МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1999

УДК 531.011

© 1999 г. С.А. ЗЕГЖДА, М.П. ЮШКОВ

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ПЕРВОГО РОДА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛА С ДИСКАМИ

В работе предлагается новый метод определения собственных частот и собственных форм колебаний упругой системы, состоящей из элементов, для которых известны их собственные частоты и формы. Уравнения, выражающие связь этих элементов друг с другом, рассматриваются как голономные связи. Показывается, что из этих уравнений посредством применения к изучаемой задаче аппарата уравнений Лагранжа первого рода могут быть найдены собственные частоты и формы колебаний. Используется приближенный подход, основанный на динамическом учете нескольких первых форм колебаний элементов системы и квазистатическом учете всех остальных. Эффективность квазистатического учета высших форм собственных колебаний в динамических задачах теории упругости была показана в работах [1–3].

В качестве примера применения данного метода рассматриваются поперечные колебания весомого стержня длины l, в сечениях x_k ($k = 1, n$) которого насажены диски с массами m_k и моментами инерции J_k. Разработано большое количество способов решения этой задачи [4]. Однако в них не используется то, что для балки без дисков, как правило, известны ее собственные формы колебаний $X_\sigma(x)$ ($\sigma = 1,2,\ldots$), образующие полную систему функций. Воспользуемся тем, что и при наличии дисков колебания стержня могут быть представлены в виде:

$$y(x,t) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} q_\sigma(t) X_\sigma(x)$$

Пусть u_k – смещение центра масс k-го диска вдоль оси y, а φ_k его угол поворота. Величины q_σ ($\sigma = 1,2, \ldots$), u_k, φ_k ($k = \overline{1,n}$) будем рассматривать как обобщенные лагранжевы координаты, на которые наложены голономные связи

$$f_k = \sum_{\sigma=1}^{\infty} q_\sigma X_\sigma(x_k) - u_k = 0 \tag{1}$$

$$f_{n+k} = \sum_{\sigma=1}^{\infty} q_\sigma X'_\sigma(x_k) - \varphi_k = 0 \quad (k = \overline{1,n})$$

Кинетическая энергия и потенциальная энергия системы таковы:

$$T = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{M_\sigma \dot{q}_\sigma^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{m_k \dot{u}_k^2}{2} + \frac{J_k \dot{\varphi}_k^2}{2} \right)$$

$$\Pi = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{M_\sigma \omega_\sigma^2 q_\sigma^2}{2}, \quad M_\sigma = \int_0^l \rho S X_\sigma^2 dx$$

Здесь ω_σ – собственные частоты вала без дисков, ρ – плотность, S – площадь поперечного сечения вала.

Используя уравнения Лагранжа первого рода, записанные в обобщенных координатах [6], получаем

$$M_\sigma(\ddot{q}_\sigma+\omega_\sigma^2 q_\sigma)=\sum_{k=1}^{n}[\Lambda_k X_\sigma(x_k)+\Lambda_{n+k}X'_\sigma(x_k)] \tag{2}$$

$$m_k\ddot{u}_k=-\Lambda_k,\ J_k\ddot{\varphi}_k=-\Lambda_{n+k}\ (\sigma=1,2,...,\ k=\overline{k,n})$$

При колебаниях системы с искомой собственной частотой p величины q_σ, u_k, φ_k, Λ_k, Λ_{n+k} изменяются по гармоническому закону

$$q_\sigma=\tilde{q}_\sigma e^{ipt},\ u_k=\tilde{u}_k e^{ipt},\ \varphi_k=\tilde{\varphi}_k e^{ipt},\ \Lambda_k=\tilde{\Lambda}_k e^{ipt}$$

$$\Lambda_{n+k}=\tilde{\Lambda}_{n+k}e^{ipt}(\sigma=1,2,...,\ k=\overline{1,n}) \tag{3}$$

