МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1999

УДК 531.36

© 1999 г. О.В. ХОЛОСТОВА

О ДВИЖЕНИИ БЛИЗКОЙ К ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПРИ РЕЗОНАНСЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Рассматривается движение 2π-периодической по времени гамильтоновой системы с одной степенью свободы, на которую наложены малые диссипативные силы, описываемые функцией Релея. Предполагается, что начало координат является положением равновесия системы, линеаризованная система при отсутствии диссипации устойчива, ее характеристические показатели $\pm i\nu$ чисто мнимые и величина 4ν близка к целому числу. Изучается качественный характер поведения приближенной (модельной) системы в достаточно малой окрестности начала координат в зависимости от параметров задачи – резонансной расстройки и величины диссипации. Дано строгое решение вопроса о существовании, числе и устойчивости 8π-периодических движений исходной системы.

1. Постановка задачи. Преобразование гамильтониана. Рассмотрим движение механической системы с одной степенью свободы, функция Гамильтона которой записывается в виде

$$H(x, y, t) = H_2(x, y) + H_3(x, y, t) + H_4(x, y, t) + \ldots \qquad (1.1)$$

где x и y – координата и импульс. H_k – многочлен k-ой степени относительно x, y, $H_2(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ (α, β, γ – константы). Начало координат $x = y = 0$ является положением равновесия системы. Функцию H предполагаем аналитичной в окрестности $x = y = 0$ и 2π-периодической по времени.

Будем считать, что на систему действуют диссипативные силы, описываемые функцией Релея вида $R(\dot{x}) = \frac{1}{2}\delta\dot{x}^2$.

Уравнения движения системы имеют вид

$$dx/dt = \partial H/\partial y, \quad dy/dt = -\partial H/\partial x - \delta\dot{x} \qquad (1.2)$$

Пусть линеаризованная в окрестности $x = y = 0$ при $\delta = 0$ система уравнений (1.2) устойчива по Ляпунову, а ее характеристические показатели $\pm i\nu$ ($\nu = \sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}$, $4\alpha\gamma > \beta^2$) чисто мнимые. Пусть, кроме того, величины 2ν и 3ν не являются целыми числами, т.е. в системе нет резонансов до третьего порядка включительно, а величина 4ν близка к целому числу N.

Цель работы – решение вопроса о существовании в достаточно малой окрестности начала координат 8π-периодических движений рассматриваемой системы, их числе и устойчивости. Изучается также качественный характер поведения приближенной (модельной) системы в окрестности начала координат в исследуемом близком к резонансному случае.

Осуществим предварительно ряд канонических замен переменных, упрощающих структуру гамильтониана (1.1) и соответствующих уравнений движения. Линейная замена $x, y \to x^*, y^*$ вида $x = \sqrt{2\gamma/\nu}x^*$, $y = -(\beta/\sqrt{2\gamma\nu})x^* + \sqrt{\nu/2\gamma}y^*$ приводит функцию H_2 к нормальной форме $\frac{1}{2}\nu\,(x^{*2} + y^{*2})$. Далее при помощи вещественной 2π-периодической по t замены $x^*, y^* \to q, p$ члены третьей степени в гамильтониане можно уничтожить, а совокупность членов четвертой степени упростить, оставляя в ней лишь резонансные слагаемые. Полагая $q = \varepsilon\sqrt{2R}\sin\theta$, $p = \varepsilon\sqrt{2R}\cos\theta$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$, запишем нормализованный до членов четвертой степени включительно гамильтониан в виде

$$H^* = \nu R + \varepsilon^2[c + a\sin(4\theta - Nt) + b\cos(4\theta - Nt)]R^2 + O(\varepsilon^3) \tag{1.3}$$

где a, b, c – константы; будем считать, что $c \neq 0$ и $a^2 + b^2 \neq 0$.

