau - \tau_2)}{\operatorname{sh} k(\tau_2 - \tau_1)} (\Gamma_{sk}^{(1)} \sin k\sigma + \Gamma_{ck}^{(1)} \cos k\sigma) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\operatorname{ch} k(\tau - \tau_1)}{\operatorname{sh} k(\tau_2 - \tau_1)} (\Gamma_{sk}^{(2)} \sin k\sigma + \Gamma_{ck}^{(2)} \cos k\sigma) \right\} \quad (1.8)$$

где через  $\Gamma_{sk}^{(i)}$  и  $\Gamma_{ck}^{(i)}$  обозначены коэффициенты Фурье линейной плотности токов, преобразованной к бицилиндрическим координатам, т.е.

$$\Gamma_{sk}^{(i)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{aj_i(\sigma) \sin k\sigma}{\operatorname{ch} \tau_i - \cos \sigma} d\sigma, \quad \Gamma_{ck}^{(i)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{aj_i(\sigma) \cos k\sigma}{\operatorname{ch} \tau_i - \cos \sigma} d\sigma \quad (1.9)$$

Результирующие усилия и момент, действующие на смещенный ротор, рассматриваемый как твердое тело, можно найти путем дифференцирования выражения для энергии магнитного поля по обобщенным координатам, задающим положение ротора относительно статора. Энергия на единицу длины ротора в бицилиндрических координатах вычисляется по следующей формуле:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( A(\tau_1) j_1(\sigma) \sqrt{g_{\sigma\sigma}}(\tau_1) + A(\tau_2) j_2(\sigma) \sqrt{g_{\sigma\sigma}}(\tau_2) \right) d\sigma \quad (1.10)$$

Подстановка разложения для потенциала (1.8) приводит к соотношению

$$W = \frac{\mu_0 \pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} \frac{\operatorname{ch} k(\tau - \tau_2)}{\operatorname{sh} k(\tau_2 - \tau_1)} (\Gamma_{sk}^{(1)2} + \Gamma_{ck}^{(1)2}) + \frac{1}{k} \frac{\operatorname{ch} k(\tau - \tau_1)}{\operatorname{sh} k(\tau_2 - \tau_1)} (\Gamma_{sk}^{(2)2} + \Gamma_{ck}^{(2)2}) + \right. \\ \left. + \frac{2}{k \operatorname{sh} k(\tau_2 - \tau_1)} (\Gamma_{sk}^{(2)} \Gamma_{sk}^{(1)} + \Gamma_{ck}^{(2)} \Gamma_{ck}^{(1)}) \right) \quad (1.11)$$

Для вычисления  $\Gamma_{sk}^{(i)}$  и  $\Gamma_{ck}^{(i)}$  нужно задать распределение линейной плотности тока по окружностям токонесущих поверхностей ротора и статора. Заметим, что для удовлетворения граничным условиям (1.6), необходимо исключить постоянную составляющую в распределении тока на роторе. Указанное распределение задано формулами (1.2), (1.3). Перепишем их в следующем виде:

$$j_i = I_{i1} \sin(\varphi_i - \psi_{i1}) + I_{i2} \sin 2(\varphi_i - \psi_{i2}) \quad (1.12)$$

где  $\psi_{2n} = \psi - \varphi + \alpha_{2n}$ ,  $\psi_{1n} = -\varphi + \frac{1}{2} \alpha_{1n}$ ,  $\alpha_{in} = \operatorname{arctg}(J_{nc}^{(i)} / J_{ns}^{(i)})$ ,  $I_{ij} = \sqrt{J_{js}^{(i)2} + J_{jc}^{(i)2}}$ . Индекс  $n = 1, 2$  отвечает номеру гармоники, а индекс  $i = 1, 2$  — статору или ротору, соответственно.

В бицилиндрических координатах выражение для линейной плотности тока записывается в виде

$$j_i(\sigma) = I_{i1} \left( \frac{\operatorname{sh} \tau_i \sin \sigma}{\operatorname{ch} \tau_i - \cos \sigma} \cos \psi_{i1} - \frac{\cos \sigma \operatorname{ch} \tau_i - 1}{\operatorname{ch} \tau_i - \cos \sigma} \sin \psi_{i1} \right) + \\ + I_{i2} \left( \frac{2 \operatorname{sh} \tau_i \sin \sigma (\cos \sigma \operatorname{ch} \tau_i - 1)}{(\operatorname{ch} \tau_i - \cos \sigma)^2} \cos 2\psi_{i2} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{sh}^2 \tau_i \sin^2 \sigma - (\cos \sigma \operatorname{ch} \tau_i - 1)^2}{(\operatorname{ch} \tau_i - \cos \sigma)^2} \sin 2\psi_{i2} \right) \quad (i = 1, 2) \quad (1.13)$$

В распределении тока на статоре будем задавать одну гармонику, поэтому  $I_{12} = 0$ . С учетом (1.13) интегралы (1.9) вычисляются аналитически

$$\begin{aligned} \Gamma_{sk}^{(i)} &= \frac{I_{11} r_i}{2\pi} \operatorname{sh}^2 \tau_i (S_{k-1,i} - S_{k+1,i}) \cos \psi_{i1} + \\ &+ \frac{I_{12} a}{\pi} \operatorname{sh} \tau_i \left( \frac{\operatorname{ch} \tau_i}{2} (C_{k-2,i} - C_{k+2,i}) - (C_{k-1,i} - C_{k+1,i}) \right) \cos 2\psi_{i2} \\ \Gamma_{ck}^{(i)} &= -\frac{I_{11} r_i}{2\pi} \operatorname{sh} \tau_i (\operatorname{ch} \tau_i (S_{k-1,i} + S_{k+1,i}) - 2 \operatorname{sh} \tau_i S_{k,i}) \sin \psi_{i1} + \\ &+ \frac{I_{12} a}{\pi} \left( -U_{k,i} + \operatorname{sh}^2 \tau_i \left( C_{k,i} - \frac{1}{2} (C_{k+2,i} + C_{k-2,i}) \right) \right) \sin 2\psi_{i2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} U_{k,i} &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos k\sigma}{(\operatorname{ch} \tau_i - \cos \sigma)} d\sigma = \frac{2\pi e^{-k\tau_i}}{\operatorname{sh} \tau_i} \\ S_{k,i} &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos k\sigma}{(\operatorname{ch} \tau_i - \cos \sigma)^2} d\sigma = \frac{2\pi e^{-k\tau_i}}{\operatorname{sh}^2 \tau_i} (k + \operatorname{cth} \tau_i) \\ C_{k,i} &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos k\sigma}{(\operatorname{ch} \tau_i - \cos \sigma)^3} d\sigma = \frac{\pi e^{-k\tau_i}}{\operatorname{sh}^3 \tau_i} (k^2 - 1 + 3k \operatorname{cth} \tau_i + 3 \operatorname{cth}^2 \tau_i) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Итак, окончательно получим следующие выражения для  $\Gamma_{sk}^{(i)}$ ,  $\Gamma_{ck}^{(i)}$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{sk}^{(i)} &= 2ae^{-k\tau_i} (I_{11} k \cos \psi_{i1} + I_{12} (k^2 \operatorname{sh} \tau_i - k \operatorname{ch} \tau_i) \sin 2\psi_{i2}) \\ \Gamma_{ck}^{(i)} &= 2ae^{-k\tau_i} (I_{11} k \sin \psi_{i1} + I_{12} (k^2 \operatorname{sh} \tau_i - k \operatorname{ch} \tau_i) \sin 2\psi_{i2}) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Подставляя (1.16) в (1.11) и учитывая малость величины воздушного зазора (т.е. полагая, что  $\tau_1 - \tau_2$  мало), получаем выражение для энергии