Из уравнений (2) следует, что

$$\tilde{q}_\sigma=\sum_{k=1}^{n}\frac{\tilde{\Lambda}_k X_\sigma(x_k)+\tilde{\Lambda}_{n+k}X'_\sigma(x_k)}{M_\sigma(\omega_\sigma^2-p^2)} \tag{4}$$

$$\tilde{u}_\sigma=\frac{\tilde{\Lambda}_k}{m_k p^2},\ \tilde{\varphi}_k=\frac{\tilde{\Lambda}_{n+k}}{J_k p^2}\ (\sigma=1,2,...,\ k=\overline{1,n})$$

Подставляя в уравнения связей (1) выражения (3), а затем формулы (4), получаем

$$\sum_{j=1}^{2n}\alpha_{ij}(p^2)\tilde{\Lambda}_j=0\ (i=\overline{1,2n})\ \alpha_{ij}=\alpha_{ji} \tag{5}$$

Здесь индекс i соответствует номеру связи, а

$$\alpha_{ij}=\beta_{ij}+\gamma_{ij}$$

$$\beta_{kl}(p^2)=\begin{cases}0 & (k\neq l)\\ -\dfrac{1}{m_k p^2} & (k=l)\end{cases}\quad \beta_{n+k,n+l}(p^2)=\begin{cases}0 & (k\neq l)\\ -\dfrac{1}{J_k p^2} & (k=l)\end{cases}$$

$$\gamma_{kl}(p^2)=\sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{X_\sigma(x_k)X_\sigma(x_l)}{M_\sigma(\omega_\sigma^2-p^2)},\ \gamma_{n+k,n+l}(p^2)=\sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{X'_\sigma(x_k)X'_\sigma(x_l)}{M_\sigma(\omega_\sigma^2-p^2)}$$

$$\gamma_{k,n+l}(p^2)=\sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{X_\sigma(x_k)X'_\sigma(x_l)}{M_\sigma(\omega_\sigma^2-p^2)}\ (k,l=\overline{1,n})$$

Величины $\gamma_{ij}(p^2)$ называются динамическими податливостями [3, 7]. Отметим, что коэффициенты $\gamma_{kl}(p^2)$ $(k,l=\overline{1,n})$ были впервые введены И.М. Бабаковым и названы им гармоническими коэффициентами влияния частоты p [5]. При $p=0$ они становятся обычными коэффициентами влияния.

Из системы (5) следует, что уравнение частот таково:

$$\det[\alpha_{ij}(p^2)]=0 \tag{6}$$

Пусть p_ρ (ρ = 1,2,...) корни уравнения (6), а $\tilde{\Lambda}_{\rho j}(j=\overline{1,n})$ соответствующие им решения системы (5). Полагая в формулах (4) $p = p_\rho$ и $\tilde{\Lambda}_j = \tilde{\Lambda}_{\rho j}$, получаем собственные функции задачи

$$X_{*\rho}(x) = \sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{\Lambda}_{\rho j} X_\sigma(x_j) + \tilde{\Lambda}_{\rho,n+j} X'_\sigma(x_j)}{M_\sigma(\omega_\sigma^2 - p_\rho^2)} X_\sigma(x) \quad (\rho = 1,2,...) \tag{7}$$

Таким образом, найдено представление собственных форм колебаний вала с дисками в виде ряда по собственным формам колебаний вала без дисков.

В [1–3] показана эффективность приближенного подхода, при котором в выражении для динамической податливости динамически учитываются первые N форм собственных колебаний и квазистатически все остальные. Используя этот подход, будем говорить, что рассматриваемая задача решается в N-ом приближении, если коэффициенты $\gamma_{ij}(p^2)$ в системе (5) и в уравнении (6) задаются в виде:

$$\gamma_{kl}^N(p^2) = \sum_{\sigma=1}^{N} \frac{X_\sigma(x_k)X_\sigma(x_l)}{M_\sigma(\omega_\sigma^2 - p^2)} + \gamma_{kl}(0) - \sum_{\sigma=1}^{N} \frac{X_\sigma(x_k)X_\sigma(x_l)}{M_\sigma\omega_\sigma^2}$$

