

УДК 531.383

© 1999 г. В.Н. ВАСИЛЬЕВ

## ОПТИМИЗАЦИЯ НАСТРОЙКИ МИНИМАЛЬНО ИЗБЫТОЧНОЙ СИСТЕМЫ ГИРОДИНОВ

Настройка минимально избыточной системы гиросилового аппарата [1–4] преследует две главные цели: исключение особых состояний в работе гиросилового аппарата (ГСС), максимальное расширение области управляемости. Критерии настройки ГСС предложены в [5]. Мерой удаления ГСС от особых состояний служит определитель Грама [6], обобщенной характеристикой управляющих свойств системы – область изменения вектора управляющего момента [7, 8]. Закон настройки должен обеспечивать приведение ГСС в состояние, при котором выбранный показатель качества максимален. В общем случае критерий настройки является многомерной функцией углов прецессии гиросилового аппарата [5].

В статье получены соотношения, позволяющие представить критерий настройки в виде функции кинетического момента ГСС и одного параметра настройки, что облегчает поиск экстремума и упрощает закон управления. В частных случаях параметр настройки может быть определен как функция кинетического момента ГСС.

1. Полагаем, что ГСС состоит из двух типовых групп гиросилового аппарата. Каждая типовая группа, объединяющая по два гиросилового аппарата с параллельными осями прецессии, представляет собой исполнительный орган, создающий управляющие моменты относительно двух осей космического аппарата [9]. Оси прецессии гиросилового аппарата первой и второй групп соответственно параллельно осям  $Oz$  и  $Oy$  связанной системы координат  $Oxuz$ . Схема установки гиросилового аппарата изображена на фиг. 1.

Текущее положение ГСС в пространстве углов прецессии определяется вектором  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ , где  $\beta_i$  ( $i = 1-4$ ) – углы прецессии гиросилового аппарата, которые отсчитываются от оси  $Ox$ . Положительному направлению отсчета углов соответствует вращение векторов кинетических моментов  $G_1$  и  $G_2$  в сторону оси  $Oy$ , а векторов  $G_3$  и  $G_4$  в сторону оси  $Oz$ .

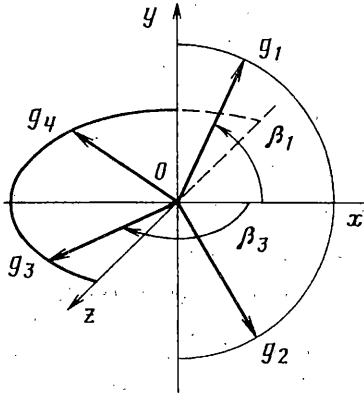
Вектор состояния  $\beta$  определяет вектор кинетического момента ГСС

$$H = Gg, \quad g = \sum_{i=1}^4 g_i(\beta_i) \quad (1.1)$$

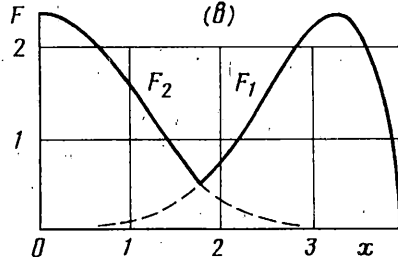
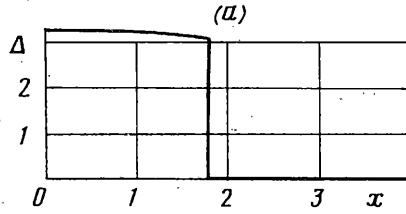
где  $g = (x, y, z)$  – вектор кинетического момента ГСС в относительных единицах,  $G$  – кинетический момент гиросилового аппарата,  $g_i = G_i/G$  – единичные векторы.