$$\begin{aligned} W &= \frac{2\mu_0 \pi a^2}{(\tau_2 - \tau_1)} \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-2k\tau_1} I_{11}^2 + 2e^{-k(\tau_2 + \tau_1)} I_{21} I_{11} \cos(\psi_{21} - \psi_{11}) + \\ &+ 2e^{-k(\tau_2 + \tau_1)} (k \operatorname{sh} \tau_2 - \operatorname{ch} \tau_2) I_{22} I_{11} \cos(2\psi_{22} - \psi_{11}) + \\ &+ e^{-2k\tau_2} (k \operatorname{sh} \tau_2 - \operatorname{ch} \tau_2)^2 I_{22}^2 + e^{-2k\tau_2} I_{21}^2 + \\ &+ 2e^{-2k\tau_2} (k \operatorname{sh} \tau_2 - \operatorname{ch} \tau_2) I_{22} I_{21} \cos(\psi_{21} - 2\psi_{22})) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Для удобства дальнейших вычислений предварительно введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L_1 &= 2\mu_0 \pi \frac{a^2}{(\tau_2 - \tau_1)} \frac{e^{-\frac{-(\tau_1 + \tau_2)}{2}}}{\operatorname{sh}(\tau_1 + \tau_2)/2}, \quad L_2 = 2\mu_0 \pi \frac{a^2}{(\tau_2 - \tau_1)} \frac{e^{-\tau_2}}{\operatorname{sh} \tau_2} \\ L_3 &= -2\mu_0 \pi \frac{a^2}{(\tau_2 - \tau_1)} \frac{e^{-2\tau_2}}{2 \operatorname{sh} \tau_2}, \quad L_4 = 2\mu_0 \pi \frac{a^2}{(\tau_2 - \tau_1)} \frac{e^{-(\tau_1 + \tau_2)} \operatorname{ch} \tau_2 - e^{-\tau_2}}{2 \operatorname{sh}^2(\tau_1 + \tau_2)/2} \\ L_5 &= 2\mu_0 \pi \frac{a^2}{(\tau_2 - \tau_1)} \frac{e^{-2\tau_2}}{2} \operatorname{cth} \tau_2, \quad L_6 = 2\mu_0 \pi \frac{a^2}{(\tau_2 - \tau_1)} \frac{e^{-\tau_1}}{\operatorname{sh} \tau_1} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Величины  $L_1, \dots, L_6$  являются множителями в выражениях для коэффициентов само- и взаимной индукции токов ротора и статора.

Просуммировав ряды и перейдя к обобщенным координатам, можно записать окончательное выражение для энергии магнитного поля на единицу длины ротора:

$$\begin{aligned}
 W = & L_1[(J_{1s}^{(2)} J_{1s}^{(1)} + J_{1c}^{(2)} J_{1c}^{(1)}) \cos \psi + (J_{1c}^{(2)} J_{1s}^{(1)} - J_{1s}^{(2)} J_{1c}^{(1)}) \sin \psi] + \\
 & + \frac{1}{2} L_6 (J_{1s}^{(1)2} + J_{1c}^{(1)2}) + \frac{1}{2} L_5 (J_{2s}^{(2)2} + J_{2c}^{(2)2}) + \frac{1}{2} L_2 (J_{1s}^{(2)2} + J_{1c}^{(2)2}) + \\
 & + L_3 [(J_{2s}^{(2)} J_{1s}^{(2)} + J_{2c}^{(2)} J_{1c}^{(2)}) \cos(\psi - \varphi) + (J_{2c}^{(2)} J_{1s}^{(2)} - J_{2s}^{(2)} J_{1c}^{(2)}) \sin(\psi - \varphi)] + \\
 & + L_4 [(J_{2c}^{(2)} J_{1s}^{(1)} + J_{2s}^{(2)} J_{1s}^{(1)}) \cos(2\psi - \varphi) + (J_{2c}^{(2)} J_{1s}^{(1)} - J_{2s}^{(2)} J_{1c}^{(1)}) \sin(2\psi - \varphi)]
 \end{aligned} \quad (1.19)$$

В выражениях для коэффициентов  $L_n$  ( $n = 1, \dots, 6$ ) перейдем к безразмерному эксцентриситету  $\rho = e/\Delta$  (где  $\Delta$  – величина воздушного зазора между ротором и статором в концентрическом случае). Введем безразмерные величины  $l_n = L_n \Delta / 2\mu_0 \pi r^3$ . Графики зависимостей  $l_1, \dots, l_6$  от безразмерного эксцентриситета  $\rho$  приведены на фиг. 2.

Далее выпишем выражения для электродинамических усилий:  $P_\rho = \partial W / \partial \rho$  – радиальная составляющая электродинамического усилия, направленная по линии минимального зазора в сторону смещения ротора (сила магнитного тяжения),  $P_\varphi = (1/e) \partial W / \partial \varphi$  – тангенциальная составляющая электродинамического усилия перпендикулярная  $P_\rho$ ,  $M = \partial W / \partial \psi$  – вращающий момент.

Из графиков на фиг. 2 видно, что при  $\rho = 0$  коэффициенты  $l_3$  и  $l_1$  обращаются в ноль также как радиальная и тангенциальная составляющие электродинамического усилия. В этом случае на ротор действует только вращающий момент.

Из формулы для энергии (1.19) следует, что при учете только одной гармоники в формуле для распределения плотности тока по окружности обмотки ротора (1.3), тангенциальная составляющая усилия равна нулю, так как она получается посредством взаимодействия первой гармоники статора и второй ротора, а так же первой и второй гармоник ротора.