$$\gamma_{n+k,n+l}^N(p^2) = \sum_{\sigma=1}^{N} \frac{X'_\sigma(x_k)X'_\sigma(x_l)}{M_\sigma(\omega_\sigma^2 - p^2)} + \gamma_{n+k,n+l}(0) - \sum_{\sigma=1}^{N} \frac{X'_\sigma(x_k)X'_\sigma(x_l)}{M_\sigma\omega_\sigma^2}$$

$$\gamma_{k,n+l}^N(p^2) = \sum_{\sigma=1}^{N} \frac{X_\sigma(x_k)X'_\sigma(x_l)}{M_\sigma(\omega_\sigma^2 - p^2)} + \gamma_{k,n+l}(0) - \sum_{\sigma=1}^{N} \frac{X_\sigma(x_k)X'_\sigma(x_l)}{M_\sigma\omega_\sigma^2}$$

Здесь и далее все величины, относящиеся к N-му приближению, снабжаются верхним индексом N. Напомним, что появившиеся в этих формулах слагаемые $\gamma_{ij}(0)$ являются обычными коэффициентами влияния и могут быть найдены в конечном виде. При $N = 0$ уравнение (6) переходит в уравнение частот для системы из n дисков, находящихся на невесомом валу [5].

Целесообразно ввести в рассмотрение кривые статического прогиба $X_\rho^s(x)$ вала под действием обобщенных реакций $\tilde{\Lambda}_{\rho j}$. Они могут быть найдены в конечной форме методами сопротивления материалов, а также представлены в виде бесконечных рядов

$$X_\rho^s(x) = \sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{\Lambda}_{\rho j} X_\sigma(x_j) + \tilde{\Lambda}_{\rho,n+j} X'_\sigma(x_j)}{M_\sigma\omega_\sigma^2} X_\sigma(x)$$

Отсюда и из выражений (7) следует, что собственные формы колебаний вала с дисками могут быть представлены в виде

$$X_{*\rho}(x) = \sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{\Lambda}_{\rho j} X_\sigma(x_j) + \tilde{\Lambda}_{\rho,n+j} X'_\sigma(x_j)}{M_\sigma\omega_\sigma^2(\omega_\sigma^2 - p_\rho^2)} p_\rho^2 X_\sigma(x) + X_\rho^s(x) \quad (\rho = 1,2,...) \tag{8}$$

Отметим, что бесконечный ряд, входящий в это выражение, сходится значительно быстрее, чем ряд (7). Действительно, частоты ω_σ^2 растут как σ^4, а величины $X'_\sigma(x_j)$ – как σ. Следовательно, ряд, входящий в представление (8), сходится как $1/\sigma^7$. Такая быстрая сходимость связана с выделением кривой статического прогиба.

Собственные формы в N-ом приближении в соответствии с формулой (8) таковы:

$$X_{*\rho}^N(x) = \sum_{\sigma=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{\Lambda}_{\rho j}^N X_\sigma(x_j) + \tilde{\Lambda}_{\rho,n+j}^N X'_\sigma(x_j)}{M_\sigma\omega_\sigma^2[\omega_\sigma^2 - (p_\rho^N)^2]} (p_\rho^N)^2 X_\sigma(x) + X_\rho^{s,N}(x)$$

Здесь $X_\rho^{s,N}(x)$ – кривая статического прогиба под действием обобщенных реакций

$\tilde{\Lambda}^N_{\rho j}$. Нулевое приближение соответствует невесомому валу. Уже первое приближение позволяет с большой точностью определить первые собственные частоту и форму.