Направляющие косинусы единичных векторов связаны со схемой установки гиросилового аппарата

$$\begin{aligned} g_1 &= (x_1, y_1, 0) = (\cos \beta_1, \sin \beta_1, 0), & g_2 &= (x_2, y_2, 0) = (\cos \beta_2, \sin \beta_2, 0), \\ g_3 &= (x_3, 0, z_3) = (\cos \beta_3, 0, \sin \beta_3) \\ g_4 &= (x_4, 0, z_4) = (\cos \beta_4, 0, \sin \beta_4) \end{aligned} \quad (1.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Проекции вектора кинетического момента ГСС (1.1) на оси  $Oxuz$  равны

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad y = y_1 + y_2, \quad z = z_3 + z_4 \quad (1.3)$$

Скорость изменения взаимного положения векторов  $\mathbf{g}_i$  определяется в пространстве скоростей прецессии вектором  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ , где  $\lambda_i = d\beta_i/dt$  — скорость прецессии  $i$ -го гироскопа.

Векторам  $\boldsymbol{\beta}$  и  $\boldsymbol{\lambda}$  соответствует вектор управляющего момента ГСС на неподвижном основании

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{m}_i \lambda_i, \quad \mathbf{m}_i = -\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \beta_i} \quad (1.4)$$

Равенство (1.4) может быть записано в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{GA}\boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} m_{1x} & m_{2x} & m_{3x} & m_{4x} \\ m_{1y} & m_{2y} & m_{3y} & m_{4y} \\ m_{1z} & m_{2z} & m_{3z} & m_{4z} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{A}$  —  $(3 \times 4)$ -матрица Якоби.

Единичные векторы  $\mathbf{m}_i = -\partial \mathbf{g}_i / \partial \beta_i$ , составляющие столбцы матрицы  $\mathbf{A}$ , могут быть найдены из соотношений (1.2):

$$\mathbf{m}_1 = (y_1, -x_1, 0), \quad \mathbf{m}_2 = (y_2, -x_2, 0), \quad \mathbf{m}_3 = (z_3, 0, -x_3) \quad (1.6)$$

$$\mathbf{m}_4 = (z_4, 0, -x_4)$$

Они определяют положение линий, вдоль которых действуют управляющие моменты гироскопов. Величины и знаки моментов зависят от скоростей прецессии  $\lambda_i$ .

Обозначим через  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  — 4х-мерные векторы с координатами, равными элементам строк матрицы  $\mathbf{A}$ . Умножая  $\mathbf{A}$  на транспонированную матрицу, получим

$$\mathbf{B} = \mathbf{AA}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_3 & \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3 & \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3 \end{pmatrix}$$

Определитель Грама  $F = \det \mathbf{B}$ , составленный для векторов  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ , является мерой

удаления вектора  $\beta$  от особых состояний  $\beta_*$  в пространстве углов прецессии [6]. В силу свойств определителя Грама  $\det B \geq 0$ , а равенство  $\det B = 0$  выполняется лишь в том случае, когда векторы  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  линейно зависимы и вектор  $\beta$  становится особым. Определитель Грама имеет наглядный геометрический смысл: он равен сумме квадратов объемов параллелепипедов, построенных на тройках векторов  $\mathbf{m}_i$  [5]. Его можно представить в виде квадрата объема 4х-мерного параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{p}_i$  [11].

Настройка ГСС, состоящей из двух типовых групп гирогинов, связана с распределением кинетического момента ГСС по оси  $Ox$  между этими группами [2, 12].

Пусть  $x_{12} = x_1 + x_2$  и  $x_{34} = x_3 + x_4$  — кинетические моменты первой и второй групп гирогинов по оси  $Ox$  ( $x_{12} + x_{34} = x$ ), а  $\Delta = x_{12} - x_{34}$  — разность кинетических моментов двух групп. Если вектор кинетического момента ГСС  $\mathbf{g} = (x, y, z)$  задан и разность  $\Delta$  известна, то равенства (1.3) можно записать в виде системы тригонометрических уравнений для определения проекций векторов  $\mathbf{g}_i$  на связанные оси

$$x_1 + x_2 = x, \quad x_3 + x_4 = x_{34}, \quad y_1 + y_2 = y, \quad z_3 + z_4 = z$$