**2. Уравнения Лагранжа – Максвелла асинхронного двигателя.** Будем рассматривать колебания ферромагнитного ротора на изотропных упругодемпферных опорах, под действием электромагнитных сил.

Запишем выражение для энергии электромагнитного поля  $W$  (см. (1.19)) в общем виде:

$$W = \frac{1}{2} i^T L(q) i + J^T M(q) i, \quad i = (i_{1s}^{(2)}, i_{1c}^{(2)}, i_{2s}^{(2)}, i_{2c}^{(2)})^T \quad (2.1)$$

$$L = \begin{vmatrix} l_2 & 0 & l_3 \cos(\psi - \varphi) & l_3 \sin(\psi - \varphi) \\ 0 & l_2 & -l_3 \sin(\psi - \varphi) & l_3 \cos(\psi - \varphi) \\ l_3 \cos(\psi - \varphi) & -l_3 \sin(\psi - \varphi) & l_5 & 0 \\ l_3 \sin(\psi - \varphi) & l_3 \cos(\psi - \varphi) & 0 & l_5 \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} l_1 \cos \psi & l_1 \sin \psi & l_4 \cos(2\psi - \varphi) & l_4 \sin(2\psi - \varphi) \\ -l_1 \sin \psi & l_1 \cos \psi & -l_4 \sin(2\psi - \varphi) & l_4 \cos(2\psi - \varphi) \end{vmatrix}$$

где  $i$  – столбец квазитокков, являющихся коэффициентами ряда Фурье в выражении для распределения тока по окружности обмотки ротора,  $q$  – столбец обобщенных координат,  $q = (\psi, x, y)^T$ ,  $L$  – матрица коэффициентов само- и взаимоиндукции токов  $i$ ,  $M$  – матрица коэффициентов взаимоиндукции токов  $i$  и  $J$ .

В рассматриваемой математической модели асинхронного двигателя будем считать ток статора  $J(t)$  заданным и ограничимся одной гармоникой в ряде Фурье для него.

$$J(t) = (J_{1s}^{(1)}, J_{1c}^{(1)})^T = \bar{I} (\cos \tau, -\sin \tau)^T, \quad \bar{I} = 2\pi r I \quad (2.2)$$

Начало неподвижной системы координат  $(x, y)$  совместим с геометрическим центром статора (точка  $O$  на фиг. 1). Ось  $y$  совпадает с осью фазы  $a$ . В этом случае потенциальная и кинетическая энергия имеют вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} q^T C q, \quad T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} \quad (2.3)$$

$$A = \text{diag}(J, m, m), \quad C = \text{diag}(0, c, c)$$

Здесь  $A$  и  $C$  – матрицы инерционных и упругих коэффициентов,  $m$  – масса ротора,  $J$  – момент инерции ротора,  $c = c_x = c_y$  – жесткости опор в направлении осей  $x$  и  $y$ , соответственно.

Введем также в рассмотрение диссипативные механическую и электрическую функции:

$$\Psi_m = \frac{1}{2} \dot{q}^T B \dot{q}, \quad \Psi_e = \frac{1}{2} i^T R i \quad (2.4)$$

$$B = \text{diag}(0, b, b), \quad R = \text{diag}(R_1, R_1, R_2, R_2)$$

где  $R_1, R_2$  – сопротивления ротора по первой и второй гармонике тока соответственно,  $b$  – коэффициент вязкого трения.

Уравнения Лагранжа – Максвелла рассматриваемой электромеханической системы запишутся в следующем виде:

$$(Li + M^T J) + Ri = 0$$

$$A \ddot{q} - \frac{1}{2} i^T \frac{\partial L}{\partial q} i - J^T \frac{\partial M}{\partial q} i + B \dot{q} + C q = 0 \quad (2.5)$$

Перепишем эти уравнения в потокосцеплениях

$$\Psi = \partial W / \partial i = Li + M^T J$$

где  $\Psi = (\Psi_{1s}, \Psi_{1c}, \Psi_{2s}, \Psi_{2c})^T$  – столбец потокосцеплений, соответствующий ротору, индексы 1 и 2 соответствуют номеру гармоники в разложении Фурье.

Тогда  $i = L^{-1}(\Psi - M^T J)$  и уравнения Лагранжа – Максвелла примут следующий вид:

$$A \ddot{q} + \frac{1}{2} J^T \frac{\partial L^{-1}}{\partial q} \Psi - J^T \frac{\partial M L^{-1}}{\partial q} \Psi + \frac{1}{2} J^T \frac{\partial M L^{-1} M^T}{\partial q} J + B \dot{q} + C q = 0$$

$$\Psi + R L^{-1}(\Psi - M^T J) = 0 \quad (2.6)$$

В этих уравнениях токи играют роль квазициклических скоростей, потокосцепления – квазициклических импульсов, механические координаты  $q$  являются позиционными координатами. Пондеромоторные силы  $\partial W / \partial q$  вызывают вращение и колебания ротора. С помощью метода усреднения будем исследовать их влияние на устойчивость стационарных вращений.

Приведем выражение для матриц, входящих в уравнения (2.6):

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & -\chi \cos(\psi - \varphi) & -\chi \sin(\psi - \varphi) \\ 0 & 1/\sigma_1 & \chi \sin(\psi - \varphi) & -\chi \cos(\psi - \varphi) \\ -\chi \cos(\psi - \varphi) & \chi \sin(\psi - \varphi) & 1/\sigma_2 & 0 \\ -\chi \sin(\psi - \varphi) & -\chi \cos(\psi - \varphi) & 0 & 1/\sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sigma_1} = \frac{l_5}{l_2 l_5 - l_3^2}, \quad \frac{1}{\sigma_2} = \frac{l_2}{l_2 l_5 - l_3^2}, \quad \chi = \frac{l_3}{l_2 l_5 - l_3^2}$$

Введем следующие обозначения:  $G_1 = l_1/\sigma_1 - \chi l_4$ ,  $G_2 = l_4/\sigma_2 - \chi l_1$ . Приближенно