Уравнения движения системы, отвечающие гамильтониану (1.3), будут иметь вид

$$d\theta/dt = \partial H^*/\partial R + \varepsilon^2\chi\sin\theta\cos\theta + O(\varepsilon^3) \tag{1.4}$$

$$dR/dt = -\partial H^*/\partial\theta - \varepsilon^2\chi R(1 + \cos 2\theta) + O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon^2\chi = 2\gamma\delta$$

Замена переменных $\theta, R \to \theta^*, R^*$ по формулам

$$\theta = \theta^* - \varepsilon^2\chi\cos 2\theta^*/(4\nu) + O(\varepsilon^3), \quad R = R^* - \varepsilon^2\chi R\sin 2\theta^*/(2\nu) + O(\varepsilon^3)$$

упрощает в (1.4) структуру диссипативных членов. При этом новый гамильтониан будет иметь вид (1.3), где вместо θ и R стоят θ^* и R^*, а уравнения движения станут такими

$$\frac{d\theta^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial R^*} + O(\varepsilon^3), \quad \frac{dR^*}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial\theta^*} - \varepsilon^2\chi R^* + O(\varepsilon^3)$$

Положим $4\nu = N + 4\varepsilon^2\eta$, сделаем замену переменных $\theta^*, R^* \to \varphi, r$ вида

$$\theta^* = \tfrac{1}{4}Nt + \psi^* + \sigma[\tfrac{1}{8}(1+\sigma)\pi + \varphi], \quad R^* = \xi r$$

$$\sigma = \operatorname{sign} c, \quad \xi = (a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \sin 4\psi^* = a\xi, \quad \cos 4\psi^* = b\xi$$

и введем новую независимую переменную $\tau = \varepsilon^2 t$. Уравнения движения системы и гамильтониан примут следующий вид:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\partial\Gamma}{\partial r} + O(\varepsilon), \quad \frac{dr}{d\tau} = -\frac{\partial\Gamma}{\partial\varphi} - \chi r + O(\varepsilon) \tag{1.5}$$

$$\Gamma = \Gamma_0(\varphi, r) + \varepsilon\Gamma_1(\varphi, r, \tau, \varepsilon) \tag{1.6}$$

$$\Gamma_0 = \mu r + (\varkappa - \cos 4\varphi)r^2, \quad \mu = \sigma\eta, \quad \varkappa = |c|\,\xi \tag{1.7}$$

Функция Γ_1 в (1.5) 2π-периодична по φ, периодична по τ с периодом $T = 8\pi\varepsilon^2$ и в области $0 < r \ll 1$ аналитична по всем переменным.

Некоторые аспекты движения системы (1.5) при отсутствии диссипации ($\chi = 0$) и при $\varkappa \neq 1$ рассмотрены в [1]. Критический случай $\varkappa = 1$ при $\chi = 0$ и при точном резонансе ($\mu = 0$) исследован в [2].

Будем далее полагать, что $\varkappa \neq 1$.

2. Исследование модельной системы. Отбрасывая в (1.5), (1.6) члены $O(\varepsilon)$, получим систему с укороченным (модельным) гамильтонианом Γ_0, которому отвечают уравнения движения вида

$$d\varphi/d\tau = \mu + 2(\varkappa - \cos 4\varphi)r, \quad dr/d\tau = -4\sin 4\varphi r^2 - \chi r \tag{2.1}$$

Подробный анализ системы (2.1) в случае отсутствия диссипации ($\chi = 0$) проведен в

[1]. Исследуем фазовые траектории этой системы при произвольных значениях параметров χ ($\chi \geqslant 0$) и μ.

Отметим, что при $\chi \neq 0$ модельная система (2.1) не имеет замкнутых траекторий (предельных циклов), что следует из критерия Бендиксона [3] и вида правых частей уравнений (2.1).

Положениями равновесия системы (2.1) являются начало координат $r = 0$, а также точки, координаты которых φ и r удовлетворяют уравнениям

$$\cos 4\varphi = (\mu + 2\varkappa r)/(2r), \quad \sin 4\varphi = -\chi/(4r) \tag{2.2}$$

Исключая из (2.2) φ, получим уравнение для r вида

$$16(\varkappa^2-1)r^2 + 16\mu\varkappa r + (4\mu^2 + \chi^2) = 0 \tag{2.3}$$

Каждому вещественному положительному корню уравнения (2.3) отвечают четыре положения равновесия системы (2.1), для которых значения φ отличаются на число, кратное $\pi/2$.