$$x_{12} = (x + \Delta)/2, \quad x_{34} = (x - \Delta)/2$$

Решая тригонометрические уравнения и учитывая уравнения связей между проекциями векторов  $\mathbf{g}_i$  (1.3),  $x_1^2 + y_1^2 = 1$ ,  $x_2^2 + y_2^2 = 1$ ;  $x_3^2 + z_3^2 = 1$ ,  $x_4^2 + z_4^2 = 1$ , найдем

$$x_{12} = (x + \Delta)/4 \pm a_1 y, \quad x_{34} = (x - \Delta)/4 \pm a_2 z$$

$$y_{12} = \frac{1}{2}[y \pm a_1(x + \Delta)], \quad z_{34} = \frac{1}{2}[z \pm a_2(x - \Delta)] \quad (1.7)$$

$$a_1 = \frac{1}{2}[(4 - x_{12}^2 - y^2)/(x_{12}^2 + y^2)]^{1/2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}[(4 - x_{34}^2 - z^2)/(x_{34}^2 + z^2)]^{1/2}$$

Для определенности полагаем, что со знаком плюс вычисляются проекции векторов  $\mathbf{g}_1$  и  $\mathbf{g}_3$ .

Соотношения (1.7) позволяют однозначно определить вектор состояния в зависимости от вектора кинетического момента ГСС  $\mathbf{g}(x, y, z)$  и текущей разности  $\Delta$ . Регулируя параметр  $\Delta$ , можно осуществлять настройку ГСС на заданный критерий оптимальности.

2. Рассмотрим задачу нахождения оптимальной разности  $\Delta = \Delta(x, y, z)$  из условия  $\det B = \max$ .

Перемножая матрицы  $A$  (1.5) и  $A^T$ , получим с учетом (1.6), определитель Грама как функцию вектора состояния  $\beta$ :

$$F(\beta) = \det B = \begin{vmatrix} y_1^2 + y_2^2 + z_3^2 + z_4^2 & -(x_1 y_1 + x_2 y_2) & -(x_3 z_3 + x_4 z_4) \\ -(x_1 y_1 + x_2 y_2) & x_1^2 + x_2^2 & 0 \\ -(x_3 z_3 + x_4 z_4) & 0 & x_3^2 + x_4^2 \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

Раскроем соотношение (2.1):

$$F(\beta) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 (x_3^2 + x_4^2) + (x_3 z_4 - x_4 z_3)^2 (x_1^2 + x_2^2) \quad (2.2)$$

В каждое из слагаемых равенств (2.2) входят квадраты объемов двух параллелепипедов. Их основаниями служат ромбы, построенные на парах векторов  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$  и  $\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4$ , принадлежащих разным типовым группам. Высоты параллелепипедов соответственно равны проекциям векторов  $\mathbf{m}_3$  и  $\mathbf{m}_4$  на оси прецессии первой пары, а векторов  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$  на оси прецессии второй пары.

Чтобы представить определитель Грама в виде функции кинетического момента ГСС  $g(x, y, z)$  и разности  $\Delta$ , подставим в (2.2) соотношения (1.7):

$$F(x, y, z, \Delta) = F_{11}(x, y, \Delta)F_{22}(x, z, \Delta) + F_{21}(x, z, \Delta)F_{12}(x, y, \Delta) \quad (2.3)$$

$$F_{11}(x, y, \Delta) = \frac{1}{8}(x_{12}^2 - y^2)^2(4 - x_{12}^2 - y^2)/(x_{12}^2 + y^2)$$

$$F_{12}(x, y, \Delta) = x_{12}^2 + y^2(4 - x_{12}^2 - y^2)/(x_{12}^2 + y^2)$$

$$F_{21}(x, z, \Delta) = \frac{1}{8}(x_{34}^2 - z^2)^2(4 - x_{34}^2 - z^2)/(x_{34}^2 + z^2)$$

$$F_{22}(x, z, \Delta) = x_{34}^2 + z^2(4 - x_{34}^2 - z^2)/(x_{34}^2 + z^2)$$

$$x_{12} = \frac{1}{2}(x - \Delta), \quad x_{34} = \frac{1}{2}(x - \Delta)$$

Оптимальному значению разности соответствует максимум выражения (2.3).