$G_1 = 1, G_2 = \Delta\rho/r, \chi = -2\rho$ : Тогда

$$ML^{-1} = \begin{vmatrix} G_1 \cos \psi & G_1 \sin \psi & G_2 \cos(2\psi - \varphi) & G_2 \sin(2\psi - \varphi) \\ -G_1 \sin \psi & G_1 \cos \psi & -G_2 \sin(2\psi - \varphi) & G_2 \cos(2\psi - \varphi) \end{vmatrix}$$

$$L^{-1}M^T J = I \begin{vmatrix} G_1 \cos \delta & G_1 \sin \delta & G_2 \cos(\psi - \varphi + \delta) & G_2 \sin(\psi - \varphi + \delta) \end{vmatrix}^T$$

$$\delta = \psi - \tau, \quad ML^{-1}M^T = \begin{pmatrix} G_1 l_1 + G_2 l_4 & 0 \\ 0 & G_1 l_1 + G_2 l_4 \end{pmatrix}$$

В соответствии с приведенными выше формулами, система уравнений (2.6) принимает вид

$$\dot{\Psi}_{1s} + R_1(\sigma_1^{-1}\Psi_{1s} - \chi \cos(\psi - \varphi)\Psi_{2s} - \chi \sin(\psi - \varphi)\Psi_{2c}) = IR_1 G_1 \cos \delta$$

$$\dot{\Psi}_{1c} + R_1(\sigma_1^{-1}\Psi_{1c} + \chi \sin(\psi - \varphi)\Psi_{2s} - \chi \cos(\psi - \varphi)\Psi_{2c}) = IR_1 G_1 \sin \delta$$

$$\dot{\Psi}_{2s} + R_2(\sigma_2^{-1}\Psi_{2s} - \chi \cos(\psi - \varphi)\Psi_{1s} + \chi \sin(\psi - \varphi)\Psi_{1c}) = IR_2 G_2 \cos(\psi - \varphi + \delta)$$

$$\dot{\Psi}_{2c} + R_2(\sigma_2^{-1}\Psi_{2c} - \chi \sin(\psi - \varphi)\Psi_{1s} - \chi \cos(\psi - \varphi)\Psi_{1c}) = IR_2 G_2 \sin(\psi - \varphi + \delta)$$

$$J\dot{\omega} + \frac{1}{2}\Psi^T \frac{\partial L^{-1}}{\partial \psi} \Psi - J^T \frac{\partial ML^{-1}}{\partial \psi} \Psi + \frac{1}{2}J^T \frac{\partial ML^{-1}M^T}{\partial \psi} J = -M_c$$

$$\dot{\psi} = \omega, \quad \dot{t} = 1.$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \hat{\lambda}^2 x = \frac{1}{m} \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2n\dot{y} + \hat{\lambda}^2 y = \frac{1}{m} \frac{\partial W}{\partial y} \quad (2.7)$$

В уравнении вращения ротора (пятое уравнение системы (2.7))  $M_c$  – момент нагрузки, а выделенная часть имеет смысл электромагнитного момента с обратным знаком,  $\hat{\lambda} = \sqrt{c/m}$  – частота свободных поперечных колебаний ротора. Заметим, что

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{1}{\rho \Delta} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \cos \varphi = P_\rho \sin \varphi + P_\varphi \cos \varphi \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{1}{\rho \Delta} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \sin \varphi = P_\rho \cos \varphi - P_\varphi \sin \varphi$$

**3. Обезразмеривание уравнений и выделение малого параметра.** Введем малый параметр:

$$\varepsilon = \frac{L_* I_*^2}{J \omega_0^2} = \frac{T}{T_m}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad T_m = \frac{2\pi J \omega_0}{L_* I_*^2}$$

где  $T$  – период напряжений в сети, а  $T_m$  – механическая постоянная времени (т.е. время, за которое ротор выходит на номинальную угловую скорость, определяемую моментом нагрузки).

Введем также  $v_i = R_i / \omega_0 L_* = T / T_i$ , где  $T_i = 2\pi L_* / R_i$ ,  $i = 1, 2$  – постоянная времени соответствующего электрического "контура". Тогда  $L_* I_*^2 / m \Delta^2 \omega_0^2 = \varepsilon r^2 / 2 \Delta^2$ . Предполагается, что  $v_i^3 r^2 / \Delta^2 \sim 1$ ,  $v_i / \sigma_i \sim 1$ . Здесь  $L_*$ ,  $I_*$  – характерные значения индуктивности и тока. Примем  $I_* = \bar{I}$  и  $L_* = \mu_0 r l / 2\pi \Delta$ , где  $r = 1/2(r_1 + r_2)$ ,  $l$  – длина активной части ротора.

Перейдем во всех уравнениях системы к безразмерному времени  $\tau = \omega_0 t$  и безразмерным переменным  $\Psi, I, \sigma_i, \chi$ , равным отношению размерных величин к их харак-



терным значениям. Введем так же безразмерные  $\tilde{y} \equiv y/\Delta$ ,  $\tilde{x} \equiv x/\Delta$ ,  $\lambda \equiv \tilde{\lambda}/\omega_0$ ,  $\tilde{\omega} \equiv \omega/\omega_0$  и сделаем замену переменных:  $s = \tilde{\omega} - 1$ ,  $\delta = \psi - \tau$ . Физически  $s$  соответствует скольжению (так как  $s = (\omega - \omega_0)/\omega_0$ ),  $\delta$  - имеет смысл рассогласования углов вращения ротора и вращающегося поля статора.

Система уравнений (2.7) в безразмерных переменных имеет вид

$$\dot{\Psi}_{1s} + v_1(\sigma_1^{-1}\Psi_{1s} - \chi \cos(\psi - \varphi)\Psi_{2s} - \chi \sin(\psi - \varphi)\Psi_{3c}) = v_1 G_1 \cos \delta \quad (3.1)$$

$$\dot{\Psi}_{1c} + v_1(\sigma_1^{-1}\Psi_{1c} + \chi \sin(\psi - \varphi)\Psi_{2s} - \chi \cos(\psi - \varphi)\Psi_{2c}) = v_1 G_1 \sin \delta$$

$$\dot{\Psi}_{2s} + v_2(\sigma_2^{-1}\Psi_{2s} - \chi \cos(\psi - \varphi)\Psi_{1s} + \chi \sin(\psi - \varphi)\Psi_{1c}) = v_2 G_2 \cos(\psi - \varphi + \delta)$$

$$\dot{\Psi}_{2c} + v_2(\sigma_2^{-1}\Psi_{2c} - \chi \sin(\psi - \varphi)\Psi_{1s} - \chi \cos(\psi - \varphi)\Psi_{1c}) = v_2 G_2 \cos(\psi - \varphi + \delta)$$

$$\dot{s} = \varepsilon \left( - \left( \frac{1}{2} \Psi^T \frac{\partial L^{-1}}{\partial \psi} \Psi - J^T \frac{\partial M L^{-1}}{\partial \psi} \Psi + \frac{1}{2} J^T \frac{\partial M L^{-1} M^T}{\partial \psi} J \right) - m_c \right)$$

$$\dot{\delta} = s$$

$$\ddot{\tilde{x}} + 2n\varepsilon\dot{\tilde{x}} + \lambda^2\tilde{x} = \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \tilde{x}}, \quad \ddot{\tilde{y}} + 2n\varepsilon\dot{\tilde{y}} + \lambda^2\tilde{y} = \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \tilde{y}}$$

где  $\varepsilon m_c = M_c/J\omega_0$  - безразмерный момент нагрузки.