В случае одной сосредоточенной массы m_1, закрепленной в середине пролета шарнирно опертой балки массы M и длины l, уравнение частот (6) принимает вид

$$-\frac{1}{m_1 p^2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{M(\omega_{2\nu-1}^2-p^2)}=0,\quad \omega_{2\nu-1}^2=\frac{EJ}{\rho S l^4}\pi^4(2\nu-1)^4 \tag{9}$$

где EJ – жесткость вала на изгиб. Отметим, что, используя представления тригонометрического и гиперболического тангенсов в виде бесконечных сумм простых дробей, можно показать, что уравнение (9) эквивалентно уравнению [8]:

$$\frac{2M}{m_1}=\xi(\operatorname{tg}\xi-\operatorname{th}\xi),\quad \xi^2=\frac{l^2\rho}{4}\sqrt{\frac{\rho S}{EJ}} \tag{10}$$

При динамическом учете первой формы и квазистатическом учете всех остальных уравнение (9) принимает вид:

$$-\frac{1}{m_1 p^2}+\frac{2}{M(\omega_1^2-p^2)}+\frac{l^3}{48EJ}-\frac{2}{M\omega_1^2}=0 \tag{11}$$

Частота p_l, найденная из этого квадратного уравнения, во всем диапазоне изменения отношения m_l/M отличается от первой частоты, определенной из точного уравнения (10), не более чем на 0,1%. Отбрасывая в выражении (11) последние два слагаемых, приходим к следующей приближенной формуле для первой собственной частоты:

$$p_1^2=M\omega_1^2/(2m_1+M) \tag{12}$$

Погрешность этой формулы растет с ростом отношения m_1/M, однако не достигает 1%.

Первая форма колебаний в данном случае, как следует из выражений (8) и (9), имеет вид

$$X_{*1}(x)=\frac{2\tilde{\Lambda}\bar{p}_1^2 l^3}{\pi^4 EJ(1-\bar{p}_1^2)}\left(\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1-\bar{p}_1^2}{3^4(3^4-\bar{p}_1^2)}\sin\frac{3\pi x}{l}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{\tilde{\Lambda}x(3l^2-4x^2)}{48EJ},\quad \bar{p}_1^2=\frac{p_1^2}{\omega_1^2},\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}$$

Ограничиваясь первым членом приведенного быстро сходящегося ряда, а также учитывая то, что частота p_1 достаточно точно может быть представлена в виде (12), получаем следующее приближенное выражение для первой собственной функции:

$$X_{*1}(x)=\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{\pi^4 m_1}{48M}\left(\frac{3x}{l}-\frac{4x^3}{l^3}\right),\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}$$

Учитывая, что величина $\pi^4/96$ незначительно отличается от единицы, приближенно можно положить

$$X_{*1}(x)=\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{2m_1}{M}\left(\frac{3x}{l}-\frac{4x^3}{l^3}\right),\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}$$

Видно, что форма, соответствующая валу без массы, берется с весом $M^*=M/2$, равным приведенной массе вала, вычисленной для точки крепления к нему груза, а форма при невесомом вале – с весом m_1. Этот приближенный способ построения первой формы может быть применен и к другим аналогичным задачам. Например, к задаче о поперечных колебаниях балки с грузом на конце.

В случае диска, насаженного на расстоянии x_1 от левой опоры шарнирно опертой балки, точное уравнение частот, выраженное через функции Крылова, является довольно громоздким [7]. Первая собственная частота, найденная из кубического уравнения, которое получается из определителя (6) при $N = 1$, как показали расчеты отличается от точного значения не более чем на 0,1% при изменении параметров системы в пределах $0{,}25\,M \leqslant m_1 \leqslant 2M$, $0{,}05\,Ml^2 \leqslant J_1 \leqslant 0{,}5Ml^2$, $0 < x_1 \leqslant 0{,}5l$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зегжда С.А.* К задаче о соударении деформируемых тел // Прикладная механика. Л Изд-во ЛГУ. 1979. Вып. 4. С. 91–108.
2. *Зегжда С.А.* Соударение колец // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1986. Вып. 1. С. 77–83.
3. *Вернигор В.Н.* Определение собственных частот и эквивалентных масс упругого тела по его динамической податливости // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1990. Вып. 4. С. 35–42.
4. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
5. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 559 с.
6. *Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А.* Введение в аналитическую механику. М.: Наука, 1991. 256 с.
7. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1960. 408 с.
8. *Гольдсмит В.* Удар. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.

С.–Петербург

Поступила в редакцию
14.04.1997