При $0 < \varkappa < 1$ уравнение (2.3) имеет один вещественный положительный корень

$$r_0 = \frac{2\mu\varkappa + \sqrt{4\mu^2 + (1-\varkappa^2)\chi^2}}{4(1-\varkappa^2)} \tag{2.4}$$

Если $\varkappa > 1$, то при $\mu > -\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2-1}\chi$ у уравнения (2.3) нет вещественных положительных корней, а при $\mu \leqslant -\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2-1}\chi$ таких корней два, они определяются выражениями

$$r_{1,2} = \frac{-2\mu\varkappa \pm \sqrt{4\mu^2 - (\varkappa^2-1)\chi^2}}{4(\varkappa^2-1)} \quad (r_2 < r_1) \tag{2.5}$$

В случае $\mu = -\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2-1}\chi$ (бифуркационная прямая в плоскости параметров χ, μ) корни r_1 и r_2 совпадают, при этом $r_1 = r_2 = \varkappa\chi \Big/ \left(4\sqrt{\varkappa^2-1}\right)$. Отметим, что при $\chi = 0$ бифуркационная прямая совпадает с осью $\mu = 0$, на ней $r_1 = r_2 = 0$.

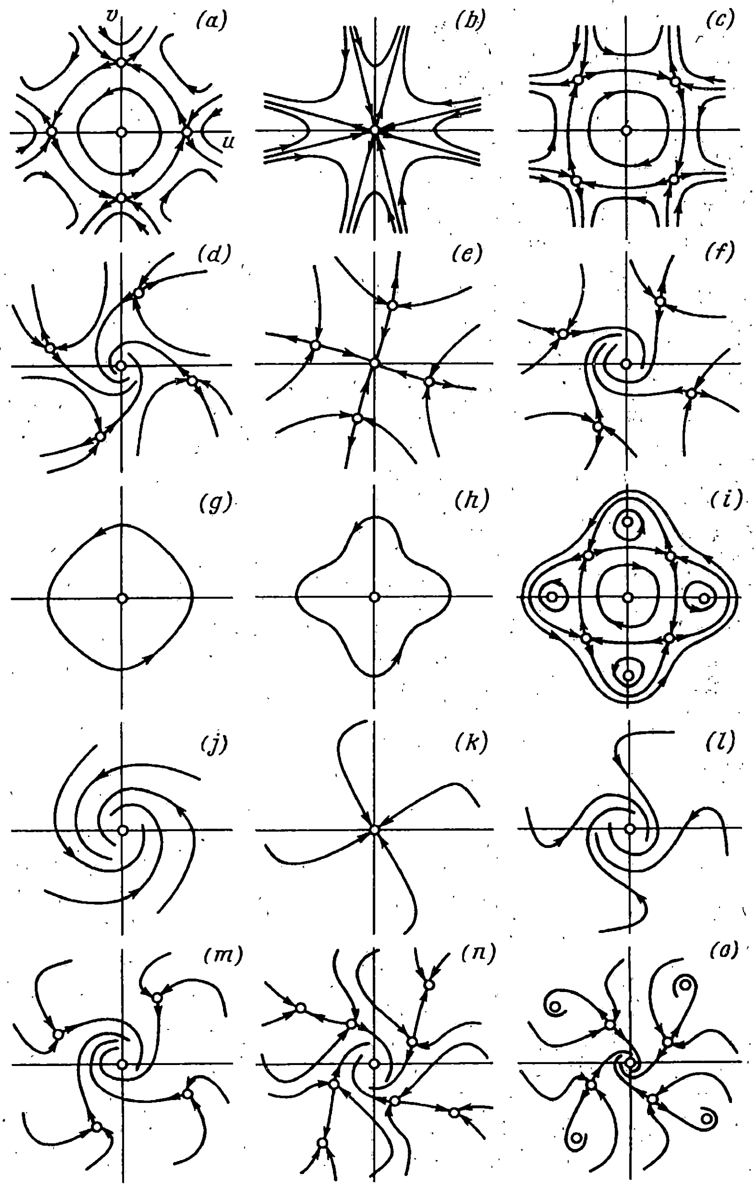
На фигуре (a–o) в плоскости переменных $u = \sqrt{2r}\cos\varphi$, $v = \sqrt{2r}\sin\varphi$ представлены фазовые портреты модельной системы (2.1) для различных значений параметров χ, μ. Фазовые портреты переходят в себя при повороте на угол, кратный $\pi/2$.

Фиг. a–f отвечают случаю $0 < \kappa < 1$: на фиг. a, b, c соответственно $\mu > 0$, $\mu = 0$, $\mu < 0$ при $\chi = 0$, на фиг. d, e, f – $\mu > 0$, $\mu = 0$, $\mu < 0$ при $\chi \neq 0$.