Здесь, силы и момент выражаются через потокосцепления следующим образом:

$$\begin{aligned} P_\varphi &= \frac{1}{\rho\Delta} \frac{\partial W}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2} \Psi^T \frac{\partial L^{-1}}{\partial \varphi} \Psi - J^T \frac{\partial M L^{-1}}{\partial \varphi} \Psi + \frac{1}{2} J^T \frac{\partial M L^{-1} M^T}{\partial \varphi} J \\ P_\rho &= \frac{\partial W}{\partial \rho} = -\frac{1}{2} \Psi^T \frac{\partial L^{-1}}{\partial \rho} \Psi - J^T \frac{\partial M L^{-1}}{\partial \rho} \Psi + \frac{1}{2} J^T \frac{\partial M L^{-1} M^T}{\partial \rho} J \\ M &= \frac{\partial W}{\partial \psi} = -\frac{1}{2} \Psi^T \frac{\partial L^{-1}}{\partial \psi} \Psi - J^T \frac{\partial M L^{-1}}{\partial \psi} \Psi + \frac{1}{2} J^T \frac{\partial M L^{-1} M^T}{\partial \psi} J \end{aligned} \quad (3.2)$$

Используя метод усреднения [4] для определения медленных движений, найдем частные решения быстрой подсистемы (первые четыре уравнения системы (3.1), считая медленные переменные  $s$  и  $\rho$  постоянными "параметрами". Заметим также, что выделенными слагаемыми в уравнениях быстрой подсистемы в (2.7) можно пренебречь, так как предполагается рассматривать только малые колебания.

Выпишем выражения, определяющие потокосцепления в стационарном режиме:

$$\Psi_{1s} = \frac{G_1 r_1 v_1}{(s^2 + r_1^2)} \cos \delta + \frac{G_1 v_1 s}{(s^2 + r_1^2)} \sin \delta \quad (3.3)$$

$$\Psi_{1c} = -\frac{G_1 s v_1}{(s^2 + r_1^2)} \cos \delta + \frac{G_1 v_1 r_1}{(s^2 + r_1^2)} \sin \delta$$

$$r_i = v_i/\sigma_i \quad (i = 1, 2), \quad a = \frac{G_1 r_1 v_1}{(s^2 + r_1^2)}, \quad p = \frac{G_1 v_1 s}{(s^2 + r_1^2)}, \quad D = v_2 G_2 + v_2 a \chi$$

$$d_1 = \frac{(D r_2 - \chi v_2 p (2s + 1 - \lambda))}{((2s + 1 - \lambda)^2 + r_2^2)}, \quad d_2 = \frac{(D(2s + 1 - \lambda) + v_2 \chi p r_2)}{((2s + 1 - \lambda)^2 + r_2^2)}$$

$$\Psi_{2s} = d_1 \cos(\psi - \varphi + \delta) + d_2 \sin(\psi - \varphi + \delta) \quad (3.4)$$

$$\Psi_{2c} = d_1 \sin(\psi - \varphi + \delta) + d_2 \cos(\psi - \varphi + \delta)$$

Подставив эти частные решения в формулы (3.2), получим выражения для сил и момента в стационарном режиме

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_\phi &= \frac{2\pi P_\phi}{lr\mu_0 I^2} = \frac{r^2}{\Delta^2 \rho} \left( \frac{2\chi G_1 G_2 v_1 v_2}{(s^2 + r_1^2)((2s+1-\lambda)^2 + r_2^2)} r_1(2s+1-\lambda) + \right. \\
 &+ \frac{\chi^2 G_1^2 (2s+1-\lambda) v_1^2 v_2}{(s^2 + r_1^2)((2s+1-\lambda)^2 + r_2^2)} + \frac{G_2^2 v_2 (2s+1-\lambda)}{((2s+1-\lambda)^2 + r_2^2)} \\
 \tilde{M} &= \frac{2\pi M \Delta}{lr^3 \mu_0 I^2} = - \frac{\chi G_1 G_2 v_1 v_2}{(s^2 + r_1^2)((2s+1-\lambda)^2 + r_2^2)} (3r_1(2s+1-\lambda) + sr_2) - \\
 &- \frac{\chi^2 G_1^2 (2s+1-\lambda) v_1^2 v_2}{(s^2 + r_1^2)((2s+1-\lambda)^2 + r_2^2)} - 2 \frac{G_2^2 v_2 (2s+1-\lambda)}{((2s+1-\lambda)^2 + r_2^2)} - \frac{G_1 v_1 s}{(s^2 + r_1^2)} \\
 \tilde{P}_\rho &= \frac{2\pi P_\rho}{lr\mu_0 I^2} = \frac{r^2}{\Delta^2} \left( (\chi)_\rho' (pd_2 + ad_1) - \left( \frac{1}{\sigma_2} \right)_\rho' (d_1^2 + d_2^2) + G_{2\rho}' d_1 \right)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Величины  $P_\phi$ ,  $P_\rho$ ,  $M$  оказываются функциями только от  $s$  и  $\rho$  и не зависят от  $\tau$ .

Сила магнитного тяжения  $P_\rho$ , приложенная к центру масс ротора, направлена по линии наименьшего зазора в сторону смещения центра обмотки возбуждения. Тангенциальная сила  $P_\phi$  перпендикулярна силе магнитного тяжения (см. фиг. 1).

На фиг. 3 показаны частотные характеристики безразмерных сил и момента при постоянном значении эксцентриситета и скольжения. Видно, что при частоте прецессии близкой к частоте сети тангенциальная сила обращается в ноль, а радиальная принимает максимальное значение. Момент при небольших  $\rho$  слабо зависит от  $\lambda$ , однако с увеличением эксцентриситета зависимость становится существенной.