В частных случаях зависимость  $\Delta$  от кинетического момента может быть найдена в явном виде. Рассмотрим случай, когда  $y = z = 0$  и кинетический момент изменяется вдоль оси  $Ox$ .

При  $y = z = 0$  получим из (2.3):

$$F(x, \Delta) = F_{11}(x, \Delta)F_{22}(x, \Delta) + F_{11}(x, \Delta)F_{21}(x, \Delta)$$

$$F_{11}(x, \Delta) = \frac{1}{8}x_{12}^2(4 - x_{12}^2), \quad F_{12}(x, \Delta) = x_{12}^2$$

$$F_{21}(x, \Delta) = \frac{1}{8}x_{34}^2(4 - x_{34}^2), \quad F_{34}(x, \Delta) = x_{34}^2$$

или

$$F(x, \Delta) = \frac{1}{8}x_{12}^2x_{34}^2(8 - x_{12}^2 - x_{34}^2) \quad (2.4)$$

Представим (2.4) в виде полинома от разности  $\Delta$ :

$$F(x, \Delta) = \frac{1}{256}[-\Delta^6 + (x^2 + 16)\Delta^4 + x^2(x^2 - 32)\Delta^2 + x^4(16 - x^2)] \quad (2.5)$$

Определим значения разности  $\Delta \geq 0$ , обеспечивающие экстремум функции (2.5). Для этого частную производную  $\partial F(x, \Delta)/\partial \Delta = \frac{1}{128} \Delta[-3\Delta^4 + 2(x^2 + 16)\Delta^2 + x^2(x^2 - 32)]$  приравняем нулю.

Подставляя найденные значения разностей  $\Delta_1 = 0$ ,  $\Delta_2 = \sqrt{(32 - x^2)}/3$ ,  $\Delta_3 = x$  в (2.5), найдем экстремальные значения определителя Грама как функции кинетического момента  $x$ :

$$F_1(x) = \frac{1}{256}x^4(16 - x^2), \quad F_2(x) = \frac{1}{216}(8 - x^2)^3, \quad F_3(x) = 0$$

Оптимальная разность, при которой определитель Грама максимален, принимает значения  $\Delta_1$  или  $\Delta_2$ :

$$\Delta(x) = \begin{cases} \Delta_2, & F_2 \geq F_1 \\ \Delta_1, & F_2 < F_1 \end{cases} \quad (2.6)$$

Пусть кинетический момент ГСС нарастает вдоль оси  $Ox$  от нуля до границы области  $S$  ( $x = 4$ ). Функция  $F_1(x)$ , равная вначале нулю, возрастает, достигает максимума  $F_{1\max} = 64/27$  в точке  $x = \sqrt{32/3}$  и снова обращается в нуль при насыщении ГСС ( $x = 4$ ). Функция  $F_2(x)$  имеет максимум  $F_{2\max} = 64/27$  при  $x = 0$ , затем уменьшается и обращается в нуль при  $x = 2\sqrt{2}$ .

Определим  $x$ , при котором осуществляется переход от разности  $\Delta_2$  к  $\Delta_1 = 0$ . Для

этого воспользуемся условием  $F_1(x) = F_2(x)$ . Точка перехода находится решением алгебраического уравнения  $5x^6 - 336x^4 + 6144x^2 - 16384 = 0$ .

Условием задачи удовлетворяет решение  $x \approx 1,79$ . С учетом (2.6) оптимальная разность может быть представлена как функция кинетического момента  $x$ :

$$\Delta(x) = \begin{cases} \sqrt{(32 - x^2)/3}, & x \leq 1,79 \\ 0, & x > 1,79 \end{cases} \quad (2.7)$$

В точке перехода  $\Delta \approx 3,1, F_1 = F_2 \approx 0,51$ .

Исследуемые функции  $\Delta(x)$  и  $F(x)$  изображены на фиг. 2. Следует отметить, что оптимальная разность является разрывной функцией кинетического момента.