Фиг. g–o относятся к случаю $\varkappa > 1$: фиг. g, h, i отвечают случаям $\mu > 0$, $\mu = 0$, $\mu < 0$ при $\chi = 0$, а фиг. j, k, l, m, n–o – случаям $\mu > 0$, $\mu = 0$, $-\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2-1}\chi < \mu < 0$, $\mu = -\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2-1}\chi$, $\mu < -\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2-1}\chi$ при $\chi \neq 0$.

Указанные выше положения равновесия модельной системы соответствуют особым точкам ее фазовой плоскости. Рассмотрим характер этих особых точек.

Положение равновесия – начало координат ($u = v = 0$) существует при любых допустимых значениях параметров χ, μ. Если $\chi = 0$, $\mu = 0$, то начало координат является сложной особой точкой (двойной нулевой корень характеристического уравнения), устойчивой при $\varkappa > 1$ (фиг. h) и неустойчивой при $0 < \varkappa < 1$ (фиг. b). В остальных случаях положение равновесия $u = v = 0$ устойчиво (при $\chi = 0$) или асимптотически устойчиво (при $\chi \neq 0$); отвечающая ему особая точка является либо центром ($\chi = 0$, $\mu \neq 0$, фиг. a, c, g, i), либо устойчивым узлом ($\chi \neq 0$, $\mu = 0$, фиг. e, k), либо устойчивым фокусом ($\chi \neq 0$, $\mu \neq 0$, фиг. d, f, j, l–o).



Пусть теперь $\varphi = \varphi_*$, $r = r_*$ – одно из положений равновесия системы (2.1), удовлетворяющее уравнениям (2.2), (2.3). Линеаризованные в окрестности этого положения равновесия уравнения движения имеют характеристическое уравнение вида

$$\lambda^2 + \chi\lambda - (2\chi^2 + 8\mu^2 + 16\varkappa r_*\mu) = 0 \tag{2.6}$$

Для положений равновесия, отвечающих $r = r_0$ $(0 < \varkappa < 1)$, корни λ_1, λ_2 уравнения (2.6) вещественные разных знаков (кроме случая $\chi = 0$, $\mu = 0$, когда рассматриваемые положения равновесия сливаются с началом координат). Таким образом, эти положения равновесия неустойчивы; им соответствуют седловые особые точки (фиг. *a*, *c–f*).

Для положений равновесия при $r = r_2$ ($\varkappa > 1$, $\mu < -\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2 - 1}\chi$) корни λ_1, λ_2 также вещественные разных знаков, и эти положения равновесия неустойчивы всюду в области своего существования; в фазовой плоскости им отвечают седловые особые точки (фиг. *i, n, o*).

Положения равновесия системы (2.1), для которых $r = r_1$ ($\varkappa > 1$, $\mu < -\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2 - 1}\chi$), асимптотически устойчивы в области своего существования при $\chi \neq 0$ и устойчивы при $\chi = 0$. Если $\chi \neq 0$, то при $-a\chi \leqslant \mu \leqslant -\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2 - 1}\chi$ $\left(a = \sqrt{4\varkappa^2 - 9 + \varkappa\sqrt{16\varkappa^2 + 9}}/(4\sqrt{2})\right)$ им отвечают устойчивые узлы (фиг. *n*) (корни λ_1, λ_2 уравнения (2.6) вещественные отрицательные; в случае $\mu = -a\chi$ имеем $\lambda_1 = \lambda_2 = -\chi/2$); при $\mu < -a\chi$ соответствующие особые точки – устойчивые фокусы (фиг. *o*) (корни λ_1, λ_2 комплексно-сопряженные с отрицательными вещественными частями). Если $\chi = 0$, то рассматриваемым положениям равновесия отвечают особые точки типа "центр" (фиг. *i*).

Рассмотрим теперь положения равновесия $\varphi = \varphi_*$, $r = r_*$ системы (2.1) для значений χ, μ, принадлежащих бифуркационной прямой $\mu = -\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2 - 1}\chi$ (фиг. *m*) при $\chi \neq 0$. В этом случае $r_* = r_1 = r_2$, а корни характеристического уравнения (2.6) суть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\chi$. Положим $\varphi = \varphi_* + x_1$, $r = r_* + y_1$ и запишем уравнения (2.1), разлагая правые части по x_1 и y_1 до квадратичных членов включительно