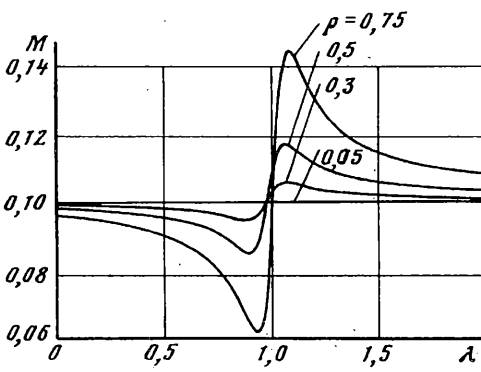
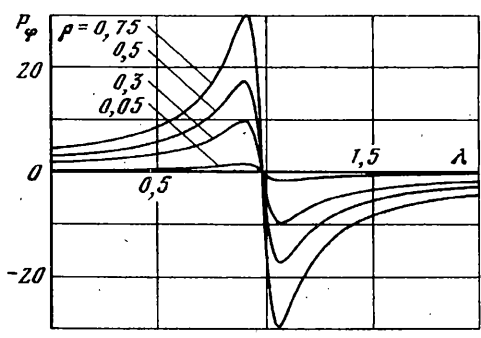
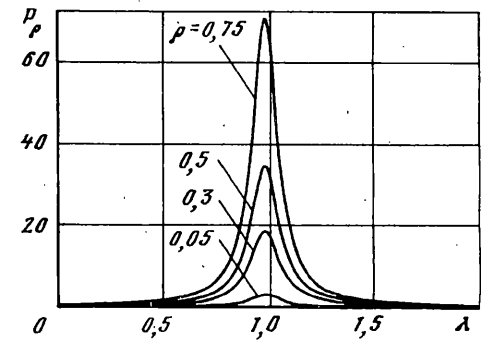
На фиг. 4 приведены зависимости безразмерных сил и момента от эксцентриситета при постоянном скольжении. Момент при небольших значениях эксцентриситета можно считать постоянным, зависящим только от  $s$ . Тормозящий момент, создаваемый тангенциальной силой, несуществен по сравнению с вращающим моментом. Это объясняется тем, что при малых  $\rho$  вращающий момент практически не зависит от  $\rho$ , а добавочный тормозящий момент имеет порядок  $\rho^2$ . Однако при  $\lambda$  близких к  $\omega_0$ , влияние тормозящего момента становится заметным при увеличении  $\rho$ .

Заметим, что характер зависимостей, показанных на фиг. 3 и фиг. 4 совпадает с характером соответствующих зависимостей для проводящего ротора синхронной неявнополюсной машины, приведенных в [5], а также качественно соответствует результатам статьи [6], в которой вычисляются электродинамические усилия, действующие на проводящий ротор в асимметричном поле магнитного подшипника.

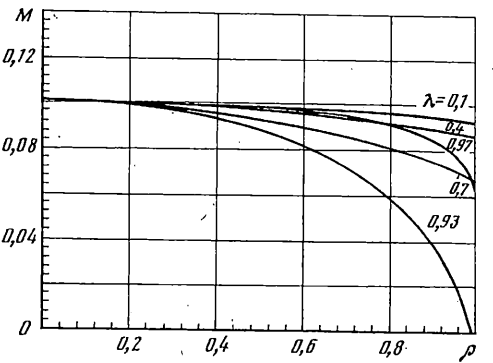
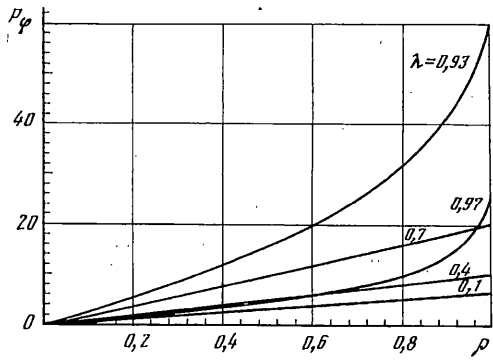
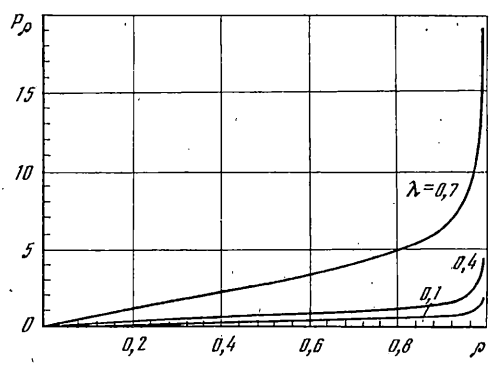
На фиг. 5 приведены зависимости электромагнитных усилий от скольжения. В соответствии с вышесказанным момент сохраняет вид характерный для асинхронных двигателей, а радиальная и тангенциальная силы быстро убывают с ростом скольжения.

Для получения соотношений, определяющих значения  $s$ ,  $\rho$ ,  $\phi$  в стационарных режимах, перейдем от обобщенных координат  $(x, y)$ , задающих положение центра масс ротора, к полярным координатам  $(\rho, \phi)$ , сделав замену переменных  $x = \rho \sin \phi$  и  $y = \rho \cos \phi$ . Тогда уравнения движения ротора запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \dot{s} &= \varepsilon(\tilde{M} - 1) \\
 \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 + 2n\varepsilon \dot{\rho} + \lambda^2 \rho &= \varepsilon_1 \tilde{P}_\rho \\
 \rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi} + 2n\varepsilon \rho \dot{\phi} &= \varepsilon_1 P_\phi
 \end{aligned} \tag{3.6}$$



Фиг. 3

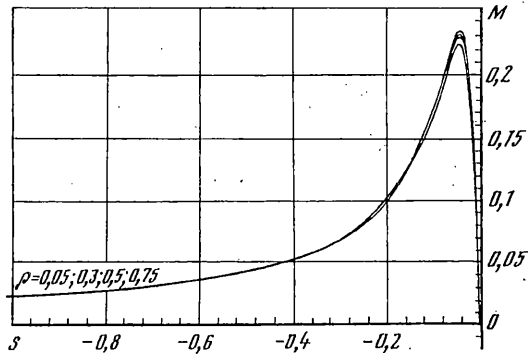
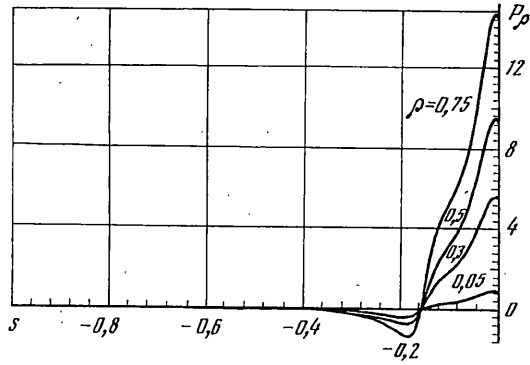
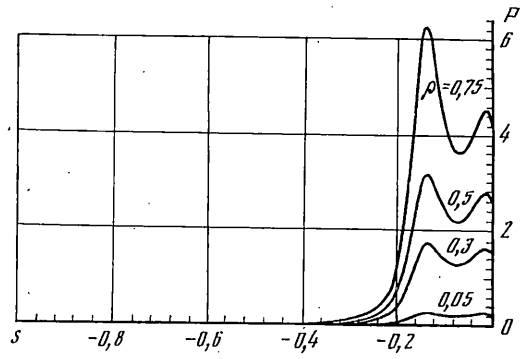