3. Область  $W$  изменения вектора управляющего момента минимально избыточной ГСС имеет форму выпуклого 12-гранника [1, 7, 8]. Форма области  $W$  определяется вектором состояния  $\beta$ , а ее размеры пропорциональны кинетическому моменту гиродин  $G$  и максимальной скорости прецессии  $\lambda_*$ . В процессе работы ГСС форма области  $W$  непрерывно изменяется. В особых состояниях область  $W$  вырождается в плоскую фигуру [7, 8].

Поверхность области  $W$  состоит из ромбов с длиной сторон  $l = 2G\lambda_*$ . Примем  $G = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ ,  $\lambda_* = 1 \text{ с}^{-1}$ . Полагаем для определенности, что в исходном состоянии векторы  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  находятся в правой полуплоскости ( $x_{12} > 0$ ), а векторы  $\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$  слева от плоскости  $Oyz$  ( $x_{34} < 0$ ). Ребра 1, 2 12-гранника параллельны векторам  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ , а ребра 3, 4 – векторам  $\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4$  (фиг. 3).

Объем области  $W$  складывается из объемов 12 пирамид, основаниями которых являются ромбы поверхности, а общая вершина расположена в центре симметрии. С учетом центральной симметрии области  $W$  достаточно вычислить объемы 6 пирамид. Ромбы-основания пирамид образуются комбинацией пар векторов  $\mathbf{m}_i$ , а высоты равны расстояниям от центра симметрии до граней и вычисляются как суммы проекций на нормали к граням двух других векторов  $\mathbf{m}_i$ , не образующих грани.

Вычислим объем пирамиды, основанием которой служит ромб площадью  $S_1 = l|\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1|$ , построенный на ребрах 1, 2. Единичный вектор, нормальный грани, обозначим  $\mathbf{e}_1 = (\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1)/|\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1|$ . Высота пирамиды равна  $h_1 = (\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_4)\mathbf{e}_1$ . Объем пирамиды с учетом  $l = 2$  находится по формуле  $V_1 = 1/3 S_1 h_1 = 2/3 (\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1)(\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_4)$ .

Вычисляя аналогично объемы остальных пирамид, получим объем области  $W$ :

$$V = 2 \sum_{j=1}^6 V_j = \frac{8}{3} [(\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1)(\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_4) + (\mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}_4)(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) + (\mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}_2)(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_4) + (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_4)(\mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3) + (\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_4)(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_3) + (\mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}_1)(\mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_4)] \quad (3.1)$$

Из формулы (3.1), преобразованной к виду  $V = 8[\mathbf{m}_3(\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1) + \mathbf{m}_4(\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1) + \mathbf{m}_1(\mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}_4) + \mathbf{m}_2(\mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}_4)]$ , следует, что объем области  $W$  равен сумме объемов четырех параллелепипедов, построенных на ребрах 12-гранника. С другой стороны

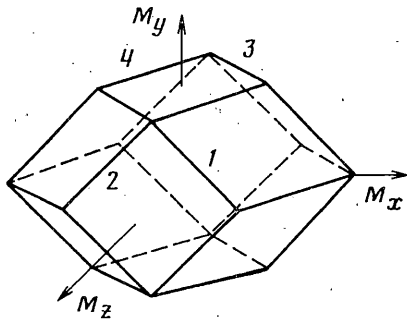
$$V = 8[(\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1)(\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_4) + (\mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}_4)(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2)] \quad (3.2)$$

т.е. объем области  $W$  равен сумме объемов двух параллелепипедов: их основаниями являются грани, параллельные парам векторов  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$  и  $\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4$ , а высота каждого равна диагонали основания другого параллелепипеда.

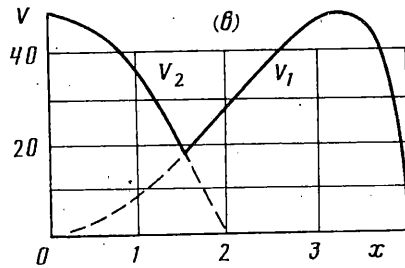
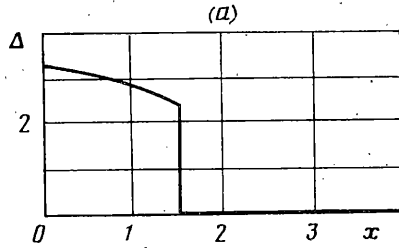
Рассмотрим задачу нахождения оптимальной разности  $\Delta = \Delta(x, y, z)$  из условия  $V = \max$ .