$$\frac{dx_1}{d\tau} = -2\chi x_1 + \frac{2(\varkappa^2 - 1)}{\varkappa} y_1 + \frac{4\chi}{\sqrt{\varkappa^2 - 1}} x_1^2 - \frac{8\sqrt{\varkappa^2 - 1}}{\varkappa} x_1 y_1 + O_3 \tag{2.7}$$

$$\frac{dy_1}{d\tau} = -\frac{\varkappa\chi^2}{\varkappa^2 - 1} x_1 + \chi y_1 - \frac{2\varkappa\chi^2}{\sqrt{\varkappa^2 - 1}} x_1^2 - \frac{8\chi}{\sqrt{\varkappa^2 - 1}} x_1 y_1 + \frac{4\sqrt{\varkappa^2 - 1}}{\varkappa} y_1^2 + O_3$$

Осуществим замену $x_1, y_1 \to x_2, y_2$ вида $x_1 = (\varkappa^2 - 1)(x_2 + 2y_2)$, $y_1 = \varkappa\chi\,(x_2 + y_2)$, приводящую систему (2.7) к виду, характерному для критического случая с одним нулевым корнем [4]:

$$dx_2 / d\tau = P(x_2, y_2), \quad dy_2 / d\tau = -\chi y_2 + Q(x_2, y_2)$$

$$P(x_2, y_2) = -4\chi\sqrt{\varkappa^2 - 1}\ [\varkappa^2 x_2^2 + 2(1 + 2\varkappa^2)(x_2 y_2 + y_2^2)] + O_3$$

$$Q(x_2, y_2) = 2\chi\sqrt{\varkappa^2 - 1}\ [(\varkappa^2 - 1)x_2^2 + 4\varkappa^2 x_2 y_2 + 2(1 + 2\varkappa^2)y_2^2] + O_3$$

Характер особой точки, отвечающей рассматриваемому положению равновесия, зависит от члена наименьшей степени в разложении функции $g(x_2) = P(x_2, f(x_2))$, где $y_2 = f(x_2) = 2\chi(\varkappa^2 - 1)^{3/2} x_2^2 + O_3$ – корень уравнения $-\chi y_2 + Q(x_2, y_2) = 0$ [3]. Имеем $g(x_2) = \Delta_2 x_2^2 + O_3$, где $\Delta_2 = -4\chi\sqrt{\varkappa^2 - 1}\varkappa^2 < 0$. Учитывая еще, что $\lambda_2 < 0$, заключаем отсюда, что данному положению равновесия соответствует сложная особая точка типа "седло–узел" с одним узловым и двумя седловыми секторами, причем узловой сектор устойчивый (фиг. *m*).

3. О периодических решениях полной системы. Выясним теперь вопрос о существовании, числе и устойчивости 8π-периодических движений исходной системы уравнений (1.2) с гамильтонианом (1.1) для всех допустимых значений параметров χ, μ (кроме точек бифуркационной прямой $\mu = -\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2 - 1}\chi$ при $\varkappa > 1$).

В окрестности положения равновесия $\varphi = \varphi_*$, $r = r_*$ систему (1.5) можно рассматривать как квазилинейную с возмущениями порядка ε. Имеет место нерезонансный случай теории Пуанкаре в задаче о периодических движениях квазилинейных систем [5], и из каждого (не совпадающего с началом координат) положения равновесия модельной системы (2.1) рождается, при достаточно малых, но отличных от нуля значениях ε, единственное, T-периодическое по τ, аналитическое по ε решение полной системы (1.5) с гамильтонианом (1.6). Этому решению отвечает, в свою очередь, 8π-периодическое движение исходной системы.

Если диссипация отсутствует ($\chi = 0$), то, как показано в [1], устойчивые и неустойчивые положения равновесия модельной системы переходят соответственно в устойчивые и неустойчивые периодические движения полной системы. При наличии диссипации ($\chi \neq 0$) выводы об устойчивости положений равновесия модельной системы также переносятся на рождающиеся из них периодические решения полной системы: асимптотически устойчивые и неустойчивые положения равновесия переходят соответственно в асимптотически устойчивые и неустойчивые периодические решения. Это следует из непрерывности по ε характеристических показателей соответствующих линейных уравнений возмущенного движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00220).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холостова О.В.* О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе четвертого порядка // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 957–967.
2. *Маркеев А.П.* О критическом случае резонанса четвертого порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 369–376.
3. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.
4. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
5. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.

Москва

Поступила в редакцию 17.11.1997