Фиг. 4

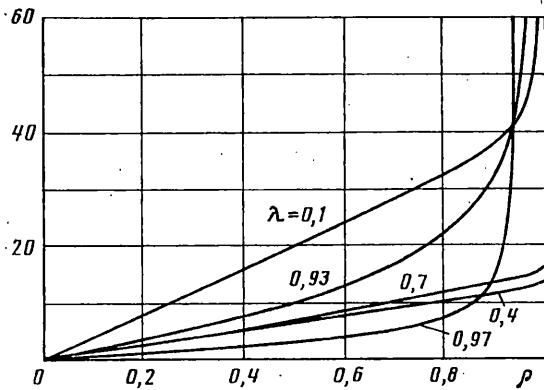
Выражения для сил  $\tilde{P}_\phi$ ,  $\tilde{P}_\rho$  и момента  $\tilde{M}$ , соответствующие стационарным режимам, определяются по формулам (3.5). Стационарные режимы определяются следующими соотношениями:

$$\tilde{M}(s, \rho) = 1, \quad n\rho = \frac{\tilde{P}_\phi(s, \rho)}{2\sqrt{\lambda^2 - \varepsilon_1 \tilde{P}_\rho(s, \rho) / \rho}} \quad (3.7)$$

Зависимость правой части второго уравнения системы (3.7) от эксцентриситета при различных значениях частоты прецессии  $\lambda$  и фиксированном  $s$ , приведена на фиг. 6.



Фиг. 5



Фиг. 6

Из этого рисунка видно, что возможны два стационарных режима:

$$1) \rho = 0, \quad \dot{\phi}_0 = \sqrt{\lambda^2 - \varepsilon_1 C_p(s_0)}, \quad C_p = (\partial P_p / \partial \rho)_{\rho=0}$$

$$2) \rho = \rho_*, \quad \dot{\phi}_* = \sqrt{\lambda^2 - \varepsilon_1 \tilde{P}_p(\rho_*, s_*)} / \rho_*$$

Первый стационарный режим  $\rho = 0$  соответствует концентрическому положению ротора в расточке статора и существует при любом значении коэффициента трения. В этом случае радиальные и тангенциальные усилия, а так же тормозящий момент равны нулю. Второй режим (при  $\rho = \rho_*$ ) отвечает периодическому движению и существует только при  $n > K_\phi / \sqrt{\lambda^2 - \varepsilon_1 C_p}$  и  $\lambda$ , близких к  $\omega_0$ , так как только такие значения  $\lambda$  соответствуют нелинейным зависимостям  $P_\phi$  от  $\rho$  (см. фиг. 4). Тангенциальная составляющая электродинамического усилия при этом принимает положительные значения, т.е. частота прецессии должна быть меньше частоты сети.

**4. Устойчивость центрального положения ротора.** Уравнения колебаний ротора квазилинейны, следовательно  $\rho$  можно считать медленной переменной и для исследования устойчивости воспользоваться формулами для сил и момента (3.5) ( $\tilde{P}_\phi, \tilde{P}_p$  и  $\tilde{M}$  не зависят явно от времени и не требуют усреднения). Таким образом устойчивость можно исследовать по уравнениям (3.6). Численные результаты, приведенные в последнем разделе этой работы, подтверждают предположение о медленности  $\rho$ . Из фиг. 7 видно, что зависимость  $\rho$  от  $\tau$  складывается из плавно меняющейся эволюции и быстрой осцилляции.

Найдем границу устойчивости первого стационарного режима  $\rho = 0$ . Из выражения для момента (см. (3.5)) следует, что зависимость  $\tilde{M}(s, \rho)$  при небольших  $\rho$  представима в виде  $\tilde{M}(s, \rho) = m_0(s) + m_1(s, \lambda)\rho^2$ , где  $m_0(s)$  – крутящий момент, а  $m_1(s, \lambda)\rho^2$  – добавочный тормозящий момент. Т.е. при малых значениях эксцентриситета тормозящий момент можно не учитывать. Тогда уравнение вращения в (3.6) отделяется. Значение скольжения  $s_0$ , соответствующее стационарному режиму, находится из уравнения  $m_0(s) = 1$ , а его устойчивость определяется соотношением  $(\partial m_0 / \partial s)_{s=s_0} < 0$ . Учитывая, что  $\partial \tilde{P}_\phi / \partial s|_0 = 0$  и  $\partial \tilde{P}_p / \partial s|_0 = 0$  (см. (3.5)) выпишем уравнения в вариациях, соответствующие системе (3.6), считая  $s$  параметром