Раскрывая равенство (3.2), получим

$$V = 8[(x_1 y_2 - x_2 y_1)(x_3 + x_4) + (x_3 z_4 - x_4 z_3)(x_1 + x_2)] \quad (3.3)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Чтобы представить объем  $V$  в функции кинетических моментов ГСС и разности  $\Delta$ , воспользуемся подстановкой соотношений (1.7) в (3.3):

$$V(x, y, z, \Delta) = S_{12}(x, y, \Delta)h_{34}(x, \Delta) + S_{34}(x, z, \Delta)h_{12}(x, \Delta) \quad (3.4)$$

$$S_{12}(x, y, \Delta) = 4(y^2 - x_{12}^2)[(4 - x_{12}^2 - y^2)/(x_{12}^2 + y^2)]^{1/2}$$

$$S_{34}(x, y, \Delta) = 4(z^2 - x_{34}^2)[(4 - x_{34}^2 - z^2)/(x_{34}^2 + z^2)]^{1/2}$$

$$h_{12}(x, \Delta) = 2x_{12} = x + \Delta, \quad h_{34}(x, \Delta) = 2x_{34} = x - \Delta$$

Оптимальная разность находится из условия максимума выражения (3.4).

В частных случаях зависимость  $\Delta$  от кинетического момента может быть найдена в явном виде.

Рассмотрим случай, когда  $y = z = 0$  и кинетический момент изменяется вдоль оси  $Ox$ . При  $y = z = 0$  получим из (3.4):

$$V(x, \Delta) = -8x_{12}x_{34}(\sqrt{4 - x_{12}^2} + \sqrt{4 - x_{34}^2}) \quad (3.5)$$

Определим значения разностей  $\Delta \geq 0$ , обеспечивающих экстремумы выражения (3.5). Для этого частную производную

$$\partial V(x, \Delta) / \partial \Delta = 2(b_1 + b_2) + (x^2 - \Delta^2)[(x + \Delta)/b_1 - (x - \Delta)/b_2]$$

$$b_1 = [16 - (x + \Delta)^2]^{1/2}, \quad b_2 = [16 - (x - \Delta)^2]^{1/2}$$

приравняем нулю.

Оптимальная разность  $\Delta$  находится из условия

$$[2b_1^2 + (x^2 - \Delta^2)(x + \Delta)]^2 b_2^2 = [2b_2^2 - (x^2 - \Delta^2)(x - \Delta)]^2 b_1^2 \quad (3.6)$$

Раскрывая соотношение (3.6), найдем что  $\Delta_1 = 0$  или является решением уравнения

$$3\Delta^6 - (7x^2 + 104)\Delta^4 + (5x^4 - 48x^2 + 768)\Delta^2 - x^6 + 24x^4 - 256x^2 = 0 \quad (3.7)$$

Обозначим через  $\Delta_2(x)$  – решение уравнения (3.7). В частности при  $x = 0$  уравнение

принимает вид  $3\Delta^4 - 104\Delta^2 + 768 = 0$ . Условием задачи удовлетворяет решение  $\Delta_2(0) = \sqrt{32/3}$ , которое совпадает с оптимальной разностью, полученной при использовании определителя Грама.

Подставляя  $\Delta_1 = 0$  и  $\Delta_2$  в (3.4), найдем экстремальные значения функций  $V_1$  и  $V_2$ .