$$\delta_p \ddot{\rho} + 2n\varepsilon_1 \delta_p \dot{\rho} = 0 \tag{4.1}$$

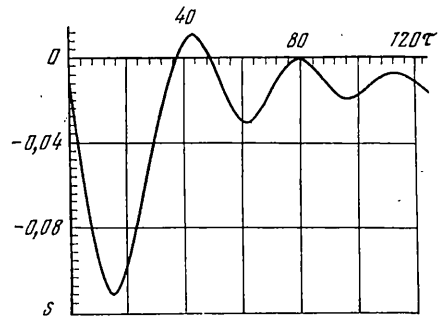
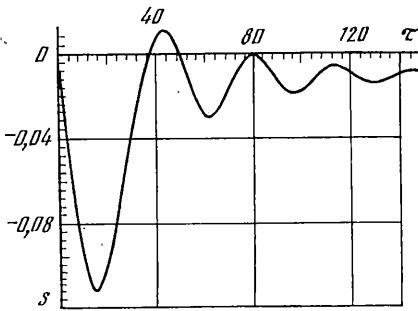
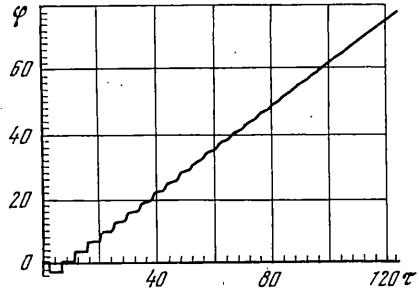
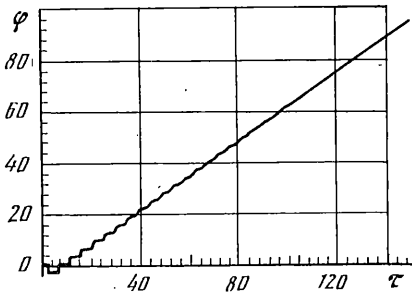
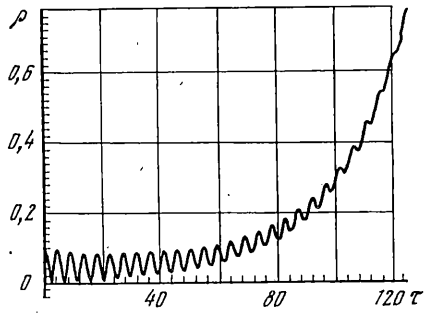
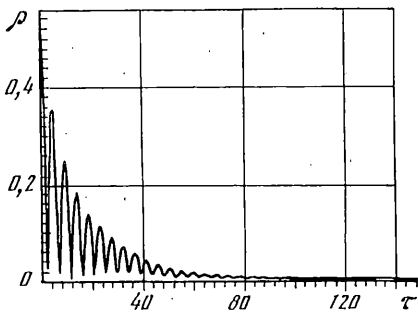
$$2\dot{\phi}_0 \delta_p \dot{\rho} + (2n\varepsilon_1 \dot{\phi}_0 - \varepsilon K_\phi) \delta_p \rho = 0, \quad K_\phi = (\partial \tilde{P}_\phi / \partial \rho)_{\rho=0}$$

Согласно критерию Стодолы, условие устойчивости имеет вид

$$\dot{\phi}_0 > 0, \quad \lambda^2 - \varepsilon_1 C_p(s) > 0, \quad n > \frac{1}{2} K_\phi / 2\dot{\phi}_0$$

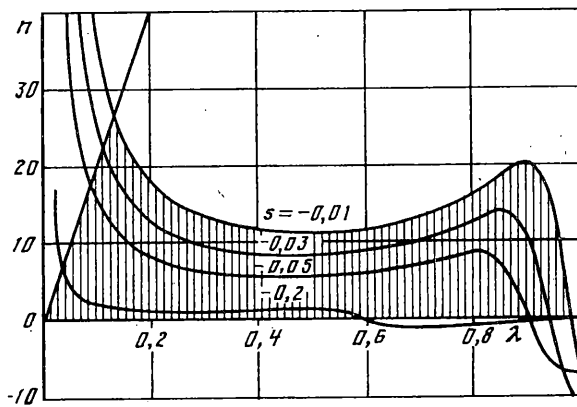
Области устойчивости и неустойчивости центрального положения равновесия при различных значениях скольжения  $s$  показаны на фиг. 8. Из этого рисунка видно, что с уменьшением по модулю скольжения, увеличивается область неустойчивости центрального положения ротора. Этот результат согласуется с графиками зависимостей тангенциальной составляющей усилия от скольжения, показанных на фиг. 5. При увеличении по модулю скольжения тангенциальная сила, наличием которой обусловлена неустойчивость, убывает до нуля.

Исследуя устойчивость второго стационарного режима, существующего при  $\lambda$  близких к  $\omega_0$ , момент уже нельзя считать независимым от эксцентриситета. Система уравнений в вариациях будет иметь пятый порядок. Заметим, что условие существования второго стационарного режима ( $n > [K_\phi^2 / \lambda^2 - \varepsilon_1 C_p]^{1/2}$ ) совпадает с условием



Фиг. 7

Фиг. 9



Фиг. 8

устойчивости первого, поэтому второй режим является неустойчивым. Исходя из этого, в данной системе можно ожидать жесткое возбуждение автоколебаний при  $\lambda$  близких к  $\omega_0$ . Заметим, что для потери устойчивости центрального положения равновесия необходима положительность тангенциальной силы, а это выполнено только когда собственная частота меньше частоты сети ( $\lambda < \omega_0$ ). Т.е. режим автоколебаний возможен только у гибких роторов.

**5. Численное исследование устойчивости стационарных режимов.** В предыдущих параграфах с помощью метода усреднения были найдены стационарные режимы поперечных колебаний ферромагнитного ротора, находящегося во вращающемся магнитном поле. Численное интегрирование показывает, что теоретически полученная граница устойчивости центрального положения ротора (см. фиг. 8) совпадает с результатами численного эксперимента. На фиг. 7, 9 приведены графики зависимостей  $\rho(\tau)$ ,  $s(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$ . Зависимость  $\rho(\tau)$ , показанная на фиг. 9 имеет убывающий участок, соответствующий значениям скольжения  $s$ , для которых заданные  $n$  и  $\lambda$  находятся в устойчивой области (см. фиг. 8). При приближении к стационарному значению скольжения, значения параметров  $n$  и  $\lambda$  оказываются в неустойчивой области, и амплитуда колебаний начинает резко расти.

При значениях параметров  $n$  и  $\lambda$  из устойчивой области, и начальных условиях  $\rho(0) > \rho_*$  (где  $\rho_*$  отвечает неустойчивому стационарному режиму, соответствующему заданному  $n$ ),  $\rho$  неограниченно растет. Это свидетельствует о наличии неустойчивого предельного цикла  $\rho = \rho_*$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Позняк Э.Л. Колебания вращающегося стального сердечника в магнитном поле // Научн. докл. высш. шк. Электромеханика и автоматика, 1958. № 1.
2. Позняк Э.Л. Теоретическое и экспериментальное исследование колебаний стального сердечника в магнитном поле // Изв. вузов, Машиностроение. 1959. № 1. С. 60–77.
3. Fruchtenicht J., Jordan H., Seinsh H.O. Exzentrizitätsfelder als Ursache von Laufinstabilitäten bei Asynchronmaschinen // Archiv für Elektrotechnik. teil 1: 65 (1982) 271–281. Teil 2: 65 (1982). P. 283–292.
4. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебаний. М.: Изд-во МГУ. 1971. 290 с.
5. Скубов Д.Ю. Электродинамическое усилие при эксцентричном движении проводящего ротора неявнополюсной машины // Изв. академии наук СССР, Энергетика и транспорт. 1989. № 6. С. 82–89.
6. Кувыкин В.И. Влияние вихревых токов на силовые характеристики магнитных подшипников с периодической структурой поля // Электромеханика. 1986. № 9. С. 11–18.

С.-Петербург

Поступила в редакцию  
24.03.1997