При  $\Delta_1 = 0$   $V_1 = 2x^2\sqrt{16-x^2}$ . Если  $x$  увеличивается, эта функция, равная нулю при нулевом кинетическом моменте, возрастает, достигает максимума  $V_{1\max} = 256/(3\sqrt{3})$  при  $x = \sqrt{32/3}$  и снова обращается в нуль в состоянии насыщения ГСС ( $\dot{x} = 4$ ). Функция  $V_2$  принимает максимальное значение  $V_{2\max} = 256/(3\sqrt{3})$  в исходном состоянии ( $x = 0$ ), затем убывает и обращается в нуль при  $x = \Delta_2$ . Подставив последнее равенство в уравнение (3.7), получим значение кинетического момента  $x = 2$ , при котором  $V_2$  обращается в нуль.

В точках максимума функций  $V_1$  и  $V_2$  область  $W$  принимает форму ромбодекаэдра, у которого все грани одинаковы и острый угол при вершинах всех ромбов составляет  $\alpha = 2\arcsin 1/\sqrt{3} \approx 70,5$  град.

Оптимальная разность, обеспечивающая максимальный объем области  $W$  изменения вектора управляющего момента ГСС, принимает значения  $\Delta_1$  или  $\Delta_2$ :

$$\Delta(x) = \begin{cases} \Delta_2, & V_2 \geq V_1 \\ 0, & V_2 < V_1 \end{cases}$$

Кинетический момент, при котором осуществляется переход от разности  $\Delta_2$  к  $\Delta_1$  определяется из условия  $V_1(x) = V_2(x)$  и составляет  $x \approx 1,5$ . Оптимальная разность  $\Delta$ , объемы  $V_1$  и  $V_2$  как функции кинетического момента по оси  $Ox$  изображены на фиг. 4. Оптимальная разность, как видно из графика  $\Delta = \Delta(x)$ , является разрывной функцией.

4. Оптимальная разность позволяет сформировать функцию управления, входящую в уравнение настройки [2]. После этого требуемые скорости прецессии находятся решением двух систем алгебраических уравнений с переменными коэффициентами [1]. Искомые скорости прецессии содержат две составляющие: одна реализует вектор управления космическим аппаратом, другая осуществляет настройку ГСС на заданный критерий оптимальности.

Введением косоугольной системы координат [3] полученные результаты могут быть распространены на типовые группы гиродинов, взаимное расположение которых задано произвольным углом между осями прецессии.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В.Н., Вейнберг Д.М., Шереметьевский Н.Н. Управление угловым положением долговременной орбитальной станции при помощи двухступенных силовых гироскопов // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 3–9.
2. Васильев В.Н. Управление кратной минимально избыточной системой гиродинов // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 3. С. 3–10.
3. Васильев В.Н. Моментные характеристики кратной минимально избыточной гиросиловой системы ориентации // Тр. ВНИИ электромеханики. 1997. Т. 97. С. 101–110.
4. Васильев В.Н. Выбор основных динамических характеристик гироина // Тр. ВНИИ электромеханики. 1987. Т. 83. С. 77–82.
5. Токарь Е.Н. Критерий настройки гиросиловых систем // Космич. исследования. 1980. Т. 18. Вып. 3. С. 307–315.
6. Токарь Е.Н., Легостаев В.П., Михайлов М.В., Платонов В.Н. Управление избыточными гиросиловыми системами // Космич. исследования. 1980. Т. 18. Вып. 2. С. 147–156.

7. *Васильев В.Н.* Исследование свойств системы двухстепенных силовых гироскопов // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 5. С. 3–9.
8. *Васильев В.Н., Вейнберг Д.М., Злочевский С.И.* Обобщенные характеристики гиросиловых систем управления // Космич. исследования. 1991. Т. 29. Вып. 2. С. 231–237.
9. *Васильев В.Н., Вершинина Ю.В.* Обобщенные динамические характеристики типовой группы гиродинов // Тр.ВНИИ электромеханики. 1987. Т. 83. С. 83–90.
10. *Злочевский С.И., Соколов А.А., Васильев В.Н., Вейнберг Д.М.* Об одном способе построения области управляемости гиросиловой системы ориентации // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1989. № 5. С. 42–46.
11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
12. *Васильев В.Н.* Управление системой двухстепенных силовых гироскопов с параллельными осями прецессии // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 14–20.

Москва

Поступила в редакцию  
14.08